EVCLIDE RESTITVTO DA VITALE GIORDANI

ELEMENTO NONO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se dalla ſcambieuole multiplicatione di due numeri piani ſimili, ſe ne produce qualche numero, il prodotto ſarà numero quadrato.

SIANO i due numeri piani ſimili A,& B, i quali, multiplicandoſi ſcambieuolmēte, produchino il numero C.

A 6 B 54
D 36 E 108 C 324

Dico che il prodotto C è numero quadrato. Si multiplichi il numero A in ſe medeſimo, ed il prodotto ſia il numero quadrato D. Perche A, multiplicando i due A,& B, produce i numeri D, & C, ſarà il numero A al numero B, [a] come D à C: ma frà i piani ſimili A, & B [b] cade vn medio proportionale, caderà ancora frà i due D, & C [c] vn medio proportionale, ſia dunque quello il numero E; ſaranno i tre D, E, C continui proportionali. Hor eſſendo i tre numeri D, E, C continui proportionali, ed il primo D, per coſtruttione, è quadrato, ſarà ancora [d] il terzo C numero quadrato, come fù propoſto dimoſtrare.

a 17. del 7.
b 18. del 8.
c 8. del 8.
d 22. del 8.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se due numeri, multiplicandoſi ſcambieuolmente, producono vn numero quadrato; quelli ſono piani ſimili.

Siano i due numeri A, & B, i quali, multiplicandoſi ſcambieuolmente, produchino il numero quadrato C. Dico che i numeri A, & B ſono piani simili. Si multiplichi il numero A in se medesimo, ed il prodotto sia D. Perche A, multiplicando B, e multiplicando se medesimo, produce i due D, & C; sarà A à B [a] come D à C; ma frà i due quadrati D, & C, [b] cade vn medio proportionale; caderà ancora frà i due A, & B [c] vn medio proportionale; per la qual cosa i numeri A, & B [d] sono piani simili, che era da dimostrarsi.

a 17 del 7.
b 11. del 8.
c 8. del 8.
d 20. del 8.

A 6	B 54
D 36	C 324

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vn numero cubo, multiplicando se medesimo, produce qualche numero, quel prodotto sarà numero cubo.

A 8
E 16 D 4
F 32 C 2
B 64 Z 1

Sia il numero cubo A, il quale, multiplicato in se medesimo, produca il numero B. Dico che il numero B è cubo. Sia C il lato del cubo A, e multiplicando C in se medesimo, si produca il numero D; si che C, multiplicando D, [a] produrrà il numero cubo A. Perche C, multiplicando se medesimo, produsse D; perciò il numero C misurerà il numero D [b] per il numero C; ma l'vnità Z misura C [c] per il medesimo numero C, perciò tale parte è l'vnità Z di C, quale parte è C di D; e la proportione dell'vnità Z à C [d] sarà come quella del numero C al numero D; per la qual cosa l'vnità Z, ed i numeri C, D sono continui proportionali. Similmente perche C, multiplicando D, produce A; perciò D [e] misurerà A per il numero C: ma C misura D per il medesimo numero C; il numero C dunque misura D, come D misura A; dalche C à D sarà [f] come D ad A; ma C à D è come l'vnità Z à C; l'vnità Z dunque, ed i numeri C, D, A sono continui proportionali; per la qual cosa frà l'vnità Z, ed il numero A, cadono due medij proportionali, che sono C, & D. In oltre perche A, multiplicando se medesimo produce B, perciò A [g] misura B per il numero A: ma l'vnità Z misura A [h] per il medesimo numero A; l'vnità dunque misura A, come A misura B; dal che tale parte è l'vnità di A, quale parte è A di B; donde la proportione, che hà l'vnità Z ad A, hauerà il numero A à B; ma frà l'vnità Z, ed il numero A, per quel che si è dimostrato, cadono i due medij C, & D proportionali; frà i due dunque A, & B, [K] caderanno ancora due medij continui proportionali, come F, ed E. Hor perche i quattro A, E, F, B sono continui proportionali, ed il primo A, per ipotesi, è numero cubo, sarà ancora il quarto B [l] numero cubo, ch'era da dimostrarsi.

a 19. defin. del 7.
b 7. assiom. del 7.
c 5 assioma del 7.
d 20. defin. del 7.
e 7. assioma del 7.
f 20. defin. del 7.
g 7. assioma del 7.
h 5. assioma del 7.
K 8. del 8.
l 23. del 8.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se vn numero cubo multiplica vn altro numero cubo, il prodotto sarà ancora numero cubo.

Siano esposti i numeri cubi A, & B, e dalla loro scambieuole multiplicatione se ne produca il numero C. Dico che C è numero cubo. S'intenda multiplicato il numero A in se medesimo, ed il prodotto sia D, sarà D [a] numero cubo. Perche A, multiplicando se medesimo, e multiplicando B, produce i numeri D, & C, hauerà A à B [b] l'istessa proportione, quale hà D à C; ma frà i due numeri cubi A, & B [c] cadono due medij proportionali; frà i due numeri dunque D, & C [d] caderanno ancora due medij proportionali: e perche il numero D fù dimostrato numero cubo, in conseguenza il numero C [e] sarà ancora numero cubo, ch' era da dimostrarsi.

A 8	B 27
D 64	C 216

a 3. del 9.
b 17. del 7.
c 12. del 8.
d 8. del 8.
e 23. del 8.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vn numero cubo, multiplicando qualche altro numero, produce numero cubo; il numero multiplicato sarà cubo.

Sia il numero cubo A, il quale, multiplicando qualche numero B, produca il numero cubo C. Dico che il numero multiplicato B è numero cubo. Multiplichi il numero A se medesimo, e produca il numero D. Perche A è numero cubo, sarà ancora D [a] numero cubo. In oltre, perche A, multiplicando se medesimo, e multiplicando B, produce i due D, & C, sarà A à B [b] come D à C: ma frà i due numeri cubi D, & C, [c] cadono due medij proportionali; frà i due numeri ancora A, & B [d] caderanno due medij proportionali; fù supposto A numero cubo, in conseguenza B [e] sarà ancora numero cubo, il che era da dimostrarsi.

A 8	B 27
D 64	C 216

a 3. del 9.
b 17. del 7.
c 12. del 8.
d 8. del 8.
e 23. del 8.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se dalla multiplicatione d'vn numero in se medesimo se ne produce vn numero cubo, il numero multiplicato sarà cubo.

Sia il numero A, il quale multiplicando se medesimo, produca il numero cubo B. Dico che A è numero cubo. Dalla multiplicatione di A in B se ne produca il numero C. Perche A, multiplicando se medesimo, produce B, e di nuouo A multiplicando B produce C, per la 19. definitione del 7. il numero C sarà cubo. Hor perche B, per ipotesi, è numero cubo, e dalla multiplicatione del numero cubo B, nel numero A, se ne produce il numero cubo C, il numero A, per l'antecedente propositione, sarà cubo, il che era da dimostrarsi.

A 8 B 64 C 512

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se vn numero composto, multiplicando vn altro numero, produce qualche numero; il prodotto sarà numero solido.

Sia qualũque numero composto, il quale A, multiplicando qualche numero B, produca il numero C. Dico che il numero C sarà numero solido. Perche A, per ipotesi, è numero composto, qualche altro numero, oltre l'vnità, [a] misurerà esso numero A: sia dunque il numero D quello, che misura il numero A, il quale misuri A per il numero E; si che D, multiplicando E, [b] produca il medesimo numero A. In oltre perche D, multiplicando E, produce A, perciò multiplicando il prodotto di D in E, per B, produrrà vn numero vguale al prodotto di B in A; ma B, multiplicando A, produce C, in conseguenza il prodotto di D in E, multiplicato per il numero B, produrrà il numero C, e per la 17. definitione del 7. il prodotto C sarà numero solido, i di cui lati sono D, E, B, il che era da dimostrarsi.

a 13. defin. del 7.
b 9. assiom. del 7.

A 6 B 11 C 66
D 2 E 3

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se il primo termine di quanti si voglia numeri continui proportionali, è l'vnità, il terzo, contando dall'vnità, è numero quadrato; ed interponendone sempre vno, tutti gli altri sono quadrati: il quarto è numero cubo; ed interponendone sempre due, gli altri sono numeri cubi: il settimo è quadrato, è cubo insieme; ed interponendone sempre cinque, tutti gli altri sono quadrati, e cubi insieme.

Siano esposti dall'vnità Z, quanti numeri si vogliano continui proportionali A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, N, P, e contando dall'vnità: Dico che il terzo B è numero quadrato; ed interponendone sempre vno, gli altri, come D, F, H, L, N &c. sono numeri quadrati; che il quarto C è numero cubo; ed interponendone sempre due, gli altri cioè F, K, N &c. sono numeri cubi; e che il settimo F è numero quadrato, e cubo insieme; ed interponendone sempre cinque, tutti gli altri, come N &c. sono numeri quadrati, e cubi insieme. Perche l'vnità Z al numero A è come A à B, tante volte l'vnità Z [a] misura il numero A, per quante volte il numero A misura B: ma l'vnità Z [b] misura A per il numero A, perciò il numero A misura B per il medesimo numero A; dal che multiplicando il numero A per il medesimo numero A [c] il prodotto sarà B; e per la 18. definitio-

a 20. defin. del 7.
b 5. assiom. del 7.
c 9. assiom. del 7.

ne del 7. il numero B sarà quadrato. Di più, perche i tre numeri B, C, D sono continui proportionali, ed il primo B, per quel che si è dimostrato è quadrato, il terzo ancora D [d] sarà quadrato. Nell'istesso modo, considerando i tre D, E, F continui proportionali, ed il primo D, per quel che si è dimostrato, è numero quadrato; sarà ancora il terzo F [e] numero quadrato: per la qual cosa, interponendone sempre vno, gli altri sono quadrati.

d 22. del 8.
e 22. del 8.

Di nuouo, perche l'vnità Z ad A è come B à C, tante volte l'vnità Z misurerà A, [f] per quante volte B misura C: ma l'vnità Z misura A [g] per il

f 20. defin. del 7.
g 5. assiom. del 7.

Z 1. A 3. B 9. C 27. D 81. E 243. F 729. G 2187. H 6561.
K 18683. L 56049. M 168147. N 504441. P 1513323.

medesimo numero A; perciò il numero B misura C per l'istesso numero A; per la qual cosa, multiplicando A per B, il prodotto sarà C; e perche A, multiplicando se medesimo, produce B, e multiplicando B, produce C, per la definitione 19. del 7. il numero C sarà cubo. In oltre perche i quattro numeri C, D, E, F sono continui proportionali, ed il primo C è numero cubo; sarà il quarto F [h] ancora numero cubo. Similmente perche i quattro numeri F, G, H, K sono continui proportionali, ed il primo F è numero cubo, sarà il quarto K [K] ancora numero cubo. Ed il medesimo si prouerà de gli altri, e perciò, interponendone sempre due, tutti gli altri sono numeri cubi.

h 23. del 8.
K 23. del 8.

Finalmente, perche il numero F, ch'è il settimo, contando dall'vnità, fù prima dimostrato essere numero quadrato, e poi numero cubo, sarà inconseguenza numero quadrato, e cubo insieme. E nell'istesso modo il numero N, ch'è il settimo, contando da F, essendone interposti cinque, cioè G, H, K, L, M, sarà quadrato, e cubo insieme. Ed il medesimo si dimostrerà per tutti gli altri, se i numeri continui proportionali saranno di maggior moltitudine, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se il primo termine, di quanti numeri si vogliano continui proportionali, è l'vnità, ed il primo, dopo l'vnità, è numero quadrato; tutti gli altri saranno numeri quadrati; e se il primo, dopo l'vnità, è numero cubo, tutti gli altri saranno ancora numeri cubi.

Siano esposti dall'vnità Z quanti si voglia numeri continui proportionali A, B, C, D, E, F, ed il primo A, dopo l'vnità, sia numero quadrato. Dico che tutti gli altri B, C, D, E, F &c. saranno numeri quadrati. Perche i numeri A, B, C, D, E, F sono dall'vnità continui proportionali, per l'antecedente propositione, il terzo B è numero

Z 1 A 4 B 16 C 64 D 256 E 1024 F 4096

quadrato, ed interponendone sempre vno, gli altri, come D,F &c. sono numeri quadrati.

In oltre, perche i tre numeri

Z 1 A 4 B 16 C 64 D 256 E 1024 F 4096

A,B,C sono continui proportionali, ed il primo A, per ipotesi, è qua-
a 22. del 8. drato, il terzo C [a] ancora sarà quadrato; similmente, perche i tre C,D,E
sono continui proportionali, ed il primo C è dimostrato essere numero
b 22.del 8. quadrato, sarà ancora il terzo E [b] numero quadrato. Per la qual cosa
tutti i numeri B,C,D,E,F sono numeri quadrati. Ed il medesimo si dimostrerà, se saranno più numeri continui proportionali.

Di nuouo, supposto che A sia numero cubo. Dico, che tutti gli altri, come B,C,D,E,F sono numeri cubi.

Perche i numeri A,B,C,D,E,F, seguendo l'vnità Z, sono continui proportionali, per l'antecedente propositione, il quarto dall'vnità, cioè il numero C, sarà cubo; ed interponendone sempre due, gli altri come F &c. sono ancora numeri cubi.

Z 1 A 8 B 64 C 512 D 4096 E 32768 F 262144.

In oltre perche l'vnità Z al numero A è come A à B; tante volte l'vni-
c 20. defin. del 7. tà misurerà il numero A, [c] per quante volte A misura B; ma l'vnità Z [d]
d 5. assioma del 7. misura A, per l'istesso numero A; il numero A dunque misurerà il B per
il medesimo numero A; e perciò A, multiplicando se medesimo, produce il numero B; ma il numero A, per ipotesi, è numero cubo, multipli-
e 9.assioma del 7. candosi il numero cubo A in se medesimo [e] produce il numero B, e per la
terza propositione di questo, il numero B sarà cubo. Di più, perche i
f 23. del 8. quattro A,B,C,D sono continui proportionali, ed il primo A, per ipotesi, è numero cubo, sarà ancora il quarto D [f] numero cubo. Nell'istesso
g 23.del 8. modo, essendo i quattro B, C, D, E continui proportionali, ed il primo
B è dimostrato cubo, sarà il quarto E [g] ancora cubo: per la qual cosa tutti i numeri B,C,D,E,F sono cubi, il che era da dimostrarsi.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se il primo termine, di quanti numeri si vogliano continui proportionali, è l'vnità; ed il primo, dopo l'vnità, non è quadrato, ne meno alcun altro sarà quadrato, eccettuatone il terzo, e tutti gli altri, interponendone sempre vno: e se il primo, dopo l'vnità, non è cubo, ne meno alcun altro sarà cubo, eccettuatone il quarto, e tutti gli altri, interponendone due.

Siano esposti dall'vnità Z quanti numeri si vogliano A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, N, P, Q continui proportionali, ed il primo A, prossimo all'vnità, non sia quadrato; ne meno alcun altro sarà quadrato, eccettuatone il terzo dall'vnità, e tutti gli altri, interponendone vno; cioè

eccet-

eccettuatone B,D,F,H,L,N,Q, &c. Se è possibile, oltre i notati B,D,F,H, L,N,Q, qualcun altro sia numero quadrato, come il numero. E Perche D

Z 1. A 2 B 4 C 8 D 16 E 32 F 64 G 128 H 256
K 512 L 1024 M 2048 N 4096 P 8192 Q 16384

ad E, ouero E ad F, è come A à B, inuertendo, [a] sarà E à D, ouero F ad a Scol. alla 10.del 7.
E, come B ad A; dal che B ad A hauerà la proportione del numero quadrato E al numero quadrato D (stante che D, per l'ottaua propositione di questo, è numero quadrato) ouero quella del quadrato F al quadrato
E: mà B, essendo il terzo dall'vnità, [b] è numero quadrato, in conse- b 8.del 9.
guenza il numero A, [c] ch'è il primo, dopo l'vnità, sarà quadrato, il che
è contro all'ipotesi. Non dunque il numero E è quadrato. Nell'istesso c 24.del 8.
modo si prouerà, che nissun altro, fuorche gli eccettuati, è numero quadrato.

Di nuouo, supposto che il numero A, contiguo all'vnità, non sia cubo. Dico che niun altro sarà cubo, eccettuatone il quarto dall'vnità, e quelli che restano, interponendone sempre due; cioè eccettuatone i seguenti C, F, K, N, &c. Perche, se oltre questi, qualcun altro fusse cubo, che sia per esempio D, essendo i tre A,B,C, continui proportionali
nella continua proportione de i tre D, E, F; per l'egualità [a] sarà A à C a 14.del 7.
come D ad F; ed inuertendo, C ad A [b] sarà come F à D: mà il numero b Scol. alla 10. del 7.
F, [c] per quel che si è detto, è cubo, ed il numero D, per suppositione è
cubo, essendo C ad A come F à D, i unmeri C, A saranno nella propor- c 8.del 9.
tione del numero cubo F al numero cubo D: e perche il numero C, [d] d 8.del 9.
quarto dall'vnità, è numero cubo, sarà ancora il numero A, [e] ch'è il pri-
mo dopo l'vnità, numero cubo, il che è contro all'ipotesi. Non dun- e 25.del 8.
que D è nnmero cubo. Di nuouo, supposto, s'è possibile, che il numero E sia numero cubo. Perche i tre A, B, C sono continui proportionali, nella continua proportione de i tre C, D, E; sarà, per l'egualità,
A à C [f] come C ad E, ed inuertendo, C ad A [g] sarà come E à C: E per- f 14.del 7. g Scol. alla 10.del 7.
che C, per l'eccettuatione, è numero cubo, ed E, per suppositione è numero cubo, sarà il numero cubo C ad A, come il numero cubo E al
numero cubo C: per la qual cosa il numero A, [h] ch'è il primo dopo h 25.del 8.
l'vnità, sarà numero cubo, il che è contro all'ipotesi. Non dunque E è numero cubo. Si è dunque dimostrato, che i due D, E interposti frà i cubi C, F non sono numeri cubi: e nell'istesso modo si dimostrerà, che i due G, H, interposti frà i cubi F, K, non sono numeri cubi: e che i due L, ed M, interposti frà i cubi K, N, non sono numeri cubi, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Se dall'vnità siano quanti numeri si vogliano, continui proportionali; sempre il minore misura il maggiore per vno de' medesimi numeri proportionali.

Sia-

Siano esposti dall'vnità Z quanti numeri si vogliano A, B, C, D, E, F, G, H continui proportionali. Dico che il minore, come C, misura ogn'altro de' maggiori di lui, come per esempio H, per vno de' numeri A, B, C, D, E, F, G, H, cioè per quel termine, tanto lontano dall'vnità, per quanto è lontano il numero misurato da quello, che misura. Hor do-

Z 1.	A 3	B 9	C 27	D 81	E 243	F 729	G 2187	H 6561

uendosi prouare, che il numero C misura H, per vno de i medesimi termini proportionali. Dico che C misura H per il numero E, ch'è tanto lontano dall'vnità Z, per quanto H è lontano da C. Perche i termini C, D, E, F, G, H sono continui proportionali, nella continua proportione de i termini Z, A, B, C, D, E, per l'egualità, sarà Z ad E [a] come C ad H; e perciò l'vnità Z misura E [b] come C misura H: mà l'vnità Z misura E [c] per l'istesso numero E, in conseguenza il numero C misura H per il medesimo numero E. Similmente dico, che C misura G per il numero D, il quale è distante dall'vnità Z, per quanto G è lontano da C. Essendo i cinque termini C, D, E, F, G continui proportionali nella proportione de i cinque termini Z, A, B, C, D, per l'egualità, sarà Z à D [d] come C à G; dal che l'vnità Z misurerà D, come C misura G: mà l'vnità Z misura D [e] per il medesimo numero D, perciò il numero C misura G per l'istesso numero D. Nell'istesso modo si prouerà, che ogn'altro numero minore misura ogn'vno de' maggiori, per vno de' medesimi numeri proportionali, ch'era da dimostrarsi.

a 14. del 7.
b 20. defin. del 7.
c 5. assioma del 7.
d 14. del 7.
e 5. assioma del 7.

COROLLARIO.

Nell'antecedente propositione appare, che, se saranno dall'vnità quanti numeri si vogliano continui proportionali, sempre ciascuno de' minori misura ciascuno de' maggiori, per vno de' medesimi numeri proportionali, cioè per quel numero, che è tanto distante dall'vnità, per quanto è distante il numero misurato da quello, che misura.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

Se dall'vnità siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, quei numeri primi, che misurano l'vltimo, misureranno ancora il prossimo all'vnità.

Siano esposti dall'vnità Z quanti si voglia numeri continui proportionali A, B, C, D. Dico che quei numeri primi, che misurano l'vltimo termine D, misureranno ancora il numero A, ch'è prossimo all'vnità. Sia qualunque numero primo E, il quale misuri il numero D. Dico che

il

il numero primo E misura ancora il numero A. Se il numero E non misura il numero A, il numero primo E [a] sarà primo al numero A, cioè i due A, & E saranno frà di loro primi; e perche E misura il numero D,

Z 1	A 10	B 100	C 1000	D 10000
E 5	H 20	G 200	F 2000	

lo misurerà per qualche numero; lo misuri dunque per il numero F; multiplicando E il numero F [b] produrrà il numero D. Perche D è distante da A come C da Z, per il Corollario antecedente, A misurerà D per il numero C; e perciò A, multiplicando C, [c] produce D: mà E, multiplicando F, produce il medesimo D, perciò il prodotto della multiplicatione di A in C è vguale al prodotto della multiplicatione di E in F. Si considerino quattro numeri, de' quali il primo sia A, il secondo E, il terzo F, ed il quarto C. Perche il prodotto del primo A, e quarto C, è vguale al prodotto del secondo E, e terzo F; sarà il primo A al secondo E, [d] come il terzo F al quarto C; mà i due A, E sono frà di loro primi, e perciò [e] minimi nella loro proportione, in conseguenza i numeri A, ed E, [f] misureranno vgualmente i due F, & C; cioè l'antecedente A misura l'antecedente F, come il conseguente E misura il conseguente C; e supposto, che il numero E misuri C per G, multiplicando E nel numero G, [g] produrrà il numero C. In oltre, perche A, per l'antecedente Corollario, misura C per il numero B, multiplicando A in B [h] il prodotto sarà C: mà si disse, che G era prodotto dalla multiplicatione di E in G, sarà il prodotto di E in G vguale al prodotto di A in B; e sarà A primo ad E secondo, [k] come G terzo à B quarto: mà i numeri A, ed E, sono primi frà loro, in conseguenza [l] sono i minimi nella loro proportione di G à B, per la qual cosa i numeri A, E [m] misurano vgualmente i numeri G, & B, cioè l'antecedente A misura l'antecedente G, ed il conseguente E misura il conseguente B. E supposto, che E misuri B per il numero H, multiplicando E in H [n] il prodotto sarà B. Perche, per il Corollario antecedente, A misura B, per il medesimo numero A (stante che A è distante dall'vnità, come B è distante da A) perciò A, multiplicando se medesimo, [n] produce B; mà E, multiplicando H, produce il medesimo B, perciò il prodotto di A in se medesimo è vguale al prodotto di E in H. Si considerino tre numeri, cioè il primo E, il secondo A, ed il terzo H. Perche il prodotto del primo E nel terzo H è vguale al prodotto del secondo A in se medesimo; sarà E ad A, [o] come A ad H: mà i due E, ed A sono frà di loro primi, ed in conseguenza [p] minimi nella proportione di E ad A, ouero di A ad H; perciò i numeri E, A [q] misureranno vgualmente i numeri A, H, cioè l'antecedente E misura l'antecedente A, ed il conseguente A misura il conseguente H. Mà, per ipotesi, E non misura A, il numero dunque E misurarebbe, e non misurarebbe il numero A, ch'è impossibile. Per la qual cosa, se il numero primo E misura il numero D, misurerà ancora il numero A prossimo all'vnità, che era da dimostrarsi.

a 31. del 7.
b 9. assioma del 7.
c 9. assioma del 7.
d 19. del 7.
e 23. del 7.
f 21. del 7.
g 9. assioma del 7.
h 9. assioma del 7.
K 19. del 7.
l 23. del 7.
m 21. del 7.
n 9. assioma del 7.
o 20. del 7.
p 23. del 7.
q 21. del 7.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

Se dall'vnità siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, e quello, ch'è dopo l'vnità, sia primo; niun' altro misurerà il massimo, fuor che quelli, che sono ne i proposti numeri proportionali.

Siano esposti dall'vnità Z quanti numeri si vogliano A,B,C,D continui proportionali, de'quali il numero A, ch'è prossimo all'vnità Z, sia numero primo. Dico che niun'altro numero, fuor che i tre A, B, C, misureranno il massimo D. Misuri, s'è possibile, qualche altro numero E il massimo D, il numero E non sarà numero primo; perche se fosse numero primo, misurando il numero D, per l'antecedente propositione, misurarebbe il numero A, ch'è prossimo all'vnità, il che è impossibile, stante che il numero A è supposto numero primo. Non dunque il numero E è primo, ma è composto, dal che [a] qualche numero primo lo misura. Dico che altro numero primo non lo misura, fuor che il primo A. Perche, se qualche altro numero primo, fuor che A, misurasse il numero E, quello [b] misurarebbe il numero D (ch'è misurato da E) dal che il medesimo [c] misurarebbe il numero A prossimo all'vnità, ch'è impossibile per essere A numero primo, e perciò non altro numero primo misura E, fuor che il numero A. In oltre, perche E misura D, lo misuri per qualche numero F. Dico che F è diuerso da i numeri A,B,C. Se F sarà il medesimo, che vno de i numeri A, B, C; perche E misura D per il numero F, lo misurerà ancora per vno de'numeri A,B,C; ed all'incontro, [d] quel numero in A, B, C, che sarà vguale ad F, misurerà il numero D per il numero E; ma il numero D [e] è misurato da vno de i numeri A,B,C, per vno de i medesimi A,B,C; sarà E vno de i numeri A,B,C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero F è il medesimo, che vno de i tre A, B, C, ma è diuerso. Hor perche E misura D per F, all'incontro F [f] misura D per E. Dico che F non è numero primo. Perche, se fosse numero primo, misurando l'vltimo D, misurarebbe ancora [g] il numero A, ch'è prossimo all'vnità, ch'è impossibile (stante che A è numero primo); e perciò F sarà numero composto; per la qual cosa [h] qualche numero primo lo misura. Dico di nuouo non essere altro numero, fuor che il numero A. Se altro numero primo misura il numero F, perche F misura D, quel numero primo [K] misurerà ancora il numero D, e misurerà [l] parimente il numero A, prossimo all'vnità, ch'è impossibile; stante che A è numero primo. Non dunque altro numero primo misura F, che il numero primo A. Perche dunque E misura D per F, multiplicando E per F, [m] il prodotto sarà D. In oltre, perche C è distante dall'vnità, come D è distante da A, per il Corollario all'11. propositione di questo, A misura D per il numero C; e perciò A, [n]

Z 1	A 5	B 25	C 125	D 625
	E ----	H ----	G ----	F ----

a 33. del 7.
b 11. assiom. del 7.
c 12. del 9.
d 8. assiom. del 7.
e 11. del 9.
f 8. assiom. del 7.
g 12. del 9.
h 33. del 7.
K 11. assiom. del 7.
l 12. del 9.
m 9. assiom. del 7.
n 9. assiom. del 7.

multi-

multiplicando C, produce D: ma il numero D è prodotto dalla multiplicatione di E in F, sarà il prodotto di A in C vguale al prodotto di E in F; per la qual cosa A primo ad E [o] secondo, sarà come F terzo à C quarto: ma per quel che si è dimostrato, A misura E, il numero F dunque [p] misurerà il numero C; e supposto che lo misuri per il numero G, si tralasci l'vltimo D, e si consideri C come vltimo.

Se G fosse il medesimo, che vno de i numeri A, & B, vno de i numeri A, & B sarebbe quello, per il quale F misura C, ed all'incontro [q] vno de i numeri A, & B, misurerà C per il numero F: ma ciascuno de i numeri A,B, misura C [r] per vno de i medesimi numeri A, B; sarà F il medesimo, che vno de i numeri A,B; il che è falso, essendosi dimostrato, che F nõ è vno de i numeri A, B. Non dunque G è il medesimo di vno de i numeri A,B. E perche F misura C per G, all'incontro G [t] misurerà C per F. Dico che G non è numero primo. Perche se fosse primo, misurando l'vltimo C, misurerà ancora il numero primo A, [u] ch'è prossimo all'vnità, il che è impossibile; non dunque G è numero primo, ma è composto, e perciò [x] qualche numero primo lo misura. Dico che questo non può essere altro numero, che A. Imperciochè se altro numero primo, che A, misura G, perche G misura l'vltimo C, quello, che misura G, [y] misurerà ancora l'vltimo C, ed inconseguenza misurerà [z] parimente il numero primo A, ch'è più prossimo all'vnità, il che è impossibile. Non dunque altro numero primo misura G, fuorche A: In oltre perche F misura C per il numero G, multiplicando G per F, [a] il prodotto sarà C. Similmente essendo C distante da A, come B è distante dall'vnità, il numero A misurerà C [b] per il numero B; e perciò A, multiplicando B, [c] produce C; si disse, che G, multiplicando F, produce il medesimo C; sarà il prodotto di A in B vguale al prodotto di G in F. Si considerino quattro numeri, il primo sia A, il secondo F, il terzo G, ed il quarto B. Perche il prodotto del primo A, & quarto B, è vguale al prodotto del secondo F, & terzo G, sarà il primo A al secondo F, [d] come il terzo G al quarto B: ma, per quel che si è dimostrato, A misura F, perciò G [e] misurerà il numero B; lo misuri per il numero H, si tralasci l'vltimo C, e si consideri B come vltimo. E tenendo il modo antecedente proueremo, che H è diuerso da A, come si è fatto di F, & G,

Se H è l'istesso, che A, ed il numero G misura B per il numero H, il medesimo numero G misurerà B per il numero A; ed all'incontro A [f] misurerà B per G. In oltre, perche A è distante dall'vnità, come B è distante da A, per il Corollario all'11. di questo, A misurerà B per il medesimo numero A: ma si disse che A misura B per il numero G, in conseguenza G sarà il medesimo, che A; il che è contro à quel che si è dimostrato. Non dunque H è l'istesso, che A, mà è diuerso. Di più, perche G misura B per H, perciò G, multiplicando H, [g] produtrà il numero B. Similmente perche A misura B per il medesimo numero A, multiplicandosi A in se medesimo, produrrà il numero B: per la qual cosa il

Z 1	A 5	B 25	C 125	D 625
	E ----	H ----	G ----	F ----

o 19. del 7.
p 20. defin. del 7.
q 8. assioma del 7.
r 11. del 9.
t 8. assioma del 7.
u 12. del 9.
x 33. del 7.
y 11. assiom. del 7.
z 11. del 9.
a 9. assioma.
b Corol. alla 11. del 9.
c 9. assioma del 7.
d 19. del 7.
e 20. defin. del 7.
f 8. assioma del 7.
g 9. assioma del 7.

pro-

prodotto di H in G ſarà vguale al prodotto di A in ſe medeſimo; e perciò la proportione del primo H [h] al ſecondo A ſarà come il ſecondo A al terzo G; ed inuertendo, A ad H ſarà come G ad A: ma, per quel, che ſi è dimoſtrato, A miſura H, in conſeguenza G miſurerà A; il che è impoſſibile, mentre, per ipoteſi, A è numero primo. Per la qual coſa ſe A è numero primo, niſſun'altro numero miſurerà il maſſimo D, che i numeri A,B,C, come fù propoſto dimoſtrare.

h 20. del 7.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

Se i numeri primi miſurano il minimo di quelli, ch'è miſurato da loro; niſſun altro numero primo miſurerà quel minimo, fuor che i medeſimi, che lo miſurano da principio.

Sia A il minimo numero, miſurato da i numeri primi, B,C,D. Dico, che niſſun altro numero primo miſurerà il minimo A, fuor che i tre B, C, D. Miſuri il minimo A qualcun'altro numero primo, diuerſo da i tre B, C,D, che ſia E; il quale miſuri il numero A per il numero F; il numero E, multiplicando F, produrrà il numero A. E

A . . . .
B . .   C . . .   D . . . . .
E ----   F ------

perche ciaſcun'numero B, C, D miſura il numero A, per la 32. propoſ. del 7. ciaſcuno de i numeri B,C,D miſurerà vno de i due E,F; e perche non miſurano il numero E, per eſſere E numero primo, in conſeguenza miſureranno il numero F, il quale è minore di A, che è contro all'ipoteſi, mentre il numero A è ſuppoſto il minimo di quelli, miſurati da i numeri B,C,D. Non dunque altro numero primo E, diuerſo da B,C,D miſurerà il numero A; ma i numeri primi B,C,D ſolamente, miſureranno il minimo A, come fù propoſto dimoſtrare.

S C O L I O.

I ſeguenti dieci Theoremi di Barlaam Monaco, dimoſtrano ne i numeri quelle medeſime paſſioni, che nelle rette linee dimoſtra Euclide ne' i primi dieci Theoremi del ſecondo Elemento.

I.

Se ſaranno due numeri, vno de' quali ſia diuiſo in quante parti ſi voglia, il numero piano, fatto dalla multiplicatione de i due propoſti numeri, è vguale à i numeri piani, fatti dalle multiplicationi di ciaſcuna parte del numero diuiſo, nel numero non diuiſo.

Siano i due numeri AB, & C; e ſia AB diuiſo nelle parti AD, DE, EB, ed il numero C non diuiſo; e ſia fatto il numero piano F dalla multiplicatione del numero C nel numero AB; di più, dalla multiplicatione del numero C nella

par-

parte AD ſia fatto il numero piano GH; dalla multiplicatione del numero C nella parte DE, ſia fatto il piano HK; e dalla multiplicatione del numero C nella parte EB ſia fatto il numero piano KL. Dico che il numero piano F è vguale à i numeri piani GH, HK, KL, giunti inſieme.

A . . . . D . . . E . . B   C . .
F . . . .
G . . . . H . . . . . . K L

Perche C, multiplicando AB, produce F, perciò AB miſura F [a] per il numero C: ma il numero C [b] è miſurato dall'vnità per l'iſteſſo numero C, ſarà dunque F miſurato da AB, come C è miſurato dall'vnità; e perciò AB ad F [c] è come l'vnità à C. Similmente perche C, multiplicando AD, produce GH, perciò AD miſura GH [d] per il numero C; ma il numero C [e] è miſurato dall'vnità per il medeſimo numero C; il numero dunque AD miſura GH, come l'vnità miſura C; e perciò la proportione di AD à GH [f] è come quella dell'vnità al numero C. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che DE ad HK è come l'vnità al numero C; e che EB ad LK è come l'vnità à C. Per la qual coſa tutto AB à tutto GL [g] ſarà come l'vnità al numero C; ma l'vnità al numero C, per quel, che ſi è dimoſtrato, è come AB ad F, ſarà AB ad F [h] come il medeſimo numero AB à GL; e perciò i numeri F, & GL ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.

a 7. aſſioma del 7.
b 5. aſſioma del 7.
c 20. defin. del 7.
d 7. aſſioma del 7.
e 5. aſſioma del 7.
f 20. defin. del 7.
g 12. del 7.
h Scol. alla 12. del 7.

I I.

Se vn numero è diuiſo in due parti, i due numeri piani, che ſi fanno dalla multiplicatione di tutto il numero in ciaſcuna parte, giunti inſieme, ſono vguali al numero quadrato, che ſi fà dalla multiplicatione di tutto il numero in ſe medeſimo.

Sia il numero AB, diuiſo nelle due parti AC, CB. Dico che i due numeri piani, cioè vno fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB, nella parte AC, e l'altro dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte BC, giunti inſieme, ſono vguali al quadrato di tutto il numero AB. Si eſponga il numero D vguale ad AB, ſarà il quadrato del numero AB vguale al piano fatto dalla multiplicatione del numero D nel numero AB. In oltre perche il numero AB è diuiſo ne i due numeri AC, CB, ed il numero D non diuiſo è vguale al numero AB; il piano fatto dalla multiplicatione del numero D, e dalla parte AC, col piano fatto dal medeſimo numero D, e dalla parte CB, ſarà vguale al piano fatto da tutto il numero AB nella parte AC, col piano fatto dal medeſimo numero AB nella parte BC: ma i piani fatti dal numero D, multiplicato in ciaſcuna delle parti AC, CB, inſieme giunti, per l'antecedente dimoſtratione, ſono vguali al piano fatto dalla multiplicatione del numero D, nel numero AB; ſaranno i piani fatti dalle multiplicationi del numero AB in ciaſcuna delle parti AC, CB, vguali al piano fatto dal numero D nel numero AB. E perche il piano fatto dal numero D nel numero AB è vguale al quadrato del numero AB; ſarà il quadrato di tutto il numero AB vguale à i due piani fatti dalla multiplicatione del numero AB in ciaſcuna delle parti AC, CB; come fù propoſto dimoſtrare.

D . . . . .
A . . . . C . . B

Se

III.

Se vn numero ſarà diuiſo in due parti, il numero piano fatto dalla multiplicatione delle parti, col quadrato d'vna delle parti, è vguale al piano fatto dalla multiplicatione di tutto il numero in quella parte, doue fù fatto il quadrato.

Sia il numero AB, diuiſo in due parti, come AC, CB. Dico che il numero piano fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB, nella parte AC, è vguale al piano fatto dalle parti BC, CA, col quadrato della parte CA. Si eſponga il numero D, vguale al numero AC, ſarà il piano fatto dal numero D nella parte AC, vguale al quadrato del numero AC. Similmente, eſſendo D vguale ad AC, il piano, fatto da BC in CA, è vguale al piano fatto da BC in D; ed il piano fatto da BA in D è vguale al piano fatto da BA in AC. In oltre perche la retta BA è diuiſa in C, il piano fatto dalla multiplicatione del numero AB nel numero D, per il primo Theorema, è vguale à i due piani, fatti dalle multiplicationi di AC nel numero D, e di CB nel numero D: mà il piano fatto da AB in D è vguale al piano fatto da BA nella parte AC; ſarà il piano fatto da BA in AC, vguale à i due piani fatti dà BC in D, e da AC in D: e perche i due piani fatti da BC in D, e da AC in D, ſono vguali al piano, fatto da BC in CA, col quadrato di AC; ſarà il piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte AC, vguale al piano, fatto da BC in CA, col quadrato di AC, ch'era da dimoſtrarſi.

A....C......B
D....

IV.

Se vn numero è diuiſo in due parti; i quadrati delle parti, col doppio piano fatto da lla ſcambieuole multiplicatione delle parti, è vguale al qu adrato di tutto il numero.

Sia il numero AB diuiſo nelle due parti AC, CB, dico che i quadrati delle parti AC, CB, col doppio piano, fatto dalla ſcambieuole multiplicatione delle parti AC, CB, è vguale al quadrato di tutto il numero AB.

A......C....B

Perche il numero AB è diuiſo nelle due parti AC, CB, i piani fatti dalla multiplicatione di tutto il numero AB, in ciaſcuna delle parti AC, CB, per il ſecondo Theorema, è vguale al quadrato di tutto il numero AB; mà il piano, fatto dal numero AB nella parte AC, per l'antecedente dimoſtratione, è vguale al piano fatto da BC in CA, col quadrato di AC; ed il piano, fatto da tutto il numero AB nella parte BC, è vguale al piano, fatto da AC in CB, col quadrato di AC; ſaranno i quadrati delle parti AC, CB, col doppio piano, fatto da AC in CB, vguali al quadrato di tutto il numero AB, ch'era da dimoſtrarſi.

V.

Se vn numero paro è diuiſo in due parti vguali, ed il medeſimo è diuiſo in due parti ineguali; il piano, fatto dalle parti ineguali, col quadrato della parte intermedia, è vguale al quadrato della metà del numero.

Sia il numero paro AB, diuiſo nelle due parti vguali AC, CB, ed il medeſimo numero AB ſia diuiſo nelle due parti ineguali AD, DB. Dico che il piano fatto dalla multiplicatione delle parti ineguali AD, DB, col quadrato della parte intermedia CD, è vguale al quadrato di CB, ch'è la metà del numero. Perche AC è vguale à CB, ſarà il piano, fatto da CB in BD, vguale al piano fatto da AC in DB, ouero da BD in AC. In oltre, perche il numero AD è diuiſo nelle due parti AC, CD, per il primo Theorema, il piano, fatto da BD in DC, col piano contenuto da BD in AC, è vguale al piano contenuto da BD in DA; mà il piano contenuto da BD in AC, per quel, che s'è detto, è vguale al piano contenuto da CB, in BD; ſarà il piano contenuto da CB in BD, col piano di BD in DC, vguale al piano contenuto da BD in DA, ouero da AD in DB; vgualmente s'aggiũga il quadrato del numero CD, ne viene il piano fatto da AD in DB, col quadrato di CD, vguale al piano fatto da CB in BD, col piano fatto da BD in DC, aſſieme col quadrato di DC: mà il piano contenuto da BD in DC, col quadrato di DC, per il 3. Theorema, è vguale al piano contenuto da BC in CD; ſarà il piano contenuto da AD in DB, col quadrato di CD, vguale al piano contenuto da CB in BD, col piano fatto da BC in CD: mà il piano contenuto da CB in BD, col piano di BC in CD, per il ſecondo Theorema, è vguale al quadrato di CB; ſarà il piano fatto da AD, in DB, col quadrato di CD, vguale al quadrato di CB, come fù propoſto dimoſtrare.

A.....C...D..B

VI.

Se vn numero paro ſarà diuiſo in due parti vguali, ed à quello ſe gli aggiunga vn numero ad arbitrio; il piano, che ſi fà dalla multiplicatione di tutto l'aggregato, nel numero aggiunto, col quadrato della metà del primo numero, è vguale al quadrato del numero compoſto della metà, e dell'aggiunto.

Sia il numero paro AB, diuiſo nelle due parti vguali AC, CB, al quale ſia aggiunto il numero BD ad arbitrio. Dico che il piano, fatto dalla multiplicatione di tutto l'aggregato AD nel numero aggiunto DB, col quadrato della metà CB, è vguale al quadrato del numero CD, compoſto della metà CB, e del numero aggiunto BD. Perche AC, per ipoteſi, è vguale à CB, il piano, fatto dalla multiplicatione di DB in BC, è vguale al piano contenuto da DB in CA, ouero da AC in BD. Si conſideri il numero AD, diuiſo nelle parti AC, CD, per il primo Theorema, il piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AD nel numero DB, è vguale à i due piani contenuti da AC in DB, e da CD in DB: mà il piano

A......C......B...D

conte-

contenuto da AC in BD è vguale al piano de'i due DB, BC; sarà il piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AD nel numero DB, vguale à i due piani, cioè vno contenuto da CD in DB, e l'altro contenuto da DB in BC; vgualmente s'aggiunga il quadrato di CB, ne viene il piano fatto dal numero AD nel numero BD, col quadrato di CB vguale à i piani contenuti da CD in DB, e da DB in BC, col quadrato di CB; mà il piano contenuto da DB in BC, col quadrato di CB, per il 3. Theorema, è vguale al piano fatto DC in CB; sarà il piano contenuto da AD in DB, col quadrato di CB, vguale al piano contenuto da CD in DB, col piano contenuto da DC in CB. E perche il piano contenuto da CD in DB, col piano contenuto da DC in CB, per il secondo Theorema, è vguale al quadrato di CD; sarà il piano, fatto dalla multiplicatione del numero AD nel numero D B, col quadrato del numero C B, vguale al quadrato del numero CD, come fù proposto dimostrare.

A......C......B...D

V I I.

Se vn numero è diuiso in due parti, il quadrato di tutto il numero, col quadrato d'vna delle parti, è vguale al doppio piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero in quella parte, col quadrato del rimanente.

Sia il numero AB diuiso nelle due parti AC, CB. Dico che il quadrato di tutto il numero AB, col quadrato della parte BC, è vguale al doppio piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte BC, col quadrato del rimanente AC.

A......C...B

Perche il numero AB è diuiso nelle due parti AC, CB, il piano contenuto da tutto il numero AB, nel numero BC, col piano contenuto da tutto AB nella parte AC, per il secondo Theorema, è vguale al quadrato di AB: mà il piano, fatto dalla multiplicatione del numero AB in AC, per il terzo Theorema, è vguale al piano contenuto da i numeri BC, CA, col quadrato di AC; sarà il piano, contenuto da i numeri AB, BC, col piano contenuto da i due numeri AC, CB, più il quadrato di AC, vguale al quadrato di AB: vgualmente s'aggiunga il quadrato di CB, ne viene il quadrato di AB, più il quadrato di CB, vguale al piano, contenuto da i numeri AB, BC, col piano contenuto da i numeri AC, CB, più i quadrati delle parti AC, CB: mà il piano contenuto da i due AC, CB, col quadrato di CB, per il terzo Theorema, è vguale al piano, contenuto da i due AB, BC, il doppio piano dunque, contenuto da i due AB, BC col quadrato di AC, sarà vguale al quadrato di AB, col quadrato di CB, ch'era da dimostrarsi.

V I I I.

Se vn numero è diuiso in due parti, il quadruplo piano, contenuto da tutto, e da vna delle parti, col quadrato del rimanente, è vguale al quadrato del numero, composto di tutto, e di quella medesima parte,

Sia il numero AB, diuiso nelle due parti AC, CB, al quale s'aggiunga il numero BD; vguale al numero BC. Dico che il quadruplo piano, fatto dalla multiplicatione di tutto il numero AB nella parte BC, col quadrato del rimanente AC, è vguale al quadrato di AD. Perche B D è vguale, per costruttione, à BC, il piano, contenuto da AB in BD, sarà vguale al piano, contenuto da i numeri AB, BC; ed il doppio piano, contenuto da i due AB, BD, sarà vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BC. Si consideri il numero AD diuiso ne i due numeri AB, BD; per il quarto Theorema, il quadrato di tutto il numero AD è vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BD, con i quadrati de i due AB, BD; mà il doppio piano, contenuto da i due AB, BD, per quel che si è detto, è vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BC; sarà il quadrato di AD vguale al doppio piano, contenuto da i due AB, BC, co'i quadrati de i due AB, BD, cioè con i quadrati de i due AB, BC; mà i quadrati de i due AB, BC, per il settimo Theorema, sono vguali al doppio piano, contenuto da i due AB, BC, col quadrato di AC; sarà il quadrato di AD vguale al quadruplo piano, contenuto da i due AB, BC, col quadrato di AC, ch'era da dimostrarsi.

A......C...B...D

I X.

Se vn numero paro è diuiso in due parti vguali, ed il medesimo è diuiso in due parti ineguali; i quadrati delle parti ineguali sono il doppio del quadrato della metà, col quadrato del numero intermedio.

Sia il numero paro AB, diuiso nelle due parti vguali AC, CB, ed il medesimo numero AB sia diuiso nelle due parti ineguali AD, DB. Dico, che i quadrati delle parti ineguali AD, DB, sono il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato del numero intermedio CD. Perche A C è vguale à CB, sarà il quadrato di AC vguale al quadrato di CB; ed il piano contenuto da i due AC, CD, sarà vguale al piano contenuto da i due BC, CD. In oltre perche il numero AD è diuiso nelle due parti AC, CD, per il quarto Theorema, il quadrato di AD sarà vguale à i quadrati delle parti AC, CD, col doppio piano contenuto dalle medesime AC, CD; mà il doppio piano, contenuto dalle due AC, CD, è vguale al doppio piano, contenuto dalle due BC, CD; sarà il quadrato di AD vguale à i quadrati delle due AC, CD, col doppio piano contenuto dalle due BC, CD; vgualmente s'aggiunga il quadrato di BD, ne vengono i quadrati de i due AD, DB, vguali à i quadrati delle tre parti AC, CD, DB, col doppio piano contenuto dalle due BC, CD: mà il doppio piano contenuto dalle due BC, CD, col quadrato di BD, per il settimo Theorema, è vguale à i quadrati de i due BC, CD; saranno i quadrati delle due AD, DB vguali à i quadrati delle due AC, CB, col doppio quadrato di CD; e perche il quadrato di CB è vguale al quadrato di CA; i quadrati dunque delle due AD, DB, sono vguali al doppio quadrato di AC, col doppio quadrato di CD; ed in conseguenza i quadrati delli due AD, DB, sono il doppio de i semplici quadrati delli due AC, CD, come fù proposto dimostrare.

A......C....D..B

X.

Se vn numero paro è diuiſo in due parti vguali, ed à quello s'aggiunga vna parte ad arbitrio; il quadrato di tutto l'aggregato, col quadrato della parte aggiunta, è il doppio del quadrato della metà, col quadrato del rimanente dell'aggregato.

Sia il numero paro AB, diuiſo nelle duè parti vguali AC, CB, al quale ſia aggiunta qualunque parte BD. Dico che il quadrato dell'aggregato AD, col quadrato della parte aggiunta BD, è il doppio del quadrato della metà AC, col quadrato del rimanente CD.

A......C......B....D

Perche AC è vguale à CB, ſarà il quadrato di AC vguale al quadrato di CB, ed il piano contenuto dalle due parti AC, CD, ſarà vguale al piano contenuto dalle due DC, CB; dal che il doppio piano contenuto dalle due AC, CD, ſarà vguale al doppio piano, contenuto dalle due DC, CB. In oltre s'intenda il numero AD diuiſo nelle due parti AC, CD, per il quarto Theorema, i quadrati delle due parti AC, CD, col doppio piano contenuto dalle medeſime parti AC, CD, ſaranno vguali al quadrato di AD: mà il doppio piano contenuto dalle due AC, CD è vguale al doppio piano contenuto dalle due DC, CB; ſarà il quadrato di AD vguale à i quadrati delle due AC, CD, col doppio piano contenuto dalle due DC, CB; vgualmente s'aggiunga il quadrato di BD; i quadrati de i due AD, DB, ſaranno vguali à i quadrati delle tre AC, CD, DB, col doppio piano contenuto dalle due DC, CB; mà, per il ſettimo Theorema, il doppio piano contenuto dalle due DC, CB, col quadrato di BD, è vguale à i quadrati delle due DC, CB; ſarà il doppio quadrato di CD, co' i quadrati delle due AC, CB, cioè col doppio quadrato di AC, vguale à i quadrati delle due AD, DB; ed i ſemplici quadrati AC, CD ſaranno la metà de i quadrati de i due AD, DB. Per la qual coſa i quadrati de' i due AD, DB, ſono il doppio de i quadrati delle due AC, CD, il che era da dimoſtrarſi.

L E M M A.

Se due numeri ſono primi frà loro, il piano contenuto da eſſi, è primo all'aggregato del medeſimo piano, con i loro quadrati; ed è ancora primo al ſolo aggregato de' loro quadrati.

Siano i numeri DE, EF frà di loro primi. Dico che il piano contenuto da i due DE, EF, è primo all'aggregato del medeſimo piano, con i quadrati de i due DE, EF. Perche ſe non ſono primi, qualche numero ſarà loro commune miſura; ſia quello il numero G. Perche G miſura il piano contenuto da i due DE, EF, e miſura l'aggregato de i quadrati di DE, EF, col piano contenuto

da i medeſimi DE, EF, miſurerà ancora il loro composto, [a] cioè miſurerà l'aggregato de i quadrati di DE, EF, col doppio piano contenuto da i due DE EF; ma i quadrati de i due DE, EF, col doppio piano contenuto da i medeſimi DE, EF, per il 4. de gli antecedenti Theoremi, è vguale al quadrato di DF; il numero dunque G miſurerà ancora il quadrato di DF: ma per ſuppoſitione, miſura il piano contenuto da i due DE, EF, in conſeguenza il piano contenuto da i due DE, EF, ed il quadrato di DF, ſono numeri frà di loro compoſti. Inoltre, perche i numeri DE, EF, [b] per ipoteſi, ſono primi frà loro; l'aggregato DF [c] ſarà primo tanto à DE, quanto à DF; ed inuertendo ciaſcuno de i due DE, EF ſarà primo ad FD; donde il piano contenuto da i due DE, EF, [d] ſarà primo ad FD: per la qual coſa il medeſimo piano contenuto da i due DE, EF, [e] ſarà primo al quadrato di DF: ma il piano contenuto da i due DE, EF, ed il quadrato di DF, furono dimoſtrati eſſere frà di loro compoſti, ſaranno dunque primi frà loro, e ſaranno frà di loro compoſti, ch'è impoſſibile. Non dunque il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de i quadrati di DE, EF, col medeſimo piano di DE in EF, hanno commune miſura, ma ſono frà di loro primi.

D..E...F
G---

a 10. aſſiom. del 7.
b 14. defin. del 7.
c 30. del 7.
d 26. del 7.
e 26. del 7.

Dico di nuouo, che il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de i quadrati di DE, EF ſono primi frà loro: perche ſe non ſono frà di loro primi qualche numero ſarà loro commune miſura ſia quello il numero G. Perche il numero G miſura l'aggregato de i quadrati de i due DE, EF, e miſura, per ipoteſi, il piano contenuto da i due DE, EF, miſurerà ancora [f] il loro compoſto, cioè miſurerà l'aggregato del piano contenuto da i due DE, EF, con i quadrati de i medeſimi; dal che il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de i quadrati de i due DE, EF, col piano contenuto da i medemi DE, EF, haueranno vna commune miſura, ch'è contro à quello, che prima ſi è dimoſtrato. Non dunque il piano contenuto da i due DE, EF, e l'aggregato de' quadrati de i medemi DE, EF, hanno commune miſura, ma ſono frà di loro primi, come fù propoſto dimoſtrare.

f 10. aſſiom. del 7.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

Se tre numeri, continui proportionali, ſono i minimi di tutti gli altri, che hanno la medeſima proportione con eſſi, due, preſi come ſi voglia, giunti inſieme, ſono primi al terzo.

Siano i tre numeri continui proportionali A, B, C, cioè, che il primo A al ſecondo B ſia come il ſecondo B al terzo C, i quali ſiano i minimi di tutti gli altri, che hanno la medeſima proportione con eſſi. Dico che due, preſi in qualunque modo, ſono primi all'altro; cioè, che giunti inſieme i due A, C, l'aggregato è primo al numero B; e giunti inſieme i due B, C, l'aggregato è primo al numero A; e giunti inſieme i due A, & B, l'

[a] 35. del 7. aggregato è primo al numero C. Si prendano [a] i due numeri DE, EF, che siano minimi nella proportione A à B, ò di B à C. Essendo i due DE, EF minimi nella medesima proportione de i tre continui proportionali A, B, C, per la 2. propositione dell'8, DE, multiplicando se medesimo, produce il primo termine A; e similmente EF, multiplicando se medesimo, produce il terzo C; e dalla scambieuole multiplicatione de i due DE, EF, se ne produce il medio B.

A.... B...... C......... D..E...F

Perche i numeri DE, EF sono i minimi di tutti quelli, che hanno la medesima proportione con essi, per la 24. propos. del 7, sono frà di loro primi; e perciò, giunti insieme, sarà tutto il numero DF [a] primo à ciascuno di essi, cioè sarà primo al numero DE, e sarà ancora primo al numero FE: per la qual cosa [b] il prodotto, fatto dal numero FD nel numero DE, sarà primo al numero EF; ma il prodotto, fatto dal numero FD nel numero DE, per il 3. degli antecedenti theoremi, è vguale al prodotto, ò piano, contenuto da i due FE, ED, col quadrato di DE; sarà il prodotto, fatto da FE in ED, col quadrato di DE, primo al numero EF: ma il prodotto de i due FE, ED, è vguale al numero B; ed il quadrato di DE è vguale al numero A; sarà l'aggregato de i numeri A, & B, primo al numero EF. E perche C è il quadrato del numero EF, perciò i due A, B, [c] insieme giunti, sono primi al numero C, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 30. del 7.
b 26. del 7.
c 26. del 7.

Di nuouo, perche i due DE, EF [d] sono frà di loro primi, il loro aggregato FD [e] sarà primo al numero DE; ed il prodotto, ò piano, contenuto da i due DF, FE, [f] sarà primo al medesimo numero DE: ma il prodotto, fatto da i due DF, FE, per il 3. degli antecedenti Theoremi, è vguale al prodotto de i due DE, EF, col quadrato di EF; il prodotto de i due DE, EF, col quadrato di EF, sarà primo al numero DE: ma il prodotto de i due DE, EF è vguale al numero B; ed il quadrato di EF è vguale al numero C; l'aggregato dunque de i due numeri B, & C, sarà primo al numero DE; ed essendo A il quadrato di DE, sarà l'aggregato de i due B, & C [g] primo al numero A, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

d 24. del 7.
e 30. del 7.
f 26. del 7.
g 26. del 7.

Finalmente perche i due DE, EF, per quel, che s'è detto, sono primi frà loro, l'aggregato de i loro quadrati, cioè l'aggregato de i quadrati di DE, EF, per l'antecedente lemma, sarà primo al piano contenuto da i due DE, EF; ma i quadrati de i due DE, EF sono i notati A, & C; ed il piano, contenuto da i due DE, EF, è vguale al numero B; in conseguenza i due A, & C, giunti insieme, sono primi al numero B, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVI.

Se due numeri sono frà di loro primi, non è possibile, che il primo al secondo sia, come il secondo ad vn altro numero.

Siano i numeri A, & B, frà di loro primi. Dico che A, à B non può

essere

essere come B ad vn altro numero. Sia, se è possibile, A à B, come B ad vn altro numero, per essempio C. Perche i numeri A, & B sono frà di loro primi, perciò sono [a] i minimi nella loro proportione di A à B; ma la proportione di B à C è come quella di A à B; i due minimi numeri dunque A, & B, [b] misurano vgualmente i due B, & C; cioè l'antecedente A misura l'antecedente B, ed il conseguente B misura il conseguente D. E perche A [c] misura se medesimo, dunque il numero A è commune misura de i due A, & B; per la qual cosa i due A, & B [d] sono numeri frà loro composti, ch'è contro all'ipotesi, mentre i numeri A, & B, furono supposti primi frà loro. Non dunque A à B è come B ad vn altro numero, ch'era da dimostrarsi.

A..... B....... C———

a 23. del 7.
b 21. del 7.
c 6. assiom. del 7.
d 14. defin. del 7.

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XVII.

Se siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, ed i loro estremi siano numeri frà di loro primi, non è possibile, che il primo al secondo sia come l'vltimo ad vn altro numero.

Siano quanti numeri si vogliano A, B, C, D, continui proportionali, i di cui estremi A, & D siano frà di loro primi. Dico che il primo A al secondo B non è come l'vltimo D ad vn altro numero. Sia, s'è possibile, A à B, come D ad vn altro numero, per essempio E. Perche i due A, & B sono primi frà loro, perciò sono [a] i minimi nella loro proportione. E perche D ad E è come A à B; i minimi dunque A, & B [b] misureranno vgualmente i due D, ed E; cioè l'antecedente A misurerà l'antecedente D, ed il conseguente B misurerà vgualmente il conseguente E; ma il numero A [c] misura se medesimo, in conseguenza il numero A è commune misura de i due estremi A, & D; e perciò i due A, & D [d] sono frà loro composti, ch'è contro all'ipotesi, mentre furono supposti frà loro primi. Non dunque A à B è come D ad vn altro numero, il che era da dimostrarsi.

A 8 B 12 C 18 D 27 E ——

a 23. del 7.
b 21. del 7.
c 6. assiom. del 7.
d 14. defin. del 7.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XVIII.

Dati due numeri, considerare se à quelli si può trouare il terzo proportionale.

Siano dati i due numeri A, & B, e si voglia sapere, se à i dati numeri A, & B, si possa ritrouare il terzo proportionale, cioè si voglia conoscere se A à B possa essere, come B ad vn altro numero. O i numeri A, & B sono, ò non sono, frà di loro primi; se sono frà di loro primi, sarà manifesto, per la 16. propositione di questo, non potersi trouare il terzo proportionale.

A 4 B 6 D 9 C 36

Se i numeri A, & B non ſono frà loro primi, multiplicando B ſe medeſimo, produca il numero C. O il numero A miſura, ò non miſura il numero C; ſuppoſto prima, che A miſuri il numero C, per il numero D. Dico che ſi può alli due A, & B, ritrouare il terzo proportionale; e che quello ſarà l'iſteſſo numero D. Perche A miſura il numero C per il numero D; perciò A, multiplicando D, [a] produrrà C; ma il numero C è prodotto dalla multiplicatione di B in ſe medeſimo; ſarà il prodotto di A in D vguale al quadrato del numero B: per la qual coſa A à B [b] ſarà come B à D; e perciò il numero D è il terzo proportionale à i due A, & B.

A 4 B 6 D 9 C 36

a 9. aſſioma del 7.

b 20. del 7.

Di nuouo, ſuppoſto, che A non miſuri il numero C. Dico che à i due A, & B non è poſſibile ritrouare il terzo proportionale. Sia ſe è poſſibile, il terzo proportionale D, in modo, che A à B ſia come B à D. Perche A à B è come B à D, i tre numeri A, B, D ſaranno continui proportionali; e perciò il prodotto fatto dalla multiplicatione degli eſtremi A, & D, ſarà vguale [c] al prodotto del medio B in ſe medeſimo; ma il prodotto di B in ſe medeſimo, per coſtruttione, è il numero C; ſarà il prodotto di A in D vguale à C; per la qual coſa il numero A miſurerà C [d] per il numero D, ch'è contro all'ipoteſi, mentre fù ſuppoſto, che A non miſura il numero C. Non dunque D è il terzo proportionale, ed in conſeguenza à i due A, & B non ſi può trouare il terzo continuo proportionale. Nell'iſteſſo modo ſi può inueſtigare, ſe à i numeri B, ed A ſi poſſa ritrouare il terzo proportionale, in modo che B ad A ſia come A ad vn altro; il che era da farſi, e dimoſtrarſi.

A 6 B 4 D —— C 16

c 20. del 7.

d 7. aſſioma del 7.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIX.

Dati tre numeri, conſiderare ſe à quelli ſi poſſa ritrouare il quarto numero proportionale.

Siano i dati tre numeri A, B, C, ò continui, ò non continui proportionali, e ſi voglia conſiderare ſe ſia poſſibile ritrouargli vn quarto numero proportionale; cioè ſe A à B può eſſere come C ad vn altro numero. Multiplichi B il numero C, e produca D, ò il numero A miſura, ò non miſura il numero D; ſuppoſto prima, che A miſuri il numero D per il numero E. Dico che à i tre A, B, C ſi può ritrouare il quarto proportionale; e che il medeſimo numero E ſarà il quarto proportionale. Perche A miſura D per il numero E, multiplicando A il numero E, [a] produrrà il numero D: ma B, multiplicando C, produce il medeſimo numero D, il prodotto dunque fatto da gli eſtremi, A, ed E, ſarà vguale al prodotto de i medij B, & C; per la qual coſa il primo A al ſecondo B [b] ſarà come il terzo C al quarto E; ſarà dunque il numero E il quarto proportionale.

A 4 B 8 C 9 E 18 D 72

a 9. aſſioma del 7.

b 19. del 7.

Di

Di nuouo, ſuppoſto che A non miſuri il numero D. Dico che non ſi può trouare il quarto proportionale alli tre A, B, C. Perche, ſe è poſſibile, ſia quello qualche numero E, in modo, che A à B ſia come C ad E; ſarà il prodotto fatto dalla multiplicatione de gli eſtremi A, ed E, [c] vguale al prodotto de i medij B, & C; ma il prodotto de i medij B, & C, per coſtruttione, è il numero D; il prodotto dunque de i due A, ed E, ſarà vguale al numero D; per la qual coſa A miſura D [d] per il numero E, ch'è contro all'ipoteſi, mentre ſi è ſuppoſto, che A non miſura D. Non dunque il numero E è il quarto proportionale, e perciò à i tre numeri A, B, C, non ſi può trouare il quarto proportionale. Nell'iſteſſo modo ſi conſidererà, ſe à i tre numeri C, B, A, ſi può trouare il quarto proportionale, in modo, che C à B, ſia come A ad vn altro, ed in tal modo s'è conſiderato ſe à tre dati numeri ſi può trouare il quarto proportionale, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

A 3 B 4 C 10 E —— D 40

c 19. del 7.

d 7. aſſiom. del 7.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

La moltitudine de i numeri primi ſupera ogni terminata moltitudine di numeri primi.

Sia qualunque terminata moltitudine di numeri primi A, B, C. Dico che i numeri primi ſuperano la moltitudine A, B, C. Si prenda il numero DE [a] in modo, che DE ſia il minimo di tutti quelli miſurati da i propoſti A, B, C, al quale s'aggiunga l'vnità EF. O il compoſto DF è numero primo, ouero è numero compoſto. Sia nel primo luogo numero primo, in tal caſo i numeri A, B, C, DF ſono numeri primi, e perciò la moltitudine de i numeri primi A, B, C, DF ſupera la moltitudine data, A, B, C.

A 2 B 3 C 5

D -------- E - F

G --------

a 38. del 7.

Di nuouo, ſuppoſto che il numero DF non ſia numero primo, e perciò qualche numero primo lo miſurerà; ſia quello il numero G. Dico che il numero primo G non è alcuno de'i propoſti A, B, C. Se G foſſe vno de i propoſti A, B, C, perche ciaſcuno de i tre A, B, C miſura il numero DE, ancora il numero G, che rappreſenta vno di quei tre, miſurerà il medeſimo numero DE. Hor ſe il numero G miſura tutto il numero DF, e miſura la parte DE, miſurerà ancora [b] il rimanente EF; cioè il numero G miſurera l'vnità EF; il tutto miſura la parte, ch'è impoſſibile. Non dunque il numero primo G è vno de i propoſti A, B, C, ed in conſeguenza la moltitudine de i numeri primi A, B, C, G ſarà maggiore della moltitudine de'propoſti A, B, C. Il medeſimo ſi dimoſtrerà ſe ſarà data qualunque altra moltitudine di numeri primi; per la qual coſa la moltitudine de i numeri primi ſupera ogni terminata moltitudine di numeri primi, ch'era da dimoſtrarſi.

b 12. aſſiom. del 7.

CO-

COROLLARIO.

Dall'antecedente propoſitione ſi caua il modo di trouare quanti numeri primi ſi vogliano d'aggiungere ad vna moltitudine terminata di numeri primi.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Se quanti numeri pari ſi vogliano ſiano compoſti inſieme, l'aggregato ſarà numero paro.

A........B......C........D
E....   F...   G....

Siano quanti numeri pari ſi vogliano AB, BC, CD, i quali, compoſti inſieme, facciano tutto il numero AD. Dico che AD è numero paro. Perche i propoſti AB, BC, CD ſono numeri pari, ogn'vno di loro [a] ſi può diuidere in due parti vguali; ſia E la metà di AB, il numero F ſia la metà di BC, ed il numero G ſia la metà di CD; ſarà AB ad E, [b] come BC ad F, e come CD à G: per la qual coſa AD, ch'è il compoſto di tutti gl'antecedenti, ad E, F, G inſieme, ch'è il compoſto de i conſeguenti, ſarà [c] come vn antecedente ad vn conſeguente, cioè ſarà come AB, ad E; mà AB è il doppio di E, in conſeguenza AD ſarà il doppio di E, F, G inſieme. Hor eſſendo E, F, G inſieme, la metà di AD, ſi può dunque da AD prenderne la metà E, F, G, e per la ſeſta definitione del ſettimo, il numero AD, compoſto de i numeri pari AB, BC, CD, è numero paro, che era da dimoſtrarſi.

a 6. defin. del 7.
b 20. defin. del 7.
c 12. del 7.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se i numeri diſpari ſono di moltitudine pari, il loro compoſto ſarà numero paro.

A...B.....C.......D.........E

Siano quanti numeri diſpari ſi vogliano AB, BC, CD, DE, di moltitudine pari, i quali, compoſti inſieme, facciano il numero AE. Dico che AE è numero paro. Perche i numeri AB, BC, CD, DE ſono numeri diſpari, ogn'vno [a] è differente dal numero paro per l'vnità; e perciò, detratta da ciaſcuno l'vnità, i rimanenti ſono numeri pari, i quali, giunti inſieme, compongono [b] vn numero paro. E perche la moltitudine delle vnità detratte è numero paro, ſtante che la moltitudine de' termini è ſuppoſta paro, ſe l'aggregato di queſte vnità, ch'è numero paro, s'aggiunge all'antecedente compoſto, che ſi diſſe eſſere numero paro, l'aggregato, cioè il numero AE, [c] ſarà numero paro, come fù propoſto dimoſtrare.

a 7. defin. del 7.
b 21. del 9.
c 21. del 9.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIII.

Se i numeri diſpari ſono di moltitudine diſpari, il loro compoſto ſarà numero diſparo.

A...B.....C..........E.D

Siano quanti numeri diſpari ſi vogliano AB, BC, CD, di moltitudine diſpari, i quali, compoſti inſieme, facciano il numero AD. Dico che AD è numero diſparo. Perche il numero diſparo è differente dal numero paro [a] per vna ſola vnità, detratta l'vnità ED dal numero diſparo CD, il rimanente CE ſarà numero paro. Perche li numeri diſpari AB, BC ſono di moltitudine pari, il loro aggregato AC [b] ſarà numero paro; al quale aggiungaſi il numero paro CE, ne verrà il compoſto AE [c] numero paro; ſe à queſto s'aggiunge l'vnità ED, il numero AD ſarà differente dal numero paro AE, per quanto è l'vnità ED; per la qual coſa il compoſto AD [d] ſarà numero diſparo, il che era da dimoſtrarſi.

a 7. defin. del 7.
b 22. del 9.
c 21. del 9.
d 7. defin. del 7.

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXIV.

Se da vn numero paro ſe ne detrae vn numero paro, il rimanente ſarà numero paro.

A......C......B

Sia il numero paro AB, dal quale ſe ne detragga il numero paro CB. Dico che l'auanzo AC ſarà numero paro. O il numero BC, detratto, è la metà del numero AB, ò è maggiore, ouero minore della metà di AB. Sia nel primo luogo CB la metà di AB; perche il numero paro CB è la metà di AB, il rimanente AC ſarà vguale à CB: mà CB è ſuppoſto numero paro, ſarà ancora AC numero paro, come fù propoſto prouare.

A......C..D...E.....B
A......D...C..E..B

Di nuouo, non ſia CB la metà di AB, mà ſia ò maggiore, ouero minore della metà. Perche i numeri AB, CB, per ipoteſi, ſono numeri pari, d'ogn'vno di eſſi [a] poſſiamo prenderne la metà: ſia dunque DB la metà di AB, ed il numero EB ſia la metà del numero CB; ſarà AB alla ſua metà BD, [b] come CB alla ſua metà BE; e permutando, ſarà AB à BC, [c] come DB à BE; e diuidendo, AC à CB [d] ſarà come DE ad EB; permutandoſi di nuouo, AC à DE [e] ſarà come CB à BE; mà CB è, per coſtruttione, il doppio di BE, ſarà AC il doppio di DE. Hor eſſendo DE la metà di AC, ſarà dunque AC [f] numero paro; per la qual coſa, detratto dal numero paro AB il numero paro CB, reſta il numero paro AC, ch'era da dimoſtrarſi.

a 6. defin. del 7.
b 20. defin. del 7.
c 13. del 7.
d Scol. alla 22. del 7.
e 13. del 7.
f 6. defin. del 7.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXV.

Se da vn numero paro ſe ne detrae vn numero diſparo, quel, che reſta, ſarà numero diſparo.

A . . . . C . D . . . . B

Sia il numero paro AB, dal quale ne ſia detratto il numero diſparo CB. Dico che il rimanente AC ſarà numero diſparo. Da CB ſe ne detragga l'vnità CD, reſterà [a] il numero paro DB. Perche dunque tutto AB, per ipoteſi, è numero paro, detrattone il numero paro DB, reſta AD [b] numero paro; dal quale, detrattane l'vnità CD, reſta AC [c] numero diſparo, che era da dimoſtrarſi.

a 7. defin. del 7.
b 24. del 9.
c 7. defin. del 7.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVI.

Se da vn numero diſparo ſe ne detrae vn numero diſparo, il rimanente ſarà numero paro.

A . . . . . . C . . . . D . B

Sia AB numero diſparo, dal quale ſe ne detragga il numero diſparo CB. Dico che il rimanente AC è numero paro. Da i numeri diſpari AB, CB, ſe ne detragga l'vnità, reſtano i due AD, CD [a] numeri pari; ſi che dal numero paro AD, detratto il numero paro CD, [b] reſta il numero paro AC, ch'era da dimoſtrarſi.

a 7. defin. del 7.
b 28. del 9.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXVII.

Se dal numero diſparo ſe ne detrae vn numero paro, il rimanente ſarà numero diſparo.

A . D . . . . . . C . . . . B

Sia il numero diſparo AB, dal quale ſe ne detragga il numero paro CB. Dico che il rimanente AC ſarà numero diſparo. Dal numero diſparo AB ſe ne detragga l'vnità AD, reſta DB [a] numero paro, dal quale detrattone il numero paro CB, [b] reſta il numero paro DC; al quale s'aggiunga l'vnità AD, ſarà AC [c] numero diſparo, come fù propoſto dimoſtrare.

a 7. defin. del 7.
b 24. del 9.
c 7. defin. del 7.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXVIII.

Se vn numero diſparo multiplica vn numero paro, quel che produce ſarà numero paro.

A . . .   B . . . .
C . . . .

Sia A numero diſparo, e B numero paro, ed A multiplicando B, ouero B, multiplicando A, produca C. Dico che il prodotto C è numero paro. Perche A, multiplicando B produce il numero C, ſarà C [a] compoſto di tante volte B, per quante vnità ſono nel numero A; e perche B è numero paro, ſarà C compoſto di tante volte il numero paro B, per quante vnità ſono nel numero A; mà il numero, compoſto di più numeri pari, [b] è numero paro; il numero C dunque, ch'è compoſto di più volte il numero paro B, ſarà numero paro, che era da dimoſtrarſi.

a 15. defin. del 7.
b 21. del 9.

COROLLARIO I.

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto, che ſe vn numero paro multiplica vn altro numero paro, il prodotto ſarà numero paro,

COROLLARIO II.

D'onde ne ſegue, che vn numero paro, multiplicando ſe medeſimo, produce numero paro.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXIX.

Se vn numero diſparo multiplica vn numero diſparo, quel, che produce, ſarà numero diſparo.

A . . . .   B . . .
C . . . .

Siano i numeri diſpari A, & B, ed A multiplicando B, ouero B, multiplicando A, produca C. Dico che C è numero diſparo. Perche A, multiplicando B, produce C, il numero C ſarà compoſto di tante volte il numero diſparo B, [a] per quante vnità ſono nel numero A; e perche tanto il numero A, quanto B, è numero diſparo, ſarà C compoſto dal numero diſparo B, per moltitudini diſpari; mà il numero, ch'è compoſto da numeri diſpari, per moltitudini diſpari, [b] è numero diſparo; il numero dunque C, ch'è compoſto dal diſparo B, per moltitudini diſpari, ſarà numero diſparo, ch'era da dimoſtrarſi.

a 15. defin. del 7.
b 29. del 9.

COROLLARIO.

Appare nell'antecedente propoſitione, che ſe vn numero diſparo multiplica ſe medeſimo, quel, che produce, ſarà numero diſparo.

SCOLIO.

Aggiungo i due ſeguenti Theoremi del Campano, che ſeruiranno come Lemmi alle dimoſtrationi ſuccedenti.

Se il numero diſparo miſura il numero paro, lo miſura per numero paro.

Sia il numero disparo A, il quale misuri il numero paro B per il numero C. Dico che C è numero paro. Perche, se il numero C sarà numero disparo, il prodotto B, fatto dalla multiplicatione de i numeri dispari A, & C, [a] sarà numero disparo, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque C è numero disparo, mà sarà numero paro.

A . . . C . . .
B . . . .

a 29. del 9.

Se il numero disparo misura vn numero disparo, lo misura per numero disparo.

Sia il numero disparo A, il quale misuri il numero disparo B per il numero C. Dico che C sarà numero disparo. Perche, se C fosse numero paro, il numero B, ch'è prodotto dalla multiplicatione del numero disparo A nel numero paro C, [a] sarebbe numero paro, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque il numero C è numero paro, ma sarà numero disparo, ch'era da dimostrarsi.

A . . . C . . . .
B . . . .

a 28. del 9.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXX.

Se il numero disparo misura vn numero paro, misurerà ancora la metà di quello.

Sia il numero paro A, misurato dal numero disparo B. Dico che il numero disparo B misurerà ancora la metà del numero paro A. Sia misurato il numero A dal numero B per il numero C, per lo Scolio antecedente, C sarà numero paro; e perciò il numero C [a] si può diuidere in due parti vguali. Hor perche B misura A per il numero C, all'incontro C misurerà A [b] per il numero B, per la qual cosa C sarà la parte di A denominata da B, come apparisce nella 3. definitione del 7. In oltre, perche C alla sua metà è come A [c] alla sua metà, permutando, sarà C ad A [d] come la metà di C alla metà del numero A; e perciò tante volte C misura A, [e] per quante volte la metà di C misura la metà di A: ma C misura tante volte A, [f] per quante vnità sono in B; perciò la metà di C misurerà tante volte la metà di A, per quante vnità sono in B; dal che B multiplicando la metà di C, [g] produce la metà di A. Per la qual cosa B misura la metà di A, come fù proposto dimostrare.

B . . . C . . .
A . . . .

a 6. defin. del 7.
b 8. assioma
c 20. defin. del 7.
d 23. del 7.
e 20. defin. del 7.
f 8. assioma del 7.
g 9. assioma del 7.

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXI.

Se il numero disparo è primo à qualche numero, sarà ancora primo al doppio di quello.

Sia il numero disparo A, il quale sia primo al numero B, il di cui doppio sia il numero C. Dico che il numero A è primo al numero C. Se il numero A non è primo al numero C, qualche numero sarà loro commune misura; sia quello il numero D. Dico

A . . . . . B . . . .
C . . . . D ——

prima

prima che D è numero disparo. Se D non è numero disparo, necessariamente sarà numero paro, il quale misurando il numero disparo A, lo misurerà per qualche numero E; e multiplicando il numero paro D per il numero E, [a] produrrà il numero paro A, ch'è contro all'ipotesi, mentre si è supposto il numero A disparo. Non dunque D è numero paro, ma è numero disparo. Hor essendo C il doppio di B, in conseguenza si può diuidere in due parti vguali, e perciò C [b] è numero paro; si è supposto C essere misurato da D, dunque il numero disparo D misura il numero C, e per l'antecedente propositione, D misurerà la metà di C, cioè misura il numero B: ma per la suppositione fatta, misura ancora il numero A; sarà dunque D commune misura de i due A, & B: per la qual cosa i due A, & B [c] sono numeri frà loro composti, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A, & C hanno commune misura, ma sono frà di loro primi, come fù proposto dimostrare.

A . . . . . B . . . .
C . . . . D ——
E ——

a 28. del 9.
b 6. defin. del 7.
c 14. defin. del 7.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXII.

I numeri, che dal due procedono per il doppio, sono solamente parimente pari.

Z 1 A 2 B 4 C 8 D 16 E 32

Dal numero due, notato A, crescano per il doppio i numeri B,C,D,E. Dico che questi sono solamente numeri parimente pari. Si esponga l'vnità Z; perche i numeri A,B,C,D,E, cominciando dall'vnità Z, successiuamente ogn'vno è doppio dell'antecedente, saranno i seguenti Z 1. A 2. B 4. C 8. D 16. E 32. nella medesima proportione, cioè nella proportione doppia; in conseguenza il numero A [a] misurerà tutti gli altri B, C, D, E, e ciascuno de i numeri B,C,D,E, [b] misurerà il maggiore di lui per qualcheduno de'medesimi A,B,C,D,E. E perche tutti sono numeri pari; perciò i numeri pari A,B,C,D,E sono misurati da i numeri pari A,B,C,D,E per li medesimi numeri pari, ed in conseguenza i numeri B,C,D,E [c] sono numeri pari.

Che poi siano solamente numeri parimente pari, è manifesto, poiche essendo i numeri A,B,C,D,E, dall'vnità continui proportionali, ed il numero A, ch'è prossimo all'vnità, è numero primo, nissun' altro numero misurerà i proposti, [d] fuor che i medesimi A,B,C,D,E, i quali, perche sono tutti numeri pari, si misureranno l'vn l'altro; cioè i minori misurano i maggiori per i medesimi numeri pari; e perciò sono solamente numeri parimente pari.

a 11. assioma del 7.
b 11. del 9.
c 8. defin. del 7.
d 13. del 9.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXIII.

Se la metà d'vn numero è disparo, quello sarà solamente numero parimente disparo.

Sia

Sia la metà del numero A disparo. Dico che il numero A è solamente parimente disparo. Che sia parimente disparo si dimostra. Perche la metà di A è numero disparo, sarà il numero A misurato dal numero due, ch'è paro, per vn numero disparo, cioè per la sua metà; e perciò A [a] è numero parimente disparo. Che sia poi solamente numero parimente disparo, lo dimostraremo in questo modo. Sia B la metà del numero A, e sia C il numero due; se A non è parimente disparo solamente, sarà ancora parimente paro; e perciò sarà misurato da qualche numero paro per numero paro. Intendasi il numero paro D, che misuri il numero A per il numero paro E; si che D, multiplicando E, [b] produrrà il numero A: ma il medesimo numero A è prodotto dalla multiplicatione del binario C nel B, il prodotto, fatto dal primo C nel quarto B, sarà vguale al prodotto fatto dal secondo D nel terzo E: per la qual cosa il primo C al secondo D [c] sarà come il terzo E al quarto B: ma il binario C misura il numero paro D; il numero dunque E misurerà il numero B; cioè il numero paro E misura il numero disparo B; ch'è impossibile. Non dunque A è numero parimente paro, ma è solamente numero parimente disparo, ch'era da dimostrarsi.

A . . . .

A . . . .
B . . . .   C . .
D ——   E ——

a 9. defin. del 7.
b 9. assioma del 7.
c 19. del 7.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXIV.

Se il numero paro non nasce dalla continua duplatione del numero due, ne la sua metà è numero disparo; quello è numero parimente paro, e parimente disparo.

Sia il numero paro A, il quale non sia prodotto dalla continua duplatione del numero due, ne la sua metà sia numero disparo. Dico che il numero A è parimente paro, ed è ancora parimente disparo. Perche la metà del numero paro A è numero paro, perciò il numero due, ch'è numero paro, misura il numero paro A per la sua metà, ch'è numero paro, e per la definitione 8. del 7, il numero A è parimente paro.

A . . . .

Di nuouo s'intenda diuiso il numero A in due parti vguali, e similmente la metà sia diuisa in due parti vguali, e la metà di questa in due vguali, e con quest'ordine, sino à tanto, che si peruiene à qualche numero disparo, non potendosi peruenire al numero due, poiche in quel caso il numero A sarebbe prodotto dalla continua duplatione del numero due; ch'è contro all'ipotesi; se si peruiene al numero disparo, sarà il numero A misurato da quel numero disparo [a] per numero paro, non potendo essere misurato per numero disparo à causa, che i numeri dispari, multiplicati frà loro, [b] producono numero disparo, e dourebbero produrre il numero paro A. Hor perche il numero paro A è misurato dal numero di-

a Scol. alla prop. 29. del 9.
b 29. del 9.

sparo

sparo per numero paro, sarà, per la definitione 9. del 7. numero parimente disparo: fù dimostrato essere ancora numero parimente paro, in conseguenza il numero A sarà parimente paro, e parimente disparo, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXV.

Se siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, e dal secondo, & vltimo, se ne detragga il primo numero; quello, che resta dal secondo, al primo, sarà come il rimanente dell'vltimo all'aggregato di tutti i termini, che l'antecedono.

A . . . . B
C . . . . K . . . . D
E . . . . F
G . . . . N . . . . . . M . . . . L . . . . H

Siano quanti numeri si vogliano continui proportionali, AB, CD, EF, GH, e tanto dal secondo CD, quanto dall'vltimo GH, se ne detragga il primo AB; cioè dal secondo CD se ne leui DK, vguale al primo AB; e dall'vltimo GH se ne leui LH vguale al primo AB. Dico che il restante CK al primo A è come il rimanente GL all'aggregato de gli antecedenti EF, CD, AB. Dal numero GH se ne detragga HM vguale al numero CD, e se ne separi HN vguale al numero EF. Perche MH è vguale al numero CD, ed HL è vguale, per ipotesi, à DK, il rimanente LM sarà vguale al rimanente KC. In oltre perche AB à CD è come CD ad EF, ed ancora come EF à GH; inuertendo, sarà GH ad EF, [a] come EF à CD, e come CD ad AB; ma NH, per costruttione, è vguale ad EF, ed il numero MH è vguale à CD, e similmente il numero LH è vguale ad AB; sarà GH ad HN come HN ad HM, e come HM ad HL; e, diuidendo, GN ad NH, [b] come NM ad MH, e come ML ad LH; per la qual cosa tutti gli antecedenti insieme GN, NM, ML, cioè tutto GL à tutti i conseguenti insieme, NH, MH, LH, [c] saranno come vno antecedente ad vn conseguente, cioè come ML ad LH: ma i notati NH, MH, LH sono vguali à i numeri EF, CD, AB, in conseguenza GL à i numeri EF, CD, AB, insieme giunti, sarà come ML ad LH. E perche ML fù dimostrato vguale à CK, ed il numero LH fù fatto vguale ad AB, sarà GL all'aggregato de i numeri EF, CD, AB, come CK al primo numero AB, il che era da dimostrarsi.

a Scol. alla 10. del 7.
b Scol. alla 22. del 7.
c 12. del 7.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXVI.

Se siano dall'vnità quanti numeri si vogliano continui proportionali nella proportione dupla, in modo, che l'aggregato di tutti sia numero primo; e questo, multipli-

cato

cato nell'vltimo, produca qualche numero, il prodotto sarà numero perfetto.

Siano dall'vnità Z quanti numeri si vogliano A,B,C,D, nella proportione dupla, ed il loro aggregato, assieme con l'vnità, sia il numero E, il quale, multiplicando D, produca il numero F. Dico che F è numero perfetto. Per quanti sono i numeri A, B, C, D, altretanti se ne prendano nella proportione dupla, cominciando da E, che siano E,G,H,K.

Z 1	A 2	B 4	C 8	D 16
E 31	G 62	H 124	K 248	F 496
	K 31			L 31
	M 31			H 465
		P ------	Q ------	

Perche i numeri A,B,C,D sono nella medesima proportione de i numeri E,G,H,K, per l'egualità, A à D [a] sarà come E à K, ed il prodotto, fatto dalla multiplicatione de gli estremi A,& K, [b] sarà vguale al prodotto de i medij D, ed E; ma E, multiplicando D, per ipotesi, produsse F, il prodotto dunque di A in K è vguale al numero F; dal che K [c] misura F per il numero A, cioè per il numero 2; e perciò F sarà il doppio del numero K, ed i numeri E,G,H,K,F sono continui proportionali. Dal secondo termine G, e dall'vltimo F, se ne leuino i numeri K, ed L, ogn'vno vguale al numero E, ch'è il primo termine, ed i restanti siano i notati M, ed H; donde i due L, ed H, insieme, saranno vguali al numero F. E perche il numero G è il doppio di E, e dal numero G si è detratto il numero K, vguale ad E; sarà il restante M vguale ad E. In oltre, perche dal secondo termine G, e dall'vltimo F, se n'è detratto vn numero vguale al primo termine E; sarà il restante M al primo termine E, [d] come il rimanente H all'aggregato de'termini E,G,H,K; ma il numero M, per quel, che si è detto, è vguale ad E; sarà il numero H vguale all'aggregato de i termini E, G, H,K; si aggiunga ad H il numero L, ed all'aggregato de i numeri E, G, H, K, s'aggiunga l'aggregato de i termini Z,A,B,C,D,ch'è vguale ad E, ouero ad L; ne vengano tutti i termini Z, A,B,C,D,E,G,H,K, giunti insieme, vguali à i due L, ed H insieme, cioè vguali al numero F. Di più, perche E, multiplicando D, produce F, perciò D misura F [e] per il numero E: ma ciascuno de i termini Z, A, B, C, [f] che sono nella proportione dupla, misura il massimo D, in conseguenza tutti i termini Z, A,B,C,D, misurano il numero F: e perche ciascun termine E,G,H,K, misura il medesimo numero F (stante che sono continuati nella proportione dupla) in conseguenza tutti i termini Z, A,B, C, D, E, G, H, K, cioè ogn'vno da per se, misura il numero F. Dico finalmente, che nissun' altro numero, fuor che gli antedetti, misura il numero F.

Lo misuri, s'è possibile, qualche altro numero P per il numero Q, multiplicando P nel numero Q, il prodotto [g] sarà il numero F: ma E, multiplicando D, produce il medesimo numero F; sarà il prodotto di E in D vguale al prodotto di P in Q. Si considerino quattro numeri, cioè il pri-

a 14. del 7.
b 19. del 7.
c 7. assioma del 7.
d 35. del 9.
e 9. assiom. del 7.
f 11. assioma del 7.
g 9. assioma del 7.

mo E, il secondo Q, il terzo P, ed il quarto D. Perche il prodotto del primo E nel quarto D è vguale al prodotto del secondo Q nel terzo P, sarà il primo E al secondo Q, [h] come il terzo P al quarto D. E perche i numeri A, B, C, D sono proportionali dall'vnità Z, ed il termine A, più prossimo all'vnità, è numero primo, nissun'altro numero misurerà il massimo D, [K] fuor che gli antecedenti A, B, C; fù supposto il numero P non essere alcuno de i numeri A, B, C; in conseguenza il numero P non misurerà il numero D: si disse, che la proportione di E à Q è come quella di P à D, non misurando P il numero D, ne meno E misurerà il numero Q: per ipotesi, E è numero primo, i due numeri dunque E, & Q [l] sono frà di loro primi, e perciò [m] sono minimi nella proportione di E à Q: mà E à Q è come P à D, i due minimi dunque E, & Q [n] misureranno vgualmente i due P, & D, cioè l'antecedente E misura l'antecedente P, ed il conseguente Q misura il conseguente D. E perche nissun'altro numero misura D, [o] fuor che i notati A, B, C; sarà il numero Q vno de i numeri A, B, C; e supposto, che sia il medesimo che B, perche i tre E, G, H sono continui proportionali nella continuata proportione di B,C,D, per l'egualità, sarà B à D [p] come E ad H; ed il prodotto de gli estremi B, & H, [q] sarà vguale al prodotto de i medij D, ed E: mà il prodotto di D in E, per ipotesi, è vguale al prodotto di P in Q; sarà il prodotto di P in Q vguale al prodotto di B in H; e la proportione di Q à B [r] sarà come quella di H à P; fù supposto Q il medesimo, che B, sarà dunque H il medesimo che P; il che è contro alla suppositione fatta, mentre fù supposto P diuerso da tutti i numeri A, B, C, D, E, G, H, K. Non dunque altro numero misura il numero F, fuor che l'vnità, ed i numeri A, B, C, D, E, G, H, K, e perche questi, per quel, che si è dimostrato, tutti misurano il numero F, e, giunti insieme, sono vguali al medesimo numero F, per la definitione 22. del settimo, il numero F sarà numero perfetto, ch'era da dimostrarsi.

h 19. del 7.
K 13. del 9.
l 31. del 7.
m 23. del 7.
n 21. del 7.
o 13. del 9.
p 14. del 7.
q 19. del 7.
r 19. del 7.

S C O L I O.

Per facilitare le cose à venire aggiungo qui li seguenti due Theoremi.

Frà l'vnità, ed il numero 2, e frà l'vnità, ed il numero 3; come ancora frà l'vnità, ed il numero 5, e frà i numeri, che differiscono d'vna sola vnità, non cade medio proportionale.

A . C --- B . .

Cada prima, se è possibile, frà l'vnità A, ed il numero 2, notato B, il medio proportionale C; perche C è medio proportionale frà li due A, & B, sarà C maggiore di A, e minore di B; perche se C fosse vguale ad A, essendo A à C come C à B, e l'vnità A è posta vguale à C, sarebbe C vguale à B, per la qual cosa A sarebbe vguale à B, ch'è contro all'ipotesi: nell'istesso modo si dimostrarà che C non è vguale à B in conseguenza C sarà minore di B, e maggiore di A: e perche la minima parte del numero è l'vnità, essendo C minore di B, ed il numero B costa di due sole vnità, il medio C non sarà maggiore dell'vnità, e perciò C sarà vguale ad A, ch'è contro à quello, che si è dimostrato. In oltre essendo C maggiore di A, al minimo sarà C due vnità, nel qual caso sarà vguale à B, ch'è contro à quello, che si è dimostrato; non dunque C è maggiore di A, ne meno è minore di B, come ancora non è vguale ad A, ne vguale AB, ed in conseguenza non è medio frà li due A & B, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

A. C--- B..

Di nuouo sia esposta l'vnità A, ed il numero 3 notato B, e cada frà essi, s'è possibile, il medio C: si dimostri, come prima si fece, che il medio C non è vguale ad A, ne meno è vguale al numero B, e perciò sarà maggiore di A, e minore di B; hor essendo C minore di B, al più costarà di due vnità, e similmente essendo maggiore di A, al minimo C costarà di due vnità, e perche il numero 2 è numero paro, perciò il medio C sarà numero paro; hor essendo C medio proportionale frà li due A & B, sarà A à C come C à B; mà l'vnità A misura il numero C [a] per l'istesso numero C, in conseguenza il numero C [b] misura il numero B per l'istesso numero C, dal che il numero paro misura il numero disparo, ch'è impossibile, non dunque C è maggiore di A, ne minore di B, ne meno è vguale ad A, ouero à B, e perciò non è medio frà li due A & B.

A. C--- B...

a 5. assioma del 7.
b 20. defin. del 7.

In oltre sia esposta l'vnità A, ed il numero 5 notato B, e sia C, s'è possibile, medio frà li due A & B, si dimostri come prima si fece, che C non è vguale ad A, ne meno è vguale à B, mà C è maggiore di A, e minore di B; sia prima C minore di B per vna sola vnità; perche B è numero disparo sarà C numero paro, e perche A à C è come C à B, e l'vnità A [c] misura C, perciò il numero paro C misurerà il numero disparo B, ch'è impossibile; non dunque C è minore di B d'vna sola vnità. Sia di nuouo C minore di B di 2 vnità, cioè C sia numero ternario, se da B, ch'è 5 vnità, se ne detrae il ternario C, e le due vnità che restano si detraggono dal ternario C, resta vna sola vnità, e perciò li due C & B [d] sono numeri primi: e perche A à C è come C à B, e l'vnità A misura il numero C, in conseguenza il numero primo C misurerà il numero primo B; ch'è impossibile, non dunque C è minore di B di due vnità. Sia dunque C minore di B di tre vnità, cioè sia 2, ch'è numero paro; perche A à C è come C à B, e l'vnità A misura il numero C, in conseguenza il numero paro C misurerà il numero disparo B, ch'è impossibile, non dunque C è minore di B di tre vnità, ne meno è minore di B di quattro vnità, perche sarebbe vguale ad A; per la qual cosa C non è medio proportionale frà li due A & B ch'era da dimostrarsi nel terzo luogo.

A. C--- B.....

c 5. assioma del 7.
d 1. del 7.

Finalmente siano li numeri A & B differenti per vna sola vnità in modo, che A sia minore di B. Dico che frà essi non cade medio proportionale. Sia, s'è possibile, C medio proportionale, frà li due A & B. Dico prima che C non è vguale ad A ne meno è vguale al numero B, perche se fosse vguale ad A, essendo A à C come C à B, sarebbe C vguale à B, mà è ancora vguale ad A, in conseguenza A sarà vguale à B, ch'è contro all'ipotesi.

A... C--- B....

Nell'istesso modo si dimostrerà, che C non è vguale à B; per la qual cosa C è maggiore di A è minore di B, e perche B supera A per vna sola vnità, essendo C maggiore di A, al minimo sarà vguale à B, ch'è contro à quel che si è dimostrato; similmente essendo C minore di B al minimo sarà vguale ad A, ch'è contro à quel che si è dimostrato; non dunque C è maggiore di A, ne meno è minore di B, come ancora non è vguale ad A; ne vguale à B, per la qual cosa non è medio frà li due A & B, ch'era da dimostrarsi.

I numeri, che sono nella dupla, ò tripla, ò quintupla proportione, ouero differiscono per vna sola vnità, non sono come numero quadrato à numero quadrato.

Siano prima i numeri A & B nella proportione dupla, si trouino [a] i minimi nella proportione di A à B, che siano C & D. Perche A & B sono nella proportione dupla, i minimi saranno l'vnità, ed il numero 2, frà quali per l'antecedente dimostratione, non cade medio proportionale, e perciò [b] non sono piani simili, per la qual cosa C à D [c] non è come numero quadrato à numero quadrato, mà C à D è come A à B, non essendo C à D come numero quadrato à numero quadrato, ne meno A à B è come numero quadrato à numero quadrato.

A.... B........
C. D..

a 2. del 8.
b 18. del 8.
c 26. del 8.

Di nuouo siano i numeri A, & B nella proportione tripla. Dico che A à B non è come numero quadrato à numero quadrato. Si trouino i minimi numeri [d] nella proportione di A à B, che siano C, & D, perche A, & B, sono nella proportione tripla, i minimi, cioè C, & D saranno l'vnità, ed il numero ternario, frà quali per l'antecedente dimostratione non cade medio proportionale, e perciò [e] non sono piani simili, e la proportione di C à D [f] non sarà come numero quadrato à numero quadrato; mà C à D è come A à B, non essendo C à D come numero quadrato à numero quadrato, ne meno A à B è come numero quadrato à numero quadrato. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i numeri nella quintupla proportione non sono come numero quadrato à numero quadrato.

A.. B......
C. D...

d 2. del 8.
e 18. del 8.
f 26. del 8.

Finalmente siano i numeri A, & B, differenti solamente per vna sola vnità. Dico che non sono come numero quadrato à numero quadrato. Perche i numeri A, & B, differiscono per vna sola vnità, per l'antecedente dimostratione non cade frà loro alcun medio proportionale, e perciò [g] non sono piani simili, ne meno sono [h] come numero quadrato à numero quadrato, ch'era da dimostrarsi.

A... B....

g 18. del 8.
h 26. del 8.

Fine del Nono Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO DA VITALE GIORDANI

ELEMENTO DECIMO.

DEFINITIONI.

I.

Commensurabili si chiamano le grandezze, quando sono misurate da vna medesima misura.

I I.

Incommensurabili si dicono quelle grandezze, delle quali non si troua alcuna misura commune.

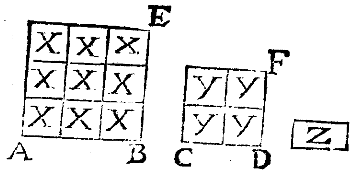
I I I.

Le linee rette sono commensurabili in potenza, quando il medesimo spatio misura i loro quadrati,

OGNI quadrato si chiama potenza del suo lato, e perciò, nelle cose à venire, quando si dirà la potenza d'vna retta linea, intenderemo l'istesso, come se dicessimo il quadrato di quella retta linea; e se per essempio, si dirà, che delle rette linee A, & B, in potenza l'vna è dupla all'altra, non si deue intendere la retta linea A esser dupla alla retta linea B, ma che la potenza della retta linea A è dupla alla potenza della retta linea B, cioè, che il quadrato della retta linea A, e duplo al quadrato della retta linea B. Ed il simile s'intenderà se si dirà tripla, quadrupla &c. supposto questo. Spiega Euclide nella prima definitione, che cosa dobbiamo intendere per quantità commensurabili, e dice, che le grandezze all'hora si chiamano commensurabili, quando sono misurate da vna medesima quantità, e

non importa, che non siano misurate vgualmente, ma basta, che ciascuna sia misurata dalla medesima quantità in modo, che non soprauanzi cosa alcuna; e quella quantità, che misura le grandezze commensurabili, si chiama commune misura. E nota, che in questa prima definitione Euclide parla delle quantità in genere, senza restringersi à particolare alcuno; si che volendola applicare à qualche particolare, come per essempio alle rette linee, si può dire, che le rette linee sono commensurabili in lunghezza, quando sono misurate da vna medesima retta linea; ed i piani sono ancora commensurabili, quando vn medesimo spatio gli misura: e con modo simile, questa prima definitione si può applicare à tutti i particolari. Spiega poi nella seconda definitione, quali sono le quantità incommensurabili, e, tenendo la medesima generalità in questa, che nella prima, chiama grandezze incommensurabili quelle, delle quali non si troua niuna misura commune; e questa ancora, come si è detto della prima definitione, si può applicare à tutti i particolari, chiamando le rette linee incommensurabili in lunghezza, quando nissuna retta linea le misura; ed i piani ancora si dicono incommensurabili, quando non si troua spatio alcuno, che gli misura: e con modo simile si può fare l'applicatione à tutti gli altri generi di quantità.

Premessa la cognitione delle quantità commensurabili, ed incommensurabili, così in genere, passa Euclide al particolare, e con la terza definitione ci spiega, che cosa doueremo intendere, quando si dirà, rette linee commensurabili in potenza; e dice, che all'hora le rette linee si diranno commensurabili in potenza, quando i loro quadrati saranno misurati da vn medesimo spatio; come per essempio. Siano esposte le rette linee AB, CD, i di cui quadrati, ò vogliamo dire potenze, siano AE, CF, le quali si concepiscano di tali grandezze, che diuisa AE ne gli spatij vguali, notati X, e diuisa CF ne gli spatij vguali, notati Y, ciascuno de gli spatij Y sia vguale à ciascuno de gli spatij X; s'intenda poi vn altro piano come Z, vguale ad vno de gli spatij X, ouero Y; in tal caso lo spatio Z misurerà giustamente il quadrato AE, senza che resti cosa alcuna; ed il medesimo piano Z misurerà giustamente il quadrato CF, senza che resti cosa alcuna: dal che il piano Z sarà commune misura delle due potenze AE, CF, e per la prima definitione, le due potenze AE, CF, saranno commensurabili; e secondo tal ipotesi le rette linee AB, CD, che sono lati di quelle potenze commensurabili, si dicono rette linee commensurabili in potenza, di modo che, ò che le rette linee siano, ò che non siano commensurabili in lunghezza, quando i loro quadrati hanno vna commune misura, quelle rette linee si dicono commensurabili in potenza. E notisi, che se i quadrati, ò potenze AE, CF sono commensurabili, ed i loro lati AB, CD sono ancora commensurabili in lunghezza, le medesime rette AB, CD, si chiameranno commensurabili in lunghezza, e si chiameranno ancora commensurabili in potenza; ma se i quadrati AE, CF sono commensurabili, ed i loro lati AB, CD non sono commensurabili in lunghezza; all'hora le rette AB, CD si dicono solamente commensurabili in potenza.



I V.

Le rette linee si dicono incommensurabili in potenza, quando non si troua spatio alcuno, che misura i loro quadrati.

Quando le rette linee sono commensurabili in lunghezza, sono ancora commensurabili in potenza, come si dimostrerà à suo luogo; e quando le rette linee non sono commensurabili in lunghezza, può essere, che siano commensurabili in potenza; e può essere, che non siano; cioè può essere, che qualche spatio misuri i loro quadrati, e può essere, che mai si troui spatio alcuno, che li misuri: se qualche spatio misura i loro quadrati, quelle rette linee si dicono commensurabili in potenza, come si disse nell'antecedente definitione; ma se in nissun modo si troua spatio, che misuri i detti quadrati, quelle rette linee si dicono essere incommensurabili in potenza: ed in questo caso saranno incommensurabili in potenza, e saranno ancora incommensurabili in lunghezza, di modo, che, si come, quando due rette linee sono commensurabili in lunghezza, sono ancora commensurabili in potenza, così, quando sono incommensurabili in potenza, sono ancora incommensurabili in lunghezza; il che tutto si dimostrerà à suo luogo.

V.

La retta linea terminata, rispetto alla quale tutte le infinite altre rette linee terminate sono ò commensurabili, ouero incommensurabili, delle quali alcune sono commensurabili in lunghezza, ed in potenza, altre sono solamente commensurabili in potenza, ed altre sono incommensurabili in lunghezza, ed in potenza, si chiama Rationale.

Acciochè la spiegatione di questa definitione riesca più chiara, la poniamo dopo le seguenti due definitioni.

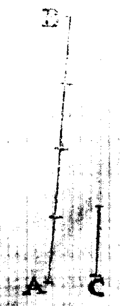
V I.

Tutte le altre rette linee, che sono à questa commensurabili in lunghezza, e potenza, ouero commensurabili solamente in potenza, si dicono Rationali.

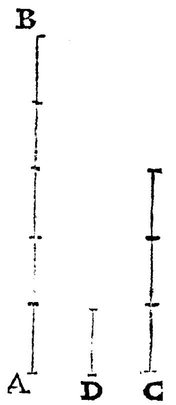
V I I.

Tutte quelle rette linee poi, che à questa sono incommensurabili, si chiamano Irrationali.

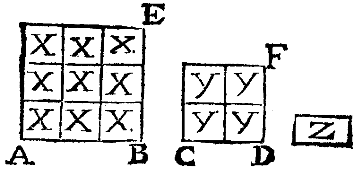
In tre generi diuide Euclide l'infinita moltitudine delle rette linee, à causa che tre casi solamente si danno in Natura, che riguardano la loro commensurabilità, ed incommensurabilità; cioè, ò le rette linee sono commensurabili in lunghezza, ed in questo caso sono necessariamente commensurabili ancora in potenza, come à suo luogo si dimostrerà; ò non sono commensurabili in potenza, ed in quest'altro caso necessariamente ne meno sono commensurabili in lunghezza, come similmente si dimostrerà in questo decimo Elemento; ouero non sono commensurabili in lunghezza, ma sono commensurabili in potenza. Se non sono commensurabili in potenza (per il che, come si è detto, ne meno sono commensurabili in lunghezza) chiama le rette linee, secondo questo genere, Irrationali. Se le rette linee sono commensurabili in lunghezza (perilche sono ancora commensurabili in potenza) secondo quest'altro genere, le chiama Rationali. E finalmente, quando le rette linee non sono commensurabili in lunghezza, ma sono commensurabili in potenza, le chiama similmente Rationali. Due generi dunque di rette linee rationali si considerano in Natura, ed vn solo d'Irrationali, cioè. Quelle rette linee, delle quali in riguardo à qualche commune misura, se ne possono esprimere le parti, ch'Euclide chiama commensurabili in lunghezza, costituiscono il primo genere delle rette linee Rationali. Quelle rette linee poi, delle quali in riguardo à qualche commune misura, non se ne possono esprimere le parti, per il che si dicono incommensurabili, ò sono, ò non sono commensurabili in potenza; se sono commensurabili in potenza, cioè che delle loro potenze se ne possano in riguardo à qualche commune misura esprimere le parti, queste costituiscono l'altro genere di rette linee, che similmente si dicono Rationali. E se ne meno sono commensurabili in potenza, cioè, che ne in lunghezza, ne in potenza se ne possano esprimere le parti, in riguardo à qualche commune misura, quelle costituiscono il terzo genere, e si dicono Irrationali. E da quì si caua, che qualunque retta linea, considerata sola, senza comparatione ad altra retta linea, quella non è ne rationale, ne meno irrationale: ma se sarà comparata à qualche altra retta linea, all'hora, secondo le conditioni spiegate di sopra, ò sarà rationale, ouero irrationale. Per essempio, la retta AB, considerata sola, senz'altra comparatione, non è rationale, ne irrationale; ma comparata à qualche altra retta C, se la retta C misura giustamente la retta AB, diuisa AB nelle parti vguali alla retta C, verremo in cognitione di quante parti sono in AB vguali à C; e così potremo esprimere la moltitudine delle parti, che sono in AB, vguali alla retta C; ed in tal caso la retta AB è commensurabile in lunghezza, rispetto alla misura C, cioè la retta linea AB è quella, della quale se ne possono esprimere le parti, rispetto alla misura C; ed in questo caso la retta linea AB si chiama rationale. Se poi la retta linea C non misura giustamente la retta AB, ma si troua qualche retta D, la



quale è commune misura delle due AB, & C, quelle, per la prima definitione, sono commensurabili in lunghezza, e però si diuidano le rette AB, & C, nelle parti vguali alla retta D, ed haueremo cognite le parti della retta AB, rispetto alla misura D; e si sapranno ancora le parti della retta C, rispetto alla medesima retta D; e, per quel, che si è detto, le rette AB, & C, delle quali sono cognite le parti, rispetto alla commune misura D, si dicono similmente Rationali; e queste sono quelle, che costituiscono il primo genere delle rette Rationali.

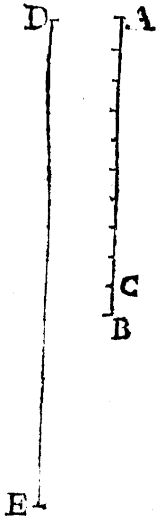


Di nuouo, siano le rette AB, CD, frà le quali non cada alcuna misura commune, quelle saranno incommensurabili in lunghezza, ed i loro quadrati siano AE, CF; e supposto, che lo spatio Z sia commune misura de i quadrati AE, CF, saranno le rette AB, CD, per la terza definitione, commensurabili in potenza. S'intendano diuisi i quadrati AE, CF, ne gli spatij X, ed Y, ogn'vno vguale allo spatio Z, ed haueremo cognite le parti delle potenze AE, CF, rispetto alla misura Z; e per quel, che si è detto, le rette AB, CD sono ancora rationali; e queste costituiscono il secondo genere delle rette Rationali. Quelle rette poi, che non hanno commune misura, ne in lunghezza, ne in potenza, costituiscono l'altro genere, e si dicono Irrationali.



Finalmente, perche qualunque retta linea si può diuidere in quante parti vguali si vuole, perciò ogni retta linea si può stabilire come grandezza cognita, cioè come misura, ò norma, alla quale si possono comparare tutte le infinite altre rette linee. Per essempio, sia esposta qualunque retta linea AB, la quale potendosi à nostro arbitrio diuidere in quante parti vguali vogliamo, la possiamo ancora stabilire come grandezza cognita, ed esprimerne quelle parti, nelle quali l'haueremo diuisa, ò altre, nelle quali si può sempre diuidere: e, comparando à questa tutte le infinite altre rette linee, molte di quelle saranno à questa commensurabili in lunghezza, e per quel, che si è detto, saranno ancora commensurabili in potenza: altre saranno solamente commensurabili in potenza; ed altre saranno incommensurabili in lunghezza, ed ancora in potenza; e questa retta linea AB, ò altra, che si può porre in suo luogo, stabilita come quantità à noi cognita, alla quale saranno comparate tutte le altre, è quella, che Euclide nella definitione quinta di questo, chiama Rationale; alla quale comparate le altre, quelle, che à questa saranno commensurabili in lunghezza, e potenza; ouero saranno solamente commensurabili in potenza, le chiama nella 6. defin. Rationali. Le altre, che à questa saranno incommensurabili in lunghezza, e potenza, nella 7. defin. le chiama Irrationali.

Per più chiara spiegatione deuesi riflettere, che, douendosi misurare qualche spatio proposto, questo, come è vso commune, non si fà altrimente, che con l'aiuto di qualche cognita misura, diuisa in palmi, piedi, e simili: e perche questi palmi, ò piedi, non in tutti i paesi sono vguali, ma sono di differenti lunghezze, è manifesto, che le diuisioni di tali misure sono arbitrarie; e non solo le diuisioni sono arbitrarie, ma sono ancora arbitrarij i nomi delle medesime misure: poiche in alcuni luoghi le loro misure le chiamano Braccia, Cubiti &c. ed in altri le chiamano Canne, Catene, Pertiche, Passi, e simili. Hor, non douendo Euclide restringersi in vna delle antedette, ò altre misure particolari, per parlare in genere d'ogni misura, ò che si vsi, ò che possa vsarsi, intende diuisa qualunque retta in quante parti vguali si voglia, in modo, che questa retta possa rappresentare tutte le misure, che si vsano, e quante altre ad arbitrio dell'huomo se ne possono vsare; e questa è quella retta, che chiama Rationale, di modo, che sotto questa voce di Rationale dobbiamo intendere, non solo tutte le misure, che attualmente si vsano in ogni paese, ma quelle ancora, che à nostro arbitrio si possono vsare. E perche, quando con qualche misura vsata si misura qualche spatio, non si fà altro, se non che la comparatione frà la cosa misurata, e quella con la quale si misura; come per essempio se fosse proposta qualunque misura AB, ò che sia pertica, ò canna, ò catena, ò braccio, ò passo &c. che sempre la chiameremo Rationale, e con questa si hauesse à misurare la lunghezza DE; questa operatione non è altro, se non che vedere quante volte DE contiene la misura AB; ouero quante parti è DE di quelle, che sono in AB; il che è vna semplice comparatione, che si fà trà la lunghezza DE, e la proposta misura AB. Quindi è, ch'Euclide chiama Rationale quella linea, alla quale sono comparate tutte le altre, ed è l'istesso che dire, con la quale si misurano tutte le altre.



Notisi, che quando si è stabilita la linea, che chiamiamo Rationale, come AB, ò altra, la quale arbitrariamente è diuisa in parti vguali, ogn'vna di quelle vguali parti, come BC, per essere singolare, si chiama Vnità. E perche, come s'è detto, la Rationale AB è vna certa misura determinata, alla quale si comparano tutte le altre rette; perciò ogn'vna delle parti vguali, che sono in AB, si considera come vnità determinata; anzi che nelle comparationi da farsi frà la Rationale, e le altre grandezze, basta la cognitione della sola vnità CB; poco importando, che la Rationale consti di vna sola vnità, ò di più vnità, vguali à DB; atteso che la Rationale si può fare lunga, ò breue, quanto si vuole, ed è la medesima cosa dire, che DE consti per essempio, di mille di quelle parti, che in AB sono dieci; quanto è dire, che la retta DE consti di mille vnità, ò parti vguali à CB.

V I I I.

Il quadrato della ſudetta Rationale, alla quale ſi comparano tutte le altre, ſi chiama ancora Rationale.

I X.

Tutti i piani, che ſono commenſurabili all'antedetto quadrato, ſi dicono ſimilmente Rationali.

X.

E quei piani, che al medeſimo ſudetto quadrato ſono incommenſurabili, ſi dicono Irrationali.

X I.

Le rette linee poi, i di cui quadrati ſono incommenſurabili all'iſteſſo ſudetto quadrato, ſi chiamano Irrationali: come ancora quelle rette, i di cui quadrati ſono vguali à i piani, che ſono incommenſurabili à quel medeſimo ſudetto quadrato, ſi dicono parimente incommenſurabili.

Per eſſempio ſia AB quella retta, ſtabilita come cognita, alla quale ſi habbiano à comparare tutte le altre; ſarà AB, come ſi è detto, quella retta, che chiamiamo Rationale, il di cui quadrato, come vuole Euclide nell' ottaua definitione, ſi chiamerà Rationale: e

tutti i piani che ſaranno commenſurabili al quadrato di AB, per quelche ſpiega nella 9. definitione, ſi chiameranno ſimilmente Rationali. Quei piani poi che ſaranno incommenſurabili al quadrato di AB, ſecondo il ſenſo della decima definitione, ſi chiameranno Irrationali. Finalmente le rette, i di cui quadrati ſono incommenſurabili al quadrato di AB, ſi dicono irrationali alla retta AB; e quelle rette, i di cui quadrati ſono vguali à quei piani, che ſono incommenſurabili al quadrato di AB, ſecondo il tenore dell'11. definitione, ſi dicono Irrationali alla retta AB.

Aggiungo, come fà il P. Clauio, vn ſolo poſtulato con alcuni Aſſiomi, de' quali ſi ſerue Euclide in queſto Elemento.

P O S T V L A T O.

Si prende per conceſſo, che di due ineguali grandezze del medeſimo genere, la minore ſi poſſa tante volte multiplicare, finche ne riſulti vna grandezza, che ſuperi la maggiore.

Perche ogni grandezza terminata ſi può accreſcere in infinito, percio, multiplicandoſi vna propoſta grandezza più, e più volte, finalmente ſi peruerrà ad vna grandezza, maggiore di qualunque altra terminata grandezza del medeſimo genere.

A S S I O M I.

I.

Quella grandezza, che miſura molte altre grandezze, miſurerà ancora il compoſto di quelle.

I I.

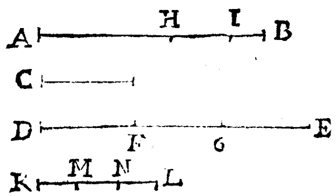
Se vna grandezza miſura vn altra grandezza, miſurerà ancora la miſurata da quella.

I I I.

Se vna grandezza miſura tutta vn'altra grandezza, e miſura vna parte di quella, miſurerà ancora il rimanente.

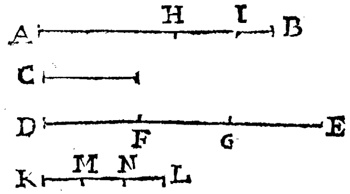
THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se di due grandezze ineguali dalla maggiore ſe ne detrae più della metà, e dal rimanente ſe ne detrae più della metà, e di nuouo da quel che reſta, ſe ne detrae più della metà, e queſto ſi faccia ſempre, finalmente reſtarà vna grandezza minore dell'altra.



Siano propoſte due grandezze ineguali, come AB maggiore, & C minore. Dico che, ſe dalla maggiore AB ſe ne detrae più della metà, e dal rimanente ſe ne detrae ancora più della metà, e di nuouo da quel, che reſta, ſe ne detrae più della metà, e queſto ſi faccia ſempre, finalmente reſterà vna grandezza minore della data C. Si prenda DE multiplice di C in modo, che la grandezza DE ſia proſſima maggiore a di AB, e ſi diuida nelle parti vguali à C, che ſiano DF, FG, GE; ſi detragga dalla grandezza AB più della metà, che ſia A H; e dal rimanente HB ſe ne detragga ſimilmente più della metà, che ſia HI: e queſta detrattione ſi faccia tante volte, in modo, che le parti AH, HI, IB ſiano tante, per quante ſono le parti in DE. Dico che l'vltimo auanzo IB è minore di C. a

Si prenda KL multiplice di IB, come DE è multiplice di C, e ſi diuida KL nelle parti vguali ad IB, che ſiano KM, MN, NL. Perche AH, per coſtruttione, ſupera la metà di AB, ſarà AH maggiore di HB; e molto più della parte IB: ma IB è vguale à KM, ſarà AH maggiore di KM. Similmẽte perche HI ſupera la metà di HB, ſarà HI maggiore di IB; ma IB è vguale ad MN, ſarà HI



maggiore di MN; e tutta AI ſarà maggiore di tutta la grandezza KN: e perche IB è vguale ad NL, ſarà tutta AB maggiore di KL: per coſtruttione DE è maggiore di AB, ſarà DE maggiore di KL.

Finalmente perche DE, per coſtruttione, è multiplice di C, come LK è multiplice di IB, eſſendo C vguale ad EG, e la grandezza IB vguale ad LN, ſarà DE multiplice di EG, come KL è multiplice di LN: dal che
a 15. del 5. ſarà ED ad LK, a come GE ad LN: ma DE è dimoſtrata maggiore di
c 20. defin. del 7. LK, ſarà GE maggiore di LN, cioè LN minore di GE; e perche LN è vguale ad IB, e la grandezza EG è vguale à C, ſarà IB minore di C, come fù propoſto dimoſtrare.

S C O L I O.

Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che ſe da AB ſe ne detrae la metà, e da quel che reſta ſe ne detrae la metà, e queſto ſi farà ſempre, finalmente l'vltimo auanzo, come IB, ſarà minore di C. Poiche, ſuppoſta la medeſima coſtruttione, eſſendo AH la metà di AB, ſarà AH maggiore di IB, cioè maggiore di KM; & eſſendo HI la metà di HB, ſarà HI vguale ad IB, dal che HB ſarà vguale ad ML, e tutta AB maggiore di KL: ed, argumentandoſi come prima ſi fece, ſi dimoſtrerà che IB è minore di C.

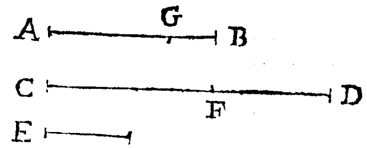
THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se di due grandezze ineguali ſi detrae ſempre la minore, quanto ſi può, dalla maggiore, con reciproca detrattione; ſe di queſta continua detrattione, fatta reciprocamente, mai l'auanzo miſuri l'antecedente; quelle grandezze ſaranno incommenſurabili.

Siano le grandezze ineguali AB, CD, e dalla maggiore CD ſe ne detragga quanto ſi può la minore AB; ed il rimanente ſi detragga, quanto ſi può da AB, e quel che reſta ſi detragga, quanto ſi può, da FD, e con queſt'ordine ſi proceda ſempre; ſe in queſta continua detrattione fatta reciprocamente, mai l'auanzo miſura la precedente. Dico che le grandezze AB, CD ſono incommenſurabili. Se non ſono incommenſurabili, quelle ſaranno miſurate da qualche miſura commune,

che

che ſia E, la quale ò ſarà vguale, ò minore di AB. Sia dunque detratta da CD, quanto ſi può, la minore AB, e quel, che reſta, ſia FD; ſarà FD minore di AB: e perche AB miſura CF, ſarà CF ò vguale, ouero maggiore di AB; per la qual coſa CF ſarà maggiore di FD; e perciò CF ſarà maggiore della metà di CD. Similmente da AB ſe ne detragga, quãto ſi può, l'auanzo FD, e quel, che reſta, ſia GB; ſarà GB minore di FD. E perche FD miſura AG, ſarà AG maggiore di FD; e ſarà molto maggiore di GB; per la qual coſa AG ſarà maggiore della metà di AB. Di nuouo da FD ſe ne detragga, quanto ſi può, GB, e con queſt'ordine ſi proceda, fin à tanto, che reſti da AB, a ouero CD, vna grandezza minore di E. a 1. del 10.



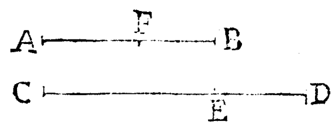
Suppoſto, che ſia fatta queſta continua detrattione, e ſia il rimanente GB, minore della grandezza E. Perche E miſura, per ſuppoſitione, la quantità AB, e la medeſima AB, per coſtruttione miſura CF, in conſeguenza la quantità E miſurerà b CF: ma, per la ſuppoſitione fatta, miſu- b 2. aſſioma del 10.
ra tutta CD; la quantità dunque E miſurerà ancora c il rimanente FD; c 3. aſſioma del 10.
ma l'auanzo FD, per coſtruttione, miſura AG, perciò la quantità E d miſurerà AG. E perche la medeſima E miſura tutta AB; la quantità E dun- d 2. aſſioma del 10.
que e miſurerà il rimanente GB; fù ſuppoſta GB minore di E, la maggiore miſurerà la minore, ch'è impoſſibile. Non dunque la grandezza E è e 3. aſſioma del 10.
commune miſura delle due AB, CD, ma le due AB, CD ſono incommenſurabili, che era da dimoſtrarſi.

S C O L I O.

Faremo la conuerſa all'antecedente propoſitione col P. Clauio, nel ſeguente modo.

Se due grandezze ſaranno incommenſurabili, detratta ſempre, quanto ſi può, la minore dalla maggiore, con reciproca detrattione, mai l'auanzo miſurerà la precedente.

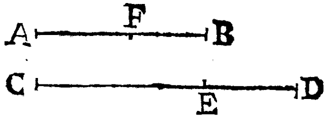
Siano le grandezze incommenſurabili AB, CD, e dalla maggiore CD ſe ne detragga, quanto ſi può, la minore AB, e quel, che reſta, ſia ED, ſarà ED minore di AB. Similmente da AB ſe ne detragga, quanto ſi può, l'auanzo ED, e quel, che reſta, ſia FB; ſarà FB minore di ED. E con queſt'ordine ſi proceda, ſottraendo ſempre, quanto ſi può, la minore dalla maggiore alternatiuamente. Dico che mai reſtarà auanzo, che miſuri l'antecedente.



Dall'auanzo FB ſia miſurato, ſe è poſſibile, l'antecedente ED. Perche FB miſura ED, e, per ipoteſi, ED miſura AF, in conſeguenza FB a miſurerà a 2 aſſioma del 10.

b 1. assiom. del 10.
c 2. assioma del 10.
d 1. assioma del 10.

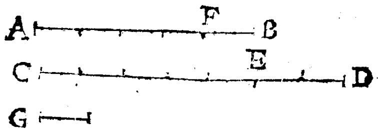
AF; ma FB misura se medesima, misurerà ancora [b] il tutto AB. E perche AB misura CE, perciò FB [c] misurerà CE, ma per la fatta suppositione, FB misura ED, misurando le due CE, ED, [d] misurerà ancora il tutto CD; ma si è dimostrato, che FB misura tutta AB; sarà dunque FB commune misura delle due AB, CD: per la qual cosa le due AB, CD sono commensurabili, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque l'auanzo FB misura la precedente ED, come fù proposto dimostrare.



PROBLEMA I. PROPOSITIONE III.

Date due grandezze commensurabili, ritrouare la loro massima commune misura.

Siano le due date grandezze commensurabili AB, CD, e si habbia à ritrouare la loro massima commune misura. Dalla maggiore CD se ne detragga, quanto si può, la minore AB, e quel, che resta, sia ED; sarà ED minore di AB. Poi da AB se ne detragga, quanto si può, l'auanzo ED, e quel, che resta, sia FB; sarà FB minore di ED. E similmente da ED se ne detragga FB, e con quest'ordine si proceda fino à tanto, che qualche auanzo misuri l'auanzo precedente, il che non può mancare; perche, se mai si trouerà auanzo, che misuri la precedente, per la seconda propos. di questo, le grandezze AB, CD saranno incommensurabili, ch'è contro all'ipotesi. Sia dunque FB quell'auanzo, che misuri l'auanzo precedente ED. Dico che FB è la massima commune misura delle proposte grandezze AB, CD. Perche FB misura ED, e per costruttione ED misura AF; l'auanzo dunque FB [a] misurerà AF; ma FB misura se medesimo, in conseguenza FB [b] misurerà tutta AB; per costruttione AB misura CE, dunque FB [c] misurerà CE; ma FB misura ancora ED, misurando le due CE, ED, [d] misurerà parimente tutta CD: ma, per quel, che si è dimostrato, FB misura AB, sarà FB commune misura delle due AB, CD.

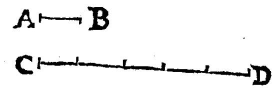


a 2. assioma del 10.
b 1. assiom del 10.
c 2. assioma del 10.
d 1. assioma del 10.

Dico finalmente, che FB è la massima di tutte le altre, che misurano le grandezze AB, CD. Se FB non è la massima, qualche altra grandezza sarà la massima commune misura delle due AB, CD; sia dunque quella la notata G, la quale, per esser massima sarà maggiore di FB. Perche G misura AB, e per costruttione, AB misura CE, perciò G [a] misurerà CE; mà per suppositione G misura tutta CD, in conseguenza [b] misurerà ancora il rimanente ED; e perche ED misura AF, dunque G [c] misurerà AF; mà G, per suppositione, misura tutta AB, misurando il tutto AB, e la parte AF, [d] misurerà ancora l'auanzo FB; mà G è supposta maggiore di FB, la maggiore misurerà la minore, ch'è impossibile.

a 2. assioma del 10.
b 3. assiom. del 10.
c 2. assiom. del 10.
d 1. assioma del 10.

sibile. Non dunque G è la massima commune misura, mà sarà FB. Se poi la minore AB misurasse giustamente la maggiore CD, in modo, che, detratta AB, quanto si può, da CD, non supravanzi cosa alcuna, all'hora AB sarà la massima commune misura, stante che AB misurarebbe CD, e misurarebbe ancora se medesima, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



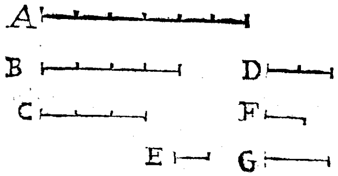
COROLLARIO.

Nella seconda parte dell'antecedente propositione, supponendo G la massima commune misura delle due AB, CD, si è dimostrato, che G misura FB. Hor se supporremo, che G non sia la massima, mà sia vna di quelle, che misura le due AB, CD, procedendosi nell'istesso modo, si prouerà, che G misura la massima FB. D'onde è manifesto, che quella grandezza, che misura le due AB, CD, misurerà ancora la loro massima commune misura.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE IV.

Date tre grandezze commensurabili, ritrouare la loro massima commune misura,

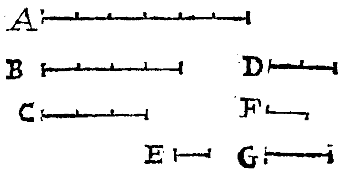
Siano proposte le tre grandezze commensurabili A, B, C, e si voglia ritrouare la loro massima commune misura. Per l'antecedente propositione si troui la massima commune misura di due sole, come, per esempio, delle due A, & B, che sia D; se D misura C, sarà D la massima commune misura delle tre A, B, C; mà se D non misura C, perche le tre A, B, C si suppongono commensurabili, qualche grandezza le misurerà tutte tre; sia E la loro commune misura. Perche E misura le tre A, B, C sarà dunque commune misura delle due A, & B, e, per l'antecedente Corollario, E misurerà ancora D, ch'è massima commune misura delle due A, & B: mà E misura C, perciò E sarà commune misura delle due C, & D; per la qual cosa le due C, & D sono commensurabili. Si troui dunque, per l'antecedente propositione, la massima commune misura delle due C, & D, che sia F. Dico che F è la massima commune misura delle tre A, B, C. Perche F misura D, e per costruttione, D misura le due A, B: perciò F [a] misurerà le due A, & B:



a 2. assioma del 10.

mà per costruttione, F misura ancora C, in conseguenza F è commune misura delle tre A, B, C.

Dico finalmente, che F è la massima. Se F non è la massima, qualche altra grandezza sarà la masſima misura delle tre A, B, C; sia quella la notata G, sarà G maggiore di F. Perche G misura le due A, B, per il Corollario antecedente, misurerà ancora D, ch'è loro masſima commune misura, mà G, per suppositione, misura C, in conseguenza G sarà commune misura delle due C, & D; e per il Corollario antecedente, G, misurerà ancora F, ch'è masſima commune misura delle due C, & D: mà G è supposta maggiore di F, la maggiore misurarebbe la minore, ch'è imposſibile. Non dunque G è la masſima; mà la masſima sarà F, ch'era da farsi è dimostrarsi.



COROLLARIO.

Essendosi dimostrato, che posta G commune misura delle tre A, B, C misura ancora F, sarà manifesto, che quella grandezza, la quale sarà commune misura di tre altre grandezze, la medesima misurerà la massima commune misura di quelle tre grandezze.

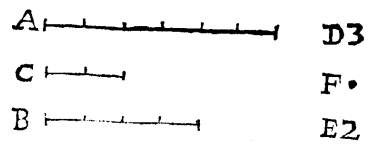
Il medesimo modo tenuto à trouare la masſima commune misura à tre grãdezze commensurabili, si può ancora tenere, per trouare la masſima commune misura à più di tre grandezze commensurabili; cioè, se le date grandezze saranno quattro, si troui prima la masſima commune misura à tre di quelle, e poi, frà la masſima trouata, e la quarta, si troui vn altra masſima; e se saranno cinque si trouerà prima la masſima commune misura à quattro, e con quest'ordine in infinito; e sempre si prouerà, che quella grandezza, che è commune misura di quante si voglia grandezze, misurerà ancora la masſima, che misura quelle.

THEOREMA III. PROPOSITIONE V.

Le grandezze commensurabili hanno frà di loro quella proportione, che hà il numero al numero.

Siano le grandezze commensurabili A, & B. Dico che la proportione di A à B è come quella, che hà vn numero ad vn altro numero. Si
a 5. del 10. troui [a] la masſima commune misura delle due A, & B, che sia C; e quante volte C misura la grandezza A, tante volte l'vnità F misuri il numero D; come ancora, per quante volte C misura la grandezza B, tante volte l'vnità F misuri il numero E. Perche C misura A, come l'vnità F misu-

ra il numero D, sarà A multiplice di C, come D è multiplice dell'vnità F; e per quel, che si è dimostrato auanti alla sesta definitione del quinto Libro, gli vguali multiplici della prima A, e terza D, secondo qualunque multiplicatione, sono ambidue, presi separatamente, ò maggiori, ò minori, ò vguali à gli vguali multiplici della seconda C, e quarta F, presi secondo qualunque multiplicatione; e per la sesta definitione del quinto Libro, la prima A alla seconda C è come la terza D alla quarta F; cioè la grandezza A alla grandezza C hauerà la medesima proportione, quale hà il numero D all'vnità F. Similmente, perche C misura B, come l'vnità F misura il numero E, sarà C à B, come F ad E. In oltre si considerino le tre grandezze A, C, B, delle quali C sia intermedia; e si considerino i numeri D, E, e l'vnità F sia intermedio; la proportione di A, à B, per il Lemma settimo dopo la 18. del sesto, è composta delle proportioni di A à C, e di C à B: mà A à C è come D ad F, e la proportione di C à B è come quella di F ad E, la proportione di A à B sarà cõposta delle due proportioni, cioè di D ad F, e di F ad E: mà la proportione del numero D al numero E, per il citato Lemma, è composta delle medesime due proportioni di D ad F, e di F ad E: in conseguenza la proportione di A à B sarà come quella del numero D al numero E, ch'era da dimostrarsi.



COROLLARIO I.

Da quel, che si è detto è manifesto, che se saranno tre grandezze da vna parte, come A, C, B, e tre numeri da vn altra, come D, F, E, e che sia A à C come D ad F, e sia C à B come F ad E, per l'egualità, sarà A à B come il numero D al numero E.

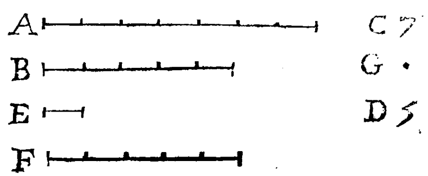
COROLLARIO II.

Da quel, che si è detto nell'antecedente dimostratione, appare, che, se vna grandezza è misurata da vn'altra grandezza, come vn numero è misurato dall'vnità, sarà la grandezza alla grandezza, come il numero all'vnità.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE VI.

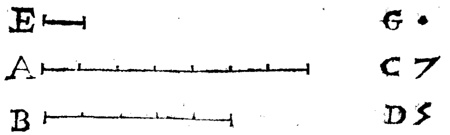
Se due grandezze hanno la proportione frà di loro, quale hà il numero al numero, quelle grandezze saranno cõmensurabili.

Habbia la grandezza A alla grandezza B quella proportione, che hà il numero C al numero D. Dico che le grandezze A, & B sono frà loro commensurabili. Frà i numeri C, & D si esponga l'vnità G; e s'intenda diuisa la grandezza A in tante parti vguali, per quante vnità sono nel numero C. Poi sia esposta la grandezza E, vguale ad vna di quelle parti, che sono in A, e si multiplichi la grandezza E, in modo, che ne venga F, la quale contenga tante volte E, per quante vnità sono nel numero D. Perche A contiene tante volte E, per quante vnità sono nel numero C, conterrà A tante volte E, per quante volte il numero C contiene l'vnità G; e, per il secondo Corollario all'antecedente propositione, la proportione di A ad E sarà come quella del numero C all'vnità G. Similmente perche F contiene E tante volte, per quante vnità sono nel numero D, sarà E parte di F, come l'vnità G è parte del numero D, per la qual cosa E ad F, per il citato Corollario, sarà come G à D. Hor, essendo A ad E come C à G; e si è dimostrata E ad F essere come G à D, per l'egualità, come si disse nel primo de gli antecedenti Corollarij, sarà A ad F come il numero C al numero D: ma il numero C al numero D, per



a 11. del 5. ipotesi, è come A à B, sarà A ad F [a] come la medesima grandezza A alla
b 9. del 5. grandezza B; e perciò le grandezze B, ed F [b] sono frà di loro vguali; per costruttione E misura F, in consequenza E misurerà la grandezza B; ma, per costruttione, misura ancora A, la quantità dunque E sarà commune
c 1. defin. del 10. misura delle due A, & B: per la qual cosa le grandezze A, & B [c] sono commensurabili, che era da dimostrarsi.

In altro modo più breue. Si diuida A in tante parti vguali, per quante vnità sono nel numero C, e si esponga E vguale ad vna delle parti, che sono in A. Perche E misura A, come l'vnità G misura il numero C, sarà E ad A, come l'vnità G al numero C: ma, per ipotesi, A à B è come C à D, sarà, per l'egualità, come si disse nel Corollario primo all'antecedente propositione E à B come G à D; e perche l'vnità G misura il numero D, perciò E misurerà B; mà E, per costruttione, misura ancora A, sarà E commune misura delle due A, & D: per la
d 1. defin. del 10. qual cosa le due A, & B [d] sono commensurabili, come fù proposto dimostrare.



COROLLARIO I.

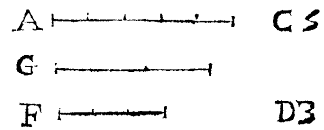
Dalla prima dimostratione dell'antecedente propositione

ne si caua il modo di trouare vna retta linea, alla quale vn altra retta linea sia come vn numero ad vn altro numero. Si replichi la figura della prima dimostratione, douendosi trouare vna retta linea, alla quale sia A (che quì la supponiamo retta linea) come il numero C al numero D; si diuida la retta A in tante parti vguali, per quante vnità sono nel numero C, e si prenda la retta F, la quale consti di tante parti vguali alle parti di A, per quante vnità sono nel numero D, e per quel, che si è dimostrato, la retta A alla retta F sarà come il numero C al numero D.

COROLLARIO II.

Da quel, che si è detto, è manifesto ancora il modo da ritrouare vna retta linea, al di cui quadrato, sia il quadrato d'vna retta data, come vn numero ad vn altro numero.

Per essempio sia la retta data A, e si habbia da ritrouare vn altra retta, in modo, che il numero C al numero D sia come il quadrato della retta A al quadrato della retta da trouarsi. Si troui, come nell'antecedente Corollario, la retta F, in modo, che la retta A alla retta F sia come il numero C al numero D; poi frà le rette A, ed F, [a] si troui vna media proportionale, come G. Dico che G è la retta, che si cerca. Perche G è media proportionale frà le due A, ed F, hauerà A ad F, per il Lemma 7. dopo la 18. del 6. duplicata proportione, che A à G: ma il quadrato di A al quadrato di G [b] hà la medesima duplicata proportione, che hà la retta A alla retta G; sarà il quadrato di A al quadrato di G, come A ad F: ma, per costruttione, A ad F è come C à D, sarà il quadrato di A al quadrato di G, [c] come il numero C al numero D, ch'era da farsi.



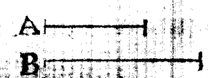
a 13. del 6.
b 20. del 6.
c 11. del

THEOREMA V. PROPOSITIONE VII.

Le grandezze incommensurabili non hanno la proportione frà loro, come hà il numero al numero.

Siano le grandezze A, & B incommensurabili. Dico che non sono frà di loro come numero à numero.

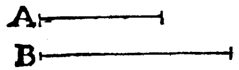
Se A à B sarà come numero à numero, per l'antecedente propositione, le grandezze A, & B saranno commensura-



bili, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque A à B è come vn numero a numero; e perciò le grandezze incommensurabili, non sono come numero à numero, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VIII.

Se due grandezze frà loro non hanno la proportione, che hà il numero al numero, quelle sono incommensurabili.



Siano le grandezze A, & B, le quali non habbiano frà loro la proportione, che hà il numero al numero. Dico che sono incommensurabili. Non siano incommensurabili, se è possibile. Perche le due A & B sono commensurabili, per la 5. propositione di questo, haueranno quella proportione, che hà il numero al numero, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque sono commensurabili, ma saranno incommensurabili, ch'era da dimostrarsi.

SCOLIO.

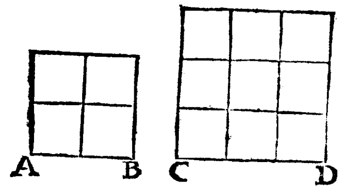
L'antecedente propositione, ch'Euclide dimostra in genere, douendosi applicare alle rette linee, è necessario auuertire, che, potendo le rette linee essere commensurabili in lunghezza, e potenza; e, potendo essere commensurabili in potenza solamente, quando la retta linea alla retta linea, non è come il numero al numero, per quel, che si è dimostrato nell'antecedente propositione, quelle rette linee saranno incommensurabili in lunghezza; ma non ne segue, che non possano essere commensurabili in potenza, mentre quelle, che sono commensurabili in potenza solamente, sono ancora incommensurabili in lunghezza. Si conclude dunque, che quando due rette linee non sono frà loro come numero à numero, quelle sono incommensurabili in lunghezza; e può essere, che siano incommensurabili in potenza, e può essere ancora, che siano commensurabili in potenza.

THEOREMA VII. PROPOSITIONE IX.

I quadrati delle rette linee commensurabili in lunghezza, hanno frà loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato: ed i quadrati, che frà loro hanno la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato, hanno i lati commensurabili in lunghezza. Di più, i quadrati delle rette linee incommensurabili

in lunghezza, non hanno frà loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato; e de i quadrati, che non hanno frà loro la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato, ne meno i lati haueranno le lunghezze commensurabili.

Siano prima le rette linee AB, CD, commensurabili in lunghezza. Dico che il quadrato della retta AB al quadrato della retta CD è come vn numero quadrato ad vn altro numero quadrato. Perche le rette AB, CD, per ipotesi, sono commensurabili in lunghezza, la retta AB, alla retta CD, [a] hauerà quella proportione, che hà il numero al numero; habbia dunque la retta AB alla retta CD quella proportione, che hà il numero E al numero F; ed i quadrati de i numeri E, F siano i notati G, ed H. Perche il quadrato di AB al quadrato di CD [b] hà duplicata proportione, che il lato AB al lato CD, e la proportione di AB à CD è come E ad F; hauerà il quadrato di AB al quadrato di CD duplicata proportione di quella, che hà il numero E al numero F: ma il numero quadrato G al numero quadrato H [c] hà la medesima duplicata proportione del numero E al numero F; sarà il quadrato di AB al quadrato di CD, come il numero quadrato G al numero quadrato H, il che era da dimostrarsi nel primo luogo.



E 2 F 3
G 4 H 9

a 5. del 10.
b. 20. del 6.
c 11. del 8.

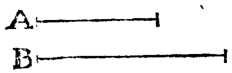
Di nuouo, sia il quadrato di AB al quadrato di CD, come il numero quadrato G al numero quadrato H. Dico che le rette AB, CD sono commensurabili in lunghezza. Siano i numeri E, ed F i lati de i numeri quadrati G, ed H. Perche il quadrato della retta AB al quadrato della retta CD [d] hà duplicata proportione, che il lato AB al lato CD, ed il quadrato della retta AB al quadrato della retta CD, per ipotesi, è come il numero quadrato G al numero quadrato H; hauerà il numero quadrato G al numero quadrato H duplicata proportione, che la retta AB alla retta CD: ma il numero quadrato G al numero quadrato H [e] hà duplicata proportione di quella, che hà il numero E al numero F; sarà il lato AB al lato CD, come il numero E al numero F; per la qual cosa le rette linee AB, CD sono commensurabili in lunghezza, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

d 20. del 6.
e 11. del 8.

In oltre, siano le rette A, & B, incommensurabili in lunghezza. Dico che il quadrato di A al quadrato di B non è come il numero quadrato al numero quadrato.

Habbia, s'è possibile, il quadrato della retta linea A al quadrato della retta linea B quella proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato; per quel, che si è dimostrato nella seconda parte, le rette A, & B ſaranno commenſurabili in lunghezza; il che è contro all' ipoteſi. Non dunque il quadrato di A al quadrato di B è come il numero quadrato al numero quadrato, che era da dimoſtrarſi nel terzo luogo.

Finalmente, non habbia il quadrato della retta linea A al quadrato della retta linea B quella proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato. Dico che le rette A, & B ſono incommenſurabili in lunghezza. Se le rette A, & B non ſono incommenſurabili in lunghezza, per neceſſaria conſeguenza, ſono commenſurabili in lunghezza; e, per quel, che ſi è dimoſtrato nella prima parte, il quadrato di A al quadrato di B ſarà come il numero quadrato al numero quadrato, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque le rette A, & B ſono commenſurabili in lunghezza; ma hanno le lunghezze incommenſurabili, come fù propoſto dimoſtrare.



COROLLARIO.

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto, che le rette linee, le quali ſono commenſurabili in lunghezza, ſono ancora commenſurabili in potenza, e quelle, che ſono commenſurabili in potenza, non ſempre ſono commenſurabili in lunghezza. Di più, quelle rette, che ſono incommenſurabili in lunghezza, non ſempre ſono incommenſurabili in potenza. Quelle rette linee poi, che hanno le potenze incommenſurabili, ſempre ſono incommenſurabili in lunghezza.

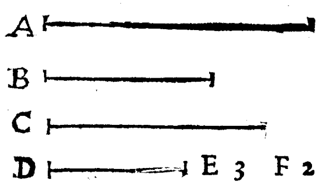
Cioè, eſſendoſi dimoſtrato nella prima parte, che i quadrati delle rette linee, che ſono commenſurabili in lungezza, ſono frà loro come numero quadrato à numero quadrato, ed i numeri quadrati, come gli altri numeri, ſono tutti commenſurabili; ancora i quadrati di quelle rette linee ſono commenſurabili; e perciò, quando le rette linee ſono commenſurabili in lunghezza, ſono ancora commenſurabili in potenza.

Similmente, perche nella ſeſta propoſitione di queſto, ſi è dimoſtrato in genere, che le grandezze, le quali ſono frà loro come numero à numero, ſono commenſurabili; ſe i quadrati di due rette non ſaranno come numero quadrato à numero quadrato, mà ſaranno come numero non quadrato, à numero non quadrato, quei due quadrati ſaranno commenſurabili: mà perche non ſono frà loro come numero quadrato à numero quadrato, per l'vltima parte dell'antecedente propoſitione, i lati di quei quadrati ſaranno incommenſurabili in lunghezza. E queſte ſono quelle rette linee, che ſono incommenſurabili in lunghezza, e ſono commenſurabili in potenza; cioè ſono quelle, che ſi dicono commenſurabili ſolamente in potenza. E da qui ne ſegue, che le rette, le quali ſono incommenſurabili in lunghezza, non ſempre ſono incommenſurabili in potenza.

Finalmente, nella ſettima propoſitione di queſto ſi è dimoſtrato in genere, che quando le grandezze non ſono frà di loro come numero à numero, quelle ſono incommenſurabili. Hor quando i quadrati di due rette linee non hanno la proportione, che hà il numero al numero, quelli ſono incommenſurabili: mà ſi è dimoſtrato nella prima parte, che quando i quadrati delle rette non ſono frà loro, come numero quadrato à numero quadrato, quelle rette linee ſono incommenſurabili in lunghezza; quando dunque i quadrati delle rette linee non ſono come numero à numero, ne meno ſaranno come numero quadrato à numero quadrato; e perciò ſaranno incommenſurabili in potenza, ed in lunghezza. Donde è manifeſto, che quando i quadrati di due rette linee ſono incommenſurabili, neceſſariamente ancora quelle rette linee ſaranno incommenſurabili in lunghezza.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE X.

Se quattro grandezze ſono proportionali, e la prima è commenſurabile alla ſeconda, ancora la terza ſarà commenſurabile alla quarta; e ſe la prima è incommenſurabile alla ſeconda, ancora la terza ſarà incommenſurabile alla quarta.



Siano le quattro grandezze proportionali A, B, C, D, ò che tutte quattro ſiano del medeſimo genere, ò che le due A, & B ſiano d'vn genere, e le altre due d'vn altro genere, e la prima A ſia commenſurabile alla ſeconda B. Dico che la terza C ſarà ancora commenſurabile alla quarta D. Perche A, & B ſi ſuppongono commenſurabili, la proportione di A à B [a] ſarà come quella d'vn numero ad vn altro numero. Sia dunque come il numero E al numero F. Perche A à B, per ipoteſi, è come C à D, hauerà C à D l'iſteſſa proportione, quale hà il numero E al numero F; per la qual coſa le due C, & D [b] ſono commenſurabili, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

a 5. del 10.
b 6. del 10.

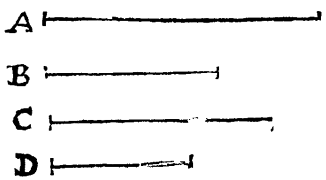
Di nuouo, ſuppoſto che la prima A ſia incommenſurabile alla ſeconda B. Dico che la terza C ſarà incommenſurabile alla quarta D. Perche le due A, & B ſi ſuppongono incommenſurabili, la proportione di A à B [c] non ſarà come quella del numero al numero: ma la proportione di A à B, per ipoteſi, è come quella di C à D; la proportione dunque di C à D non è come quella del numero al numero. Per la qual coſa C, & D [d] ſono incommenſurabili, che era da dimoſtrarſi.

c 7. del 10.
d 8. del 10.

SCOLIO I.

L'antecedente propositione, ch'Euclide pone in genere, non solo si applica alle rette linee, che sono commensurabili, ò incommensurabili in lunghezza, ma si applica ancora à quelle, che sono commensurabili, o incommensurabili in potenza, nel seguente modo.

Se quattro linee rette sono proportionali, e la prima è commensurabile solamente in potenza alla seconda, ancora la terza sarà commensurabile solamente in potenza alla quarta; e se la prima è incommensurabile in potenza alla seconda, ancora la terza sarà incommensurabile alla quarta.



Habbia A à B l'istessa proportione, che hà C à D. Dico prima, che se A è commensurabile solamente in potenza alla seconda B, ancora C sarà commensurabile solamente in potenza alla quarta D. Perche A à B è come C à D, sarà il quadrato
e 22. del 6. *to di A al quadrato di B* e *come il qua-*
drato di C al quadrato di D: e perche le due A, & B si suppongono commen-
f 3. defin. del 10. *surabili in potenza, i loro quadrati* f *saranno ancora commensurabili; per la*
g 5. del 10. *qual cosa il quadrato di A al quadrato di B* g *sarà come numero à numero: mà il quadrato di A al quadrato di B è come il quadrato di C al quadrato di D; sarà il quadrato di C al quadrato di D come è il numero al numero; e*
h 6. del 10. *perciò i quadrati delle due C, & D,* h *sono commensurabili: dal che le due C,*
K 3. defin. del 10. *& D* K *sono commensurabili in potenza, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

Di nuouo, supposto che A sia incommensurabile in potenza alla retta B. Dico che C sarà incommensurabile in potenza alla retta D. Perche le due A, & B sono incommensurabili in potenza, i loro quadrati saranno incommen-
l 7. del 10. *surabili, e perciò* l *non sono frà loro come numero à numero: mà la proportione del quadrato di A al quadrato di B è come il quadrato di C al quadrato D; non sarà il quadrato di C al quadrato di D come numero à numero;*
m 8. del 10. *per la qual cosa* m *non saranno commensurabili, e le due C, & D non sono commensurabili in potenza, che era da dimostrarsi.*

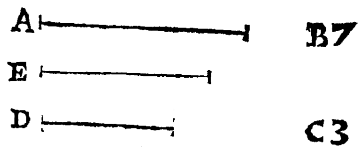
PROBLEMA III. PROPOSITIONE XI.

Ad vna proposta retta linea ritrouare due rette linee incommensurabili, cioè vna incommensurabile solamente in lunghezza, e l'altra incommensurabile in lunghezza, ed in potenza.

Sia proposta la retta linea A, alla quale si voglia prima trouare vna retta linea incommensurabile solamente in lunghezza.

Per il Lemma antecedente* si trouino due numeri, come B, & C, i quali non habbiano la proportione, come numero quadrato à numero quadrato; poi, per il Corollario [illegible] alla propositione sesta di questo, si troui la retta D, in modo, che il quadrato della retta A al quadrato della retta D, sia come il numero B al numero C. Dico che la retta D è incõmensurabile solamente in lunghezza alla retta A. Perche il quadrato di A al quadrato della retta D, per costruttione, è come il numero B al numero C; e similmẽte per costruttione, il numero B al numero C non è come numero quadrato à numero quadrato; perciò il quadrato di A al quadrato di D non sarà come numero quadrato à numero quadrato; ed inconseguenza le rette A, & D a sono incommensurabili in lunghezza. Che poi le rette A, & D siano incommensurabili solamente in lunghezza, è chiaro; poiche, essendo il quadrato di A al quadrato di D, come il numero B al numero C, i quadrati delle due A, & D b saranno commensurabili; e le rette A, & D, saranno commensurabili in potenza, per la qual cosa le rette A & D sono solamente incommensurabili in lunghezza.

* questo Lẽma manca per errore, però si caua dallo Scolio posto nel fine del 9. lib.



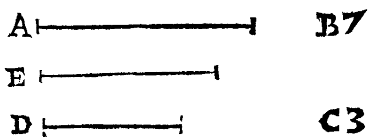
a 9. del 10.
b 6. del 10.

Di nuouo, alla proposta retta linea A s'habbia à ritrouare vna retta incommensurabile in lunghezza, e potenza. Si troui, come prima, la retta D, che sia incommensurabile solamente in lunghezza alla retta A; poi c si troui vna media proportionale frà le rette A, & D, che sia la notata E. Dico che la retta E è incommensurabile alla retta A, in lunghezza, e potenza. Perche E, per costruttione, è media proportionale frà le due A, & D, la prima A alla terza D, per il Lemma settimo dopo la 18. del sesto, hà duplicata proportione di quella, che hà la prima A alla seconda E: mà il quadrato di A al quadrato di E hà la medesima duplicata proportione di A ad E; sarà il quadrato di A al quadrato di E, come A à D: ma le due A, & D, per quel che si è dimostrato, sono frà loro incommensurabili in lunghezza, sarà il quadrato di A incõmensurabile al quadrato di E; e perciò i quadrati di A, ed E d sono incommensurabili, ed i lati A, & E saranno incommensurabili in lunghezza. Per la qual cosa le rette A, ed E, sono incommensurabili in lunghezza, ed in potenza, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

c 13. del 6.
d 10. del 10.

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che, se la proposta retta A sarà quella retta linea, che, nella quinta definitione, fù chiamata Rationale, essendo D, per quel, che si è dimostrato, solamente commensurabile in potenza alla Rationale A, ouero solamente incommensurabile in lunghezza, ch'è l'istessa cosa, sarà, per la 6. defin. di questo, la retta D Rationale. Ed all'incontro, se stabiliremo la retta D come Rationale, essendo A commensurabile solamente in potenza à D, sarà ancora A Rationale. In oltre perche E, ch'è media proportionale frà le due A, & D, è incommensurabile alla retta A, tanto in lunghezza, come in

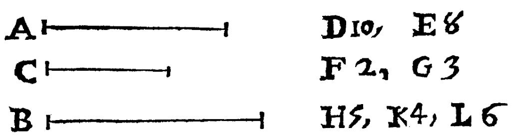


potenza, sarà ancora incommensurabile in lunghezza, e potenza alla retta D. Poiche, essendo E media proportionale frà le due D, ed A, sarà il quadrato di D al quadrato di E, come D ad A: mà D è incommensurabile in lunghezza ad
e 10. del 10. A, sarà il quadrato di D [e] incommensurabile al quadrato di E; per la qual cosa D, ed E saranno ancora incommensurabili in lunghezza, come si disse. Donde appare, che, se frà due rette linee, come A, & D, incommensurabili solamente in lunghezza, cioè commensurabili solamente in potenza, si troua vna media proportionale, come E, sarà E incommensurabile in lunghezza, e potenza, tanto alla retta A, quanto alla retta D: si che, determinata A, ouero D, come Rationale, sempre la media E sarà irrationale.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE XII.

Quelle grandezze, che sono commensurabili ad vna terza, saranno commensurabili frà di loro.

Sia la grandezza A, commensurabile alla grandezza C, e la grandezza B sia commensurabile alla medesima grandezza C. Dico che le grandezze A, & B, sono frà loro commensurabili.



Perche A, & C si suppongono commensu-
a 5. del 10. rabili, la proportione di A à C [a] sarà come quella, che hà il numero al
numero; habbia dunque A à C la proportione, che hà il numero D al
numero E. Similmente, perche le due C, & B sono commensurabili,
b 5. del 10. hauerà C à B [b] la proportione, che hà il numero al numero: sia, per
c 4. del 8. esempio, come il numero F al numero G. Si prendano [c] tre numeri, come H, K, L, che siano i minimi nelle proportioni di D ad E, e di F à G; cioè che H à K sia come D ad E, ouero A à C; e la proportione di K ad L

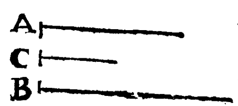
sia come quella di F à G, cioè, come quella di C à B. Perche H à K è come A à C, e la proportione di K ad L è come quella di C à B, per il primo Corollario alla quinta propositione di questo, sarà per l'egualità, A à B come il numero H al numero L. Per la qual cosa le grandezze A,
& B [f] sono commensurabili, ch'era da dimostrarsi. f 6. del 19.

SCOLIO.

Se le grandezze A, & B sono rette linee, e le due A, & B sono commensurabili solamente in potenza alla retta C. Dico che le due A, & B sono commensurabili in potenza frà loro. Perche, l'antecedente propositione si è dimostrata in genere, se in luogo delle rette A, C, B si pongono i loro quadrati, sarà manifesto, da quel, che si è dimostrato, che i quadrati di A, & B, sono commensurabili; e perciò le rette A, & B sono commensurabili in potenza.

Se due grandezze sono commensurabili frà loro, ed vna di quelle sia commensurabile ad vna terza, l'altra sarà ancora commensurabile alla medesima terza.

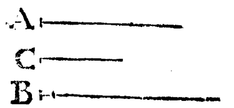
Siano le due A, & B, commensurabili frà loro, ed A sia commensurabile à C. Dico che B sarà commensurabile alla medesima C. Perche tanto B, quanto C, è commensurabile ad A, per l'antecedente propositione, le due B, & C sono frà loro commensurabili.



THEOREMA X. PROPOSITIONE XIII.

Se vna di due grandezze è commensurabile ad vna terza, e l'altra è incommensurabile alla medesima terza, quelle due sono incommensurabili.

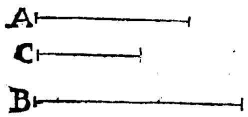
Sia la grandezza A commensurabile à C, e la grandezza B incommensurabile alla medesima C. Dico che le due A, & B sono incommensurabili. Se B, ed A non sono incommensurabili, sarà B commensurabile ad A; mà C è supposta commensurabile alla medesima A, le due B, & C [a] saranno
commensurabili, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque le due A, & B a 12. del 20.
sono commensurabili; per la qual cosa B sarà incommensurabile ad A, ch'era da dimostrarsi.



THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIV.

Se due grandezze sono commensurabili, ed vna di quelle sia incommensurabile ad vna terza, ancora l'altra sarà incommensurabile alla medesima terza.

Siano le grandezze A, & B cōmenſurabili frà loro, e ſia A incommenſurabile à C. Dico che B ſarà incommenſurabile alla medeſima C. Se B non è incommenſurabile à C, ſarà C commenſurabile à B; ma, per ipoteſi, A è commenſura-

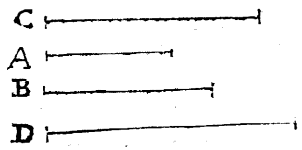


a 12. del 10. bile à B, le due A, C [a] ſaranno commenſurabili, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque B è commenſurabile à C, ma le due C, & B ſono incommenſurabili, come fù propoſto dimoſtrare.

S C O L I O.

Da quel, che ſi è detto, facilmente ſi dimoſtra il ſeguente Theorema.

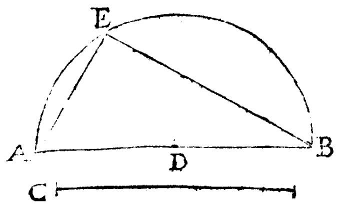
Quelle grandezze, che ſono commenſurabili alle incommenſurabili, ſono frà di loro incommenſurabili.



Siano le due grandezze A, & B incommenſurabili; e ſia C commenſurabile ad A, e la grandezza D ſia commenſurabile à B. Dico che le due C, & D ſono incommenſurabili. Perche le due C, ed A, per ipoteſi, ſono commenſurabili, ed A è incommenſurabile à B, per l'antecedente propoſitione, ſarà C incommenſurabile à B. Similmente perche D, & B, per ipoteſi, ſono frà loro commenſurabili, e ſi è dimoſtrata B incommenſurabile à C, per l'antecedente propoſitione, ſarà D incommenſurabile à C, ch'era da dimoſtrarſi.

L E M M A.

Date due rette linee ineguali, ritrouare di quanto la potenza della maggiore ſupera la potenza della minore.



Delle rette date ſia la maggiore AB, e la minore C, e ſi voglia ritrouare quanto la potenza, ò quadrato, di AB è maggiore della potenza, ò quadrato di C. Si diuida

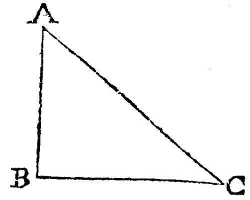
a 10. del 1. *AB [a] in due parti vguali in D, fatto centro in D, coll'interuallo DA, ouero DB, ſi deſcriua il mezzo cir-*

b 1. del 4. *colo AEB, nel quale ſi addatti [b] la retta BE vguale alla retta C. Si tiri la retta AE. Dico che la potenza di AB ſupera la potenza di C per quanto è la potenza, ò quadrato di AE. Perche l'angolo AEB*

nel

nel mezzo circolo [c] è retto, ſarà il quadrato di AB [d] vguale à i quadrati de i lati BE, EA, e perciò il quadrato di AB ſupera il quadrato di BE, cioè di C, per il quadrato di AE, ch'era da dimoſtrarſi. c 31. del 3. d 47. del 1.

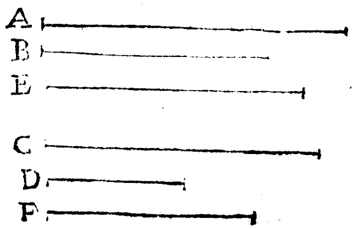
Date due rette linee, ritrouare la retta, la di cui potenza ſia vguale alle potenze delle date.



Siano le rette date AB, BC, e ſi voglia ritrouare la retta, il di cui quadrato, ò potenza, ſia vguale à i quadrati, ò potenze, delle due AB, BC. Si addattino le rette AB, BC, [e] che facciano angolo retto ne gli eſtremi B; ſi tiri la retta AC. Eſſendo l'angolo B retto, il quadrato di AC [f] è vguale à i quadrati delle due AB, BC; cioè la potenza di AC è vguale alle potenze delle due AB, BC, ch'era da dimoſtrarſi. e 11. del 1. f 47. del 1.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XV.

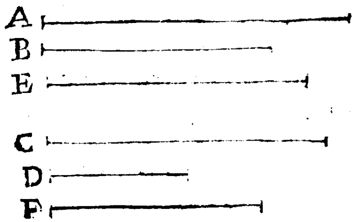
Se quattro linee rette ſono proportionali, e la potenza della prima ſupera la potenza della ſeconda, per quanto è il quadrato d'vna retta linea, commenſurabile in lunghezza alla prima; la potenza della terza ſuperarà la potenza della quarta, per quanto è il quadrato della retta, commenſurabile in lunghezza alla terza. E ſe la potenza della prima ſupera la potenza della ſeconda, per il quadrato di vna retta, incommenſurabile alla prima; la potenza ancora della terza ſuperarà la potenza della quarta, per quanto è il quadrato della retta, incommenſurabile alla terza.



Siano le quattro rette linee proportionali A, B, C, D; e la potenza della prima A ſuperi la potenza della ſeconda B, per il quadrato della retta E; e la potenza della terza C ſuperi la potenza della quarta D, per il quadrato della retta F. Dico che, ſe la retta E è commenſurabile in lunghezza alla prima A, ſarà ancora la retta F commenſurabile in lunghezza alla terza C; e ſe la retta E

e in-

è incommensurabile in lunghezza alla prima A, ancora la retta F sa-
rà incommensurabile in lunghezza alla terza C. Perche il quadrato di
A, per ipotesi, supera il quadrato di
B per il quadrato di E, sarà* E la dif-
ferenza frà il quadrato di A, ed il
quadrato di B; e per simile ragione,
il quadrato di F sarà la differenza di
quanto il quadrato di C supera il
quadrato di D. In oltre, perche A
à B è come C à D, sarà il quadrato
a 22.del 6. di A [a] al quadrato di B, come il qua
drato di C al quadrato di D; e, diui-
dendo, la differenza frà i quadrati di A, & B, cioè, il quadrato di E, al
b 17.del 5. quadrato di B, [b] sarà come la differenza frà i quadrati di C, & D, cioè,
il quadrato di F al quadrato di D: ed inuertendo, il quadrato di B al
c Corol.alla 4. del 5. quadrato di E [c] sarà come il quadrato di D al quadrato di F. Hor per-
che il quadrato di A al quadrato di B è come il quadrato di C al qua-
drato di D; ed il quadrato di B al quadrato di E è come il quadrato di
d 22. del 5. D al quadrato di F, per l'egualità, il quadrato di A al quadrato di E [d]
sarà come il quadrato di C al quadrato di F; e la proportione della retta
e 22. del 6. A alla retta E [e] sarà come quella della retta C alla retta F. Se dunque la
retta A è commensurabile in lunghezza alla retta E, sarà ancora la retta
f 10. del 10. C [f] commensurabile in lunghezza alla retta F; e se la retta A è incom-
g 10.del 11. mensurabile in lunghezza alla retta E, [g] sarà ancora la retta C incom-
mensurabile in lunghezza alla retta F, come fù proposto dimostrare.



* il quadra: di

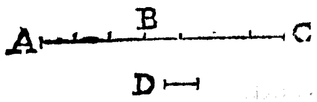
S C O L I O.

Nell'istesso modo si dimostrerà, che se A è commensurabile ad E, solamente in potenza, ancora C sarà commensurabile solamente in potenza alla retta F.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XVI.

La composta di due grandezze commensurabili è commensurabile all'vna, ed all'altra di quelle, che la compongono: e se la composta è commensurabile ad vna di quelle, che la compongono, quelle due saranno commensurabili frà loro.

Siano le due grandezze AB, BC commensurabili, le quali, giunte insieme, compongano la grandezza AC. Dico che la composta AC è commensurabile ad AB, ed è ancora commensurabile alla grandezza BC. Perche le due AB, BC sono cõmensurabili, per la 1. defin.



di

di questo, haueranno vna commune misura; sia la loro commune misu-
ra [a] la notata D. Perche D misura AB, e misura BC, misurerà ancora [b] a 3.del 10.
il tutto AC; hor essendo D commune misura delle due AC, AB, saran- b 1. assioma del 10.
no le due AC, AB [c] commensurabili. Similmente perche D misura AC, c 1. assioma del 10.
e misura ancora BC, le due AC, BC saranno commensurabili.
Di nuouo sia tutta AC commensurabile ad AB, ouero BC; per essem-
pio, sia commensurabile ad AB. Dico che le due AB, BC sono commen-
surabili. Sia D [d] la commune misura delle due AB, AC; perche D mi- d 3. del 10.
sura il tutto AC, e misura la parte AB, misurerà ancora [e] il rimanente
BC; dal che D sarà commune misura delle due AB, BC; e perciò le due e 9. assiom. del 10.
AB, BC sono commensurabili, ch'era da dimostrarsi.

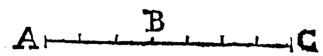
C O R O L L A R I O.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che quando la composta di due grandezze è commensurabile ad vna di quelle, sarà ancora commensurabile al rimanente; cioè se AC è commensurabile ad AB, la medesima sarà commensurabile al rimanente BC, stante che se D misura AC, e misura AB, per il 9. assioma, misura ancora il rimanente BC, e perciò le due AC, BC sono commensurabili.

THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVII.

La composta di due grandezze incommensurabili è incommensurabile all'vna, ed all'altra di quelle, che la compongono; e se la composta di due grandezze è incommensurabile ad vna di quelle, che la compongono, quelle due, che la compongono, saranno incommensurabili.

Siano prima le due grandezze AB, BC incommensurabili, le quali, giunte insieme, compongano la grandezza AC. Dico che AC sarà incommensurabile ad AB, ed ancora sarà incommensurabile à BC. Se AC non è incommensurabile ad AB, ouero BC, sarà AC commensurabile ad vna delle



due: sia dunque AC commensurabile ad AB, per l'antecedente Corol-
lario, sarà AC commensurabile al rimanente BC; dal che le due AB,
BC, [a] saranno commensurabili; ch'è contro all'ipotesi. Non dunque a 16.del 10.
AC è commensurabile ad AB. Nell'istesso modo si dimostrerà, che AC
è incommensurabile à BC.
Di nuouo sia AC incommensurabile ad vna delle componenti AB, BC, per essempio sia incommensurabile ad AB. Dico che le due AB, BC sono incommensurabili. Se le due AB, BC non sono incommensurabili,

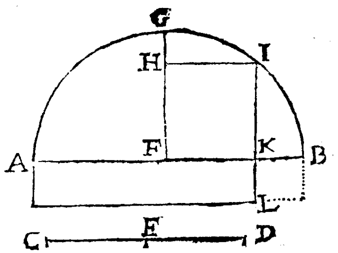
b 16.del 10. sarà AB commensurabile à BC, e tutta AC composta delle due AB, BC [b] sarà commensurabile ad AB, ouero BC, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque le due AB, BC sono commensurabili, ma A B è incommensurabile à BC.

COROLLARIO.

Quindi è, che se la composta di due grandezze è incommensurabile ad vna delle componenti, sarà ancora incommensurabile all'altra; cioè, se AC è incommensurabile ad AB, sarà ancora incommensurabile al rimanente BC. Perche se AC fosse commensurabile à BC, per il Corollario all'antecedente propositione, sarebbe AC commensurabile ad AB, ch'è contro all'ipotesi; non dunque AC è commensurabile à BC.

LEMMA I.

Date due rette linee ineguali, applicare alla maggiore vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata.



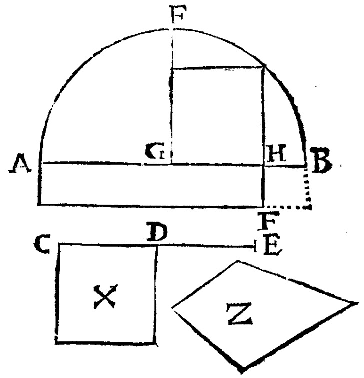
Sia AB la maggiore, e CD la minore delle rette date, e si voglia alla maggiore AB applicare vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato di CD, in modo, che non occupi tutta la retta AB, mà che manchi, à compire la retta AB, per vna figura quadrata. a 10.del 1. *Si diuida CD [a] in due parti vguali in E,* b Scol. alla 4. del 2. *sarà il quadrato di CE [b] la quarta parte del quadrato di CD; si diuida similmente AB in due parti vguali in F, e, fatto centro in F, coll'interuallo FA, ouero FB, si descriua il mezzo circolo AGB;* c 11.del 1. *nel punto F, sopra la retta AB [c] si erigga la perpendicolare FG; perche AB è maggiore di CD, sarà AF, ouero FG maggiore di CE.* d 3.del 1. *Si faccia FH [d] vguale à CE, e dal punto H si tiri la* e 31.del 1. *retta HI, [e] parallela ad AB, la quale concorrerà con la circonferen-* f 12.del 1. *za AGB in qualche punto I; dal punto I si faccia cadere la retta IK, [f]* g 34.del 1. *perpendicolare ad AB; sarà IK [g] vguale ad HF; si continui IK*

verso L, e si faccia KL [h] vguale à KB, e si compisca il rettangolo AL; sarà il rettangolo AL applicato ad AB, e manca à compire la linea AB per il quadrato LB (stante che LK è vguale à KB) Dico che il rettangolo AL è vguale alla quarta parte del quadrato di CD. Perche IK [l] è media proportionale frà le due AK, KB, sarà il rettangolo, contenuto dalle due AK, KB, [m] vguale al quadrato di IK: ma il rettangolo AL è vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AK, KB, stante che LK è vguale à KB; sarà il rettangolo AL vguale al quadrato di IK, ouero di FH, cioè vguale al quadrato di CE; ma il quadrato di CE [n] è la quarta parte del quadrato di CD; sarà il rettangolo AL vguale alla quarta parte del quadrato di CD, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

h 3. del 1.
l 13. del 6.
m 17.del 6.

LEMMA II.

Diuidere vna data retta linea talmente, che il rettangolo contenuto dalle parti sia vguale ad vn dato rettilineo.



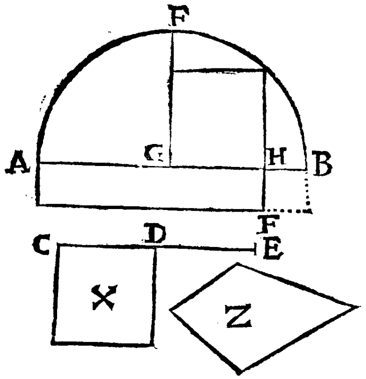
Sia data la linea retta AB, ed il rettilineo Z, e si voglia diuidere la retta AB in modo, che il rettangolo, contenuto dalle parti, sia vguale al rettilineo Z. Si faccia il quadrato X [a] vguale al rettilineo Z, si continui il lato CD verso E, e si faccia DE [b] vguale al lato CD, sarà il quadrato X [c] la quarta parte del quadrato di CE. Se la retta CE non è minore di AB, il problema sarà impossibile, stante che, douendosi operare come nell'antecedente Lemma, CD non sarà minore di FG. Se poi CE sarà minore di AB, si applichi ad AB, per l'antecedente Lemma, il rettangolo AF, vguale al quadrato X, in modo, che manchi à compire la retta AB per vna figura quadrata, come per essempio, per il quadrato FB; sarà diuisa la retta AB in H. Dico che il rettangolo contenuto dalle parti AH, HB è vguale al rettilineo Z. Perche la mancanza FB è quadrato, sarà FH vguale ad HB; dal che il rettangolo AF, sarà vguale à quello, ch'è contenuto dalle parti AH, HB; ma il rettangolo AF è vguale, per costruttione, al quadrato X, cioè al rettilineo Z; sarà il rettangolo

a 14.del 2.
b 3. del 1.
c Scol. alla 4.del 2.

contenuto dalle parti AH, HB, vguale al rettilineo Z, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

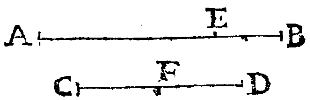
COROLLARIO.

Da quel, che ſi è detto, è manifeſto, che, applicato ad vna retta linea, come AB, vn rettangolo, per eſſempio, AF, vguale ad vn dato rettilineo Z, ouero X, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata, come FB, per queſta applicatione ſarà diuiſa la linea AB talmente in H, che il rettangolo contenuto dalle parti AH, HB, ſarà vguale al rettilineo Z, ouero X; ſtante che ſi è dimoſtrato, che il rettangolo applicato AF è vguale al rettangolo contenuto dalle parti AH, HB.



LEMMA III.

Se alla maggiore di due rette ineguali ſia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata; le parti, fatte nella maggior linea dalla propoſta applicatione, ſaranno frà di loro ineguali.



Siano le rette ineguali, cioè AB maggiore, e la minore CD, la quale ſia diuiſa in due parti vguali in F; e ſia applicato alla maggiore AB [a] vn rettangolo vguale alla quarta parte del quadrato di CD; cioè [b] vguale al quadrato di CF, in modo, che manchi à compire la retta AB per vna figura quadrata, come il quadrato di EB; per queſta fatta applicatione ſarà diuiſa la retta AB in due parti, come AE, EB. Dico che le parti AE, EB ſono frà di loro ineguali. Se non ſono ineguali, ſarà AE vguale ad EB, dal che il quadrato di AB [c] ſarà il quadruplo del quadrato di AE, ouero EB. In oltre, perche il rettangolo contenuto dalle parti AE, EB, per quel, che ſi è dimoſtra-

a lem. 1.

b Scol. alla 4. del 2.

c Scol. alla 4. del 2.

moſtrato ne i due antecedenti Lemma, è vguale al quadrato di CF; eſſendo il quadrato di CD il quadruplo del quadrato di CF, il medeſimo quadrato di CD ſarà il quadruplo del rettangolo contenuto dalle due AE, EB: ma il rettangolo, contenuto dalle due AE, EB, è vguale al quadrato di EB (ſtante che EB è ſuppoſta vguale ad AE) ſarà il quadrato di CD il quadruplo del quadrato di EB; fù dimoſtrato il quadrato di AB eſſere il quadruplo del medeſimo quadrato di EB; il quadrato dunque di CD ſarà vguale al quadrato di AB, ed il lato CD ſarà vguale al lato AB, ch'è contro all'ipoteſi. Non dunque la parte AE è vguale ad EB, ma ſono frà di loro ineguali, ch'era da dimoſtrarſi.

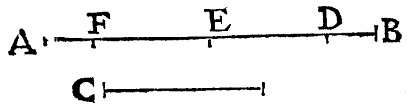
COROLLARIO.

Perche EB è il lato di quel quadrato, che rappreſenta la mancanza per compire la linea, ſarà manifeſto che EB è la minor parte, & AE la maggiore.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVIII.

Se ſaranno due rette linee ineguali, ed alla maggiore ſia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata: ſe le parti della maggior linea ſono commenſurabili in lunghezza, il quadrato della maggior linea ſupera il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta linea commenſurabile in lunghezza alla propoſta maggiore. E ſe il quadrato della maggior linea ſupera il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad eſſa maggior linea; applicato alla maggior linea vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea, per vna figura quadrata; per l'applicatione fatta, ſarà diuiſa la maggiore in due parti commenſurabili in lunghezza.

Siano le due rette linee ineguali AB maggiore, e la minore C, ed alla maggiore AB, per il primo Lemma, ſia applicato vn rettangolo vguale alla quarta parte del quadrato della minore C, in modo, che non occupi tutta la linea AB, ma, per compirla, manchi d'vna figura quadrata, e ſia per essempio, la mancanza per quanto è il quadrato di DB; sarà diuisa la retta AB nelle parti AD, DB. Dico prima, che se le parti AD, DB sono commensurabili in lunghezza, il quadrato di AB supererà il quadrato della minore C, per quanto è il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza alla maggiore AB.



Perche la retta AB dalla fatta applicatione è diuisa nelle parti AD, DB, per il Coroll.dopo il Lemma 3.sarà AD maggiore di DB; e per il Lemma 2. e suo Corollario,il rettangolo, contenuto dalle parti AD,DB, sarà vguale alla quarta parte del quadrato della retta C; e perciò il quadruplo rettangolo contenuto dalle parti AD, DB, sarà vguale al quadrato della retta C. In oltre, essendo AD maggiore di DB, si diuida la retta
a 10.del 1. AB [a] in due parti vguali in E, il punto E caderà frà li punti A, & D;ed
b Scol. alla 4.del 2. il quadrato di AB [b] sarà il quadruplo del quadrato di EB; cioè il quadruplo quadrato di EB è vguale al quadrato di AB; si faccia EF [c] vgua-
c 3. del 1. le ad ED, restarà DB vguale ad AF, ed il quadrato di FD [d] sarà il qua-
d Scol. alla 4.del 2. druplo del quadrato di ED; cioè il quadruplo quadrato di ED è vguale al quadrato di FD. Perche la retta AB è diuisa in due parti vguali in E, e la medesima è diuisa in due parti ineguali in D, sarà il rettangolo con-
e 5.del 2. tenuto dalle parti ineguali AD, DB, [e] col quadrato di ED, vguale al quadrato di EB; ed il quadruplo rettangolo contenuto dalle parti AD, DB, col quadruplo quadrato di ED, sarà vguale al quadruplo quadrato di EB; ma il quadruplo quadrato di EB è dimostrato vguale al quadrato di AB; ed il quadruplo quadrato di ED è mostrato vguale al quadrato di FD; sarà il quadruplo rettangolo contenuto dalle parti AD, DB, col quadrato di FD, vguale al quadrato di AB: fù dimostrato, che il quadruplo rettangolo, contenuto dalle parti AD,DB,è vguale al quadrato di C; il quadrato dunque della retta C, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di AB; e perciò il quadrato di AB supera il quadrato della retta C, per quanto è il quadrato di FD. Dico che FD è commensurabile in lunghezza ad AB. Perche AF è vguale à DB, la composta delle due AF, DB, sarà il doppio di DB; e perciò la composta delle due AF, DB sarà commensurabile in lunghezza alla retta DB. In oltre perche le due AD, DB, per ipotesi, sono commensurabili in lunghezza,
f 16.del 10. sarà tutta AB [f] commensurabile in lunghezza alla parte DB: ma la composta delle due AF, DB, è commensurabile in lunghezza alla medesima
g 12.del 10. DB; sarà tutta AB [g] commensurabile in lunghezza alla composta delle due AF, DB. Hor essendo tutta AB commensurabile in lunghezza alla retta composta delle due AF, DB, per il Corollario alla 16.propositione di questo, sarà tutta AB commensurabile in lunghezza al rimanente FD, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo, supposto che il quadrato di AB superi il quadrato della retta C, per quanto è il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore AB; applicato alla maggiore AB vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore C, in modo, che

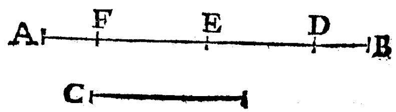
manchi

manchi à compire la linea AB per vna figura quadrata, sarà diuisa la retta AB come in D. Dico che le parti AD, DB sono commensurabili in lunghezza. Si dimostri, come prima si fece, che il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD. Perche il quadrato di AB, per ipotesi, supera il quadrato di C per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza ad AB, ed il quadrato di AB, per quel, che si è dimostrato, supera il quadrato di C per il quadrato di FD; perciò AB sarà commensurabile in lunghezza alla retta FD; e, per il Corollario alla 16. propositione di questo, la retta AB sarà commensurabile in lunghezza al rimanente AF, DB; cioè alla composta delle due AF, DB: mà la retta DB, come sopra si disse, è commensurabile in lunghezza alla medesima retta, composta delle due AF, DB; in conseguenza le due AB, BD, [h] sono commensurabili in lunghezza; e perche tutta AB, (ch'è composta delle due AD, DB) è commensurabile in lunghez- h 12.del 10.
za ad vna di quelle, cioè alla retta AB; le due AD, DB [K] sono commensurabili in lunghezza, ch'era da dimostrarsi. K 16.del 10.

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XIX.

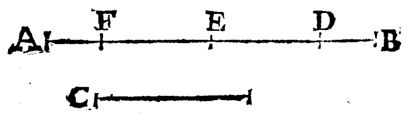
Se saranno due rette linee ineguali, ed alla maggiore sia applicato vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata; se le parti della maggior linea sono incommensurabili in lunghezza, il quadrato della maggior linea superarà il quadrato della minore, per quanto è il quadrato d'vna retta linea, incommensurabile in lunghezza alla proposta maggior linea. E se il quadrato della maggior linea supera il quadrato della minore,per quanto è il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza ad essa maggiore linea;applicato alla maggior linea vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato della minore, in modo, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata; per l'applicatione fatta sarà diuisa la maggiore in due parti, incommensurabili in lunghezza.

Siano le due rette linee ineguali AB maggiore, e la minore sia C; ed alla maggiore AB, per il primo Lemma all' antecedente propositione, sia applicato vn rettangolo,vguale alla quarta parte del quadrato della minore C, in modo, che non occupi tutta la retta AB, mà, per compirla, manchi d'vna figura quadrata, e la mancanza sia, per



essem-

essempio, il quadrato di DB; sarà diuisa la retta AB nelle parti AD, DB. Dico prima che, se le parti AD, DB, sono incommensurabili in lunghezza, il quadrato di AB superarà il quadrato della retta C, per quanto è il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla retta AB.



Si faccia la costruttione della precedente propositione, e si proui, come iui si fece, che il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD: si proui ancora, che la composta delle due AF, DB, è commensurabile alla retta DB. Perche le rette AD, DB, per ipotesi, sono incommensurabili in lunghezza,
a 17. del 10. sarà tutta AB [a] incommensurabile in lunghezza alla parte DB: mà DB, per quel, che si è detto, è commensurabile in lun-
b 14. del 10. ghezza alla composta delle due AF, DB; sarà tutta AB [b] incommensurabile in lunghezza alla composta delle due AF, DB; e per il Corollario alla 17. propositione, sarà AB incommensurabile in lunghezza al rimanente FD; mà il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD, essendosi dimostrata FD incommensurabile in lunghezza ad AB, il quadrato di AB superarà il quadrato di C, per quanto è il quadrato d'vna retta, come è FD, incommensurabile in lunghezza alla maggiore AB, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo, sia il quadrato di AB maggiore del quadrato di C, per quanto è vna retta incommensurabile in lunghezza ad AB; e sia applicato ad AB vn rettangolo, vguale alla quarta parte del quadrato di C, in modo, che manchi à compire la linea AB, per quanto è vna figura quadrata, e la mancanza sia, per esempio, il quadrato di DB; sarà diuisa la retta AB nelle parti AD, DB. Dico che le parti AD, DB sono incommensurabili in lunghezza. Supposta la medesima costruttione dell'antecedente propositione, si dimostrerà, come iui si fece, che il quadrato di AB supera il quadrato di C, per quanto è il quadrato di FD; si che, per ipotesi, AB sarà incommensurabile in lunghezza alla retta FD, e, per il Corollario alla propositione 17, sarà AB incommensurabile in lunghezza al rimanente AF, DB, cioè alla composta delle due AF, DB: mà, per quel, che si disse nella dimostratione dell'antecedente propositione, la composta delle due AF, DB, è commensurabile in
c 14. del 10. lunghezza alla retta DB; sarà la retta AB [c] incommensurabile in lunghezza alla retta DB. Hor se tutta la retta AB (ch'è composta delle due AD, DB) è incommensurabile ad vna, cioè à DB, saranno le due AD,
d 17. del 10. DB, [d] incommensurabili in lunghezza, ch'era da dimostrarsi.

S C O L I O I.

Sin qui Euclide hà trattato delle grandezze commensurabili, ed incom-

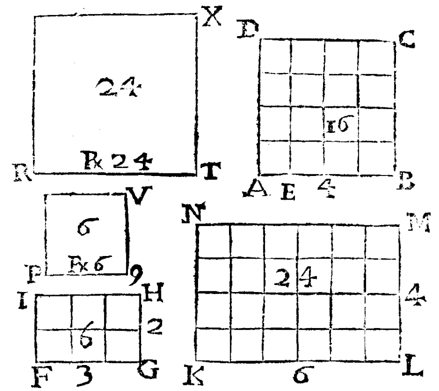
mensu-

mensurabili frà di loro, e conseguentemente s'inoltra à trattare delle grandezze comparate alla Rationale, spiegata nella definitione quinta di questo, che sono quelle grandezze, che si dicono Rationali, o Irrationali, secondo che sono commensurabili, ò incommensurabili alla detta Rationale. E per maggior chiarezza, deuesi auuertire, che in due modi Euclide considera la commensurabilità, ed incommensurabilità delle grandezze; cioè, ò considera la commensurabilità, ed incommensurabilità delle grandezze, comparate frà di loro; ouero le considera comparate alla Rationale, della quale pienamente fù parlato dopo la settima definitione di questo. La commensurabilità, ed incommensurabilità delle grandezze frà di loro (del che hà trattato fino à questo luogo) la nomina con le medesime voci di commensurabile, ed incommensurabile; quella poi, che riguarda la comparatione alla Rationale (della quale si parlerà nelle cose seguenti) l'esprime con le voci denominate dalla medesima Rationale; cioè, quelle rette, che sono commensurabili in lunghezza alla Rationale, che per la nona propositione, sono ancora commensurabili in potenza, le chiama Rationali in lunghezza, e potenza; e quelle rette, che alla Rationale sono commensurabili solamente in potenza, si dicono Rationali in potenza solamente; e quelle rette, che alla Rationale sono incommensurabili in potenza, le quali, per la nona propositione di questo, sono ancora alla medesima Rationale incommensurabili in lunghezza, le chiama Irrationali. Donde è manifesto, che due riguardi cadono nelle comparationi, cioè, vno è quello della comparatione frà di loro, e l'altro della comparatione rispetto alla Rationale. Quanto à quello, che si fà nella comparatione frà di loro, si esprime con le voci di Commensurabili in lunghezza, e potenza; ò di Commensurabili in potenza solamente; ouero d'Incommensurabili in lunghezza, e potenza, secondo che saranno, ò non saranno commensurabili frà di loro. Quello poi, che si farà nella comparatione, rispetto alla Rationale, si esprimerà con le voci di Rationali in lunghezza, e potenza; ò di Rationali solamente in potenza; ouero d'Irrationali in lunghezza, e potenza, secondo che saranno commensurabili, ò incommensurabili alla Rationale. Nota, che quando le rette linee sono alla Rationale commensurabili solamente in potenza, cioè, quando le rette linee, comparate alla Rationale, non sono commensurabili in lunghezza, mà sono ad essa Rationale solamente commensurabili in potenza, all' hora questi due riguardi s'vniscono insieme, in modo, che, se le rette linee, commensurabili solamente in potenza alla Rationale, saranno commensurabili frà di loro in lunghezza, quelle si chiameranno Rationali in potenza, e commensurabili frà di loro in lunghezza: se poi saranno commensurabili solamente in potenza alla Rationale, ed ancora saranno commensurabili solamente in potenza frà di loro; si chiameranno Rationali in potenza, ed ancora commensurabili frà di loro in potenza.

Quindi è, che i numeri sordi, cioè quelli, da i quali non si può estrarre la radice, ò lato, senza che soprauanzi cosa alcuna, comparati frà di loro, possono essere commensurabili in lunghezza, e per la nona di questo, commensurabili ancora in potenza; e, comparati alla Rationale, possono ancora essere incommensurabili in lunghezza, e commensurabili in potenza; e, secondo questo caso, quei numeri sordi si dicono Rationali in potenza, e commensurabili frà di loro in lunghezza, e potenza; come per essempio. Sia esposta la

Ra-

Rationale AB, espressa col numero 4; cioè, che consti di quattro vnità determinate, il di cui quadrato ABCD constarà di 16. vnità quadrate; e sarà il quadrato AC, per la 5. definitione, Rationale, al quale deuono essere comparati gli altri piani; ciò fatto, si multiplichi vna delle vguali parti, ò vnità, che sono in AB, quanto si vuole, e produca, per essempio, la retta, ò numero FG. Perche l'vnità AE, per costruttione, è commune misura delle due AB, FG; sarà FG commensurabile in lunghezza alla rationale AB; e per la definitione 6. di questo, FG sarà Rationale. Nel punto G si erigga la retta GH perpendicolare ad FG; si faccia GH multiplice di AE in modo, che sia maggiore, ò minore di FG; sarà GH commensurabile ad AB, e perciò sarà Rationale; co' i lati FG, GH sia fatto il piano rettangolo GI. Perche i lati FG, GH, constano di parti vguali ad AE, ogn'vna delle vnità quadrate, che compongono il piano FH, sarà vguale à ciascuna delle vnità quadrate, che compongono il Rationale AC; e perciò il quadrato di AE sarà commune misura de i piani FH, AC: mà AC è Rationale, sarà FH ancora Rationale. Si esponga poi il piano rettangolo KM, in modo, che il lato KL sia il doppio di FG; ed LM sia il doppio di GH; sarà FG à GH, come KL ad LM; dalche i piani FH, KM saranno frà di loro simili. In oltre, perche AE misura FG, e per costruttione, FG misura KL, l'vnità AE misurerà KL; e perciò KL è commensurabile alla Rationale AB, e per la 6. definitione, KL sarà Rationale. Nell'istesso modo si prouerà, che LM è Rationale, e sarà il piano KM commensurabile al rationale AC; e per la 9. definitione, il piano KM sarà Rationale. Di più perche FG à GH è come KL ad LM, e per costruttione, FG è ineguale ad HG, sarà KL ineguale ad LM; e per la definitione 18. del 7. Libro, i piani FH, KM non sono numeri quadrati; per la qual cosa i loro lati non sono esprimibili, rispetto alle vnità determinate nella Rationale AB, ma si considerano sordamente; come i notati PQ, RT, i di cui quadrati siano i notati PV, RX; sarà PV vguale al piano FH, e sarà RX vguale à KM: ma i due FH, KM, per quel, che si è dimostrato, sono commensurabili al Rationale AC, saranno i due PV, RX, commensurabili al Rationale AC: ma i lati PQ, RT, non essendo esprimibili, rispetto alle vnità della Rationale AB, perciò sono incommensurabili ad AB. Hor essendo i lati PQ, RT, incommensurabili in lunghezza ad AB, e le potenze PV, RX sono commensurabili al Rationale AC; i lati PQ, RT saranno quelli, che si dicono Rationali solamente in potenza alla proposta Rationale AB.



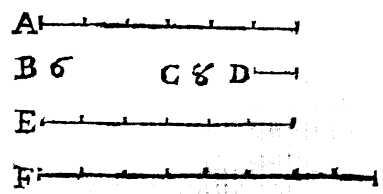
Finalmente perche i piani KM, FH sono frà loro simili, sarà il piano KM al piano FH, come il quadrato del lato KL al quadrato del lato FG; mà il quadrato di KL è il quadruplo del quadrato di FG (per essere KL il dop-

pio di FG) sarà il piano KM il doppio del piano FH: ma KM è vguale ad RX, ed il piano FH è vguale à PV; sarà il quadrato RX il quadruplo del quadrato PV; ed il lato RT sarà il doppio del lato PQ: dal che i lati RT, PQ sono commensurabili in lunghezza, e la commune misura sarà PQ; e sono ancora commensurabili in potenza, stante che VP misura quattro volte RX. D'onde è manifesto, che i numeri sordi PQ, RT, comparati frà di loro, senza hauere relatione alla Rationale AB, sono commensurabili in lunghezza, e potenza; ma, comparati alla Rationale AB, si dicono Rationali solamente in potenza, ed irrationali in lunghezza: auuertendo sempre, che questa voce di Rationale, ed Irrationale, hà sempre relatione alla comparatione, rispetto la Rationale proposta; cioè, rispetto alle vnità determinate nella Rationale AB; e non hà relatione alla comparatione frà di loro; perche, quando si fà la comparatione frà di loro, e non rispetto alla Rationale, le loro relationi si esprimono con le voci di Commensurabili, ed Incommensurabili.

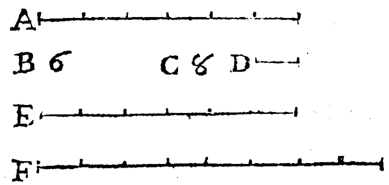
SCOLIO II.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che le rette commensurabili in lunghezza frà di loro, ò sono commensurabili in lunghezza alla proposta Rationale, come sono le notate FG, GH, KL, LM, le quali sono commensurabili in lunghezza frà di loro, e sono ancora commensurabili in lunghezza alla Rationale AB; ouero sono alla Rationale commensurabili solamente in potenza, come sono i lati PQ, RT, i quali sono commensurabili in lunghezza frà di loro, e sono solamente commensurabili in potenza alla Rationale AB; e queste sempre si chiamano Rationali; cioè, se sono commensurabili in lunghezza alla Rationale, si dicono Rationali in lunghezza, e se sono commensurabili solamente in potenza alla Rationale, si dicono Rationali in potenza. E perche due rette, Rationali in lunghezza, possono essere ambedue ineguali alla esposta Rationale; e può essere, che vna di quelle due sia vguale alla Rationale; perciò le dette Rationali si possono diuidere in tre generi. Il primo de' quali è, quando vna di due rette, commensurabili in lunghezza frà di loro, e commensurabili in lunghezza alla Rationale, è vguale alla medesima Rationale. Il secondo genere è quando di due rette, commensurabili in lunghezza frà di loro, e commensurabili in lunghezza alla Rationale, nissuna è vguale alla detta Rationale. Ed il terzo genere è, quando due rette sono commensurabili in lunghezza frà di loro, e sono alla Rationale solamente commensurabili in potenza. E questi tre generi di Rationali si possono trouare, come fà il P. Clauio nel seguente modo.

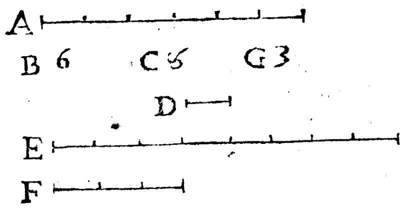
Siano presi due qualunque numeri ineguali B, & C, e sia esposta la Rationale A, diuisa in tante vguali parti, per quante vnità sono nel numero B. Si esponga poi la retta D, vguale ad vna delle parti, che sono nella Rationale A; e si prenda E, multiplice di D,



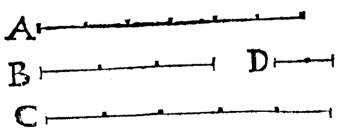
come la Rationale A è multiplice della medesima D; e si prenda la retta F, in modo, che sia misurata da D tante volte, per quante vnità sono nel numero C. Perche A, ed E sono vguali multiplici di D, saranno in E tante parti vguali à D, per quante ne sono in A; e perciò le due A, ed E sono frà di loro vguali; ma la retta D, per costruttione, è commune misura delle tre A,E,F; le tre rette dunque A, E, F sono commensurabili in lunghezza, e perciò le due E, ed F sono commensurabili in lunghezza frà di loro, e sono commensurabili in lunghezza alla Rationale A; e per la 6. definitione, sono Rationali. Si è dimostrata la Rationale E, vguale alla esposta Rationale A; si saranno dunque ritrouate le due Rationali E, ed F, commensurabili in lunghezza frà di loro, e commensurabili in lunghezza alla Rationale A; & vna di esse, come E, sarà vguale alla Rationale A. E queste sono quelle Rationali, che habbiamo chiamate del primo genere.



Siano di nuouo esposti tre numeri ineguali, come B,C,G, e sia la Rationale A diuisa in tante parti vguali, per quante vnità sono in B; e sia D vna di quelle parti. Si prendano poi le rette E, F, in modo, che E sia misurata da D tante volte, per quante vnità sono nel numero C; e la retta F sia misurata da D tante volte, per quante vnità sono nel numero G; saranno le rette E,F ineguali alla Rationale A. E perche D è commune misura delle rette A,E,F, saranno le rette A,E,F, commensurabili in lunghezza; e perciò le rette E,F sono commensurabili in lunghezza alla Rationale A, e per la 6. definitione, le rette E,F sono Rationali. Si saranno dunque ritrouate le Rationali E,F, commensurabili in lunghezza frà di loro, e commensurabili in lunghezza alla Rationale A; e nissuna delle due E,F, è vguale alla esposta Rationale A. E queste sono le Rationali del secondo genere.



Finalmente sia esposta la Rationale A, alla quale, per l'vndecima di questo, si troui la retta B, commensurabile solamente in potenza; si diuida la retta B in quante parti vguali si vuole, ed vna di quelle parti sia D; si prenda C, multiplice di D, secondo qualunque multiplicatione, sarà D commune misura delle due B, & C; e perciò le due B, & C sono frà loro commensurabili in lunghezza; e per la 9. propositione di questo, sono ancora frà loro commensurabili in potenza; cioè i loro quadrati sono frà loro commensurabili. Dico che le due B, & C sono alla Rationale A commensurabili solamente in

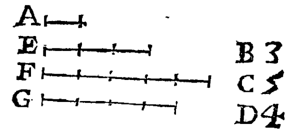


poten-

potenza. Perche il quadrato di B, per costruttione, è commensurabile al quadrato di A; sarà il quadrato di C [a] commensurabile al quadrato di A; dal che C sarà Rationale in potenza ad A. In oltre perche le rette C, & B sono commensurabili in lunghezza, e la retta B, per costruttione, è incommensurabile in lunghezza alla Rationale A; sarà [b] ancora la retta C incommensurabile in lunghezza alla Rationale A; ed haueremo ritrouate le due Rationali C, & B, frà di loro commensurabili in lunghezza, e commensurabili solamente in potenza alla Rationale A. E queste sono le Rationali del terzo genere, come fù proposto fare, e dimostrare.

a 12. del 10.
b 14. del 10.

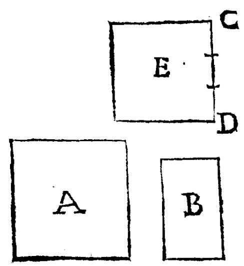
Volendosi ritrouare quante si voglia linee Rationali commensurabili frà loro in lunghezza, si operi in questo modo. Si espongano tanti numeri B,C,D, per quante sono le Rationali da trouarsi, e si prendano altrettante rette E,F,G, multiplici di A, in modo, che la retta E contenga tante volte A, per quante vnità sono nel numero B, si faccia similmente che la retta F contenga tante volte A, per quante vnità sono nel numero C, e che la retta G contenga tante volte A, per quante vnità sono nel numero D; essendo A commune misura delle rette E,F, G, saranno le rette E,F,G, commensurabili frà loro in lunghezza, e saranno Rationali, stante che sono commensurabili alla Rationale A.



LEMMA.

Quello spatio, ch'è commensurabile allo spatio Rationale, è ancora Rationale.

Sia lo spatio A Rationale, al quale sia commensurabile lo spatio B. Dico che lo spatio B è Rationale. S'intenda CD la Rationale, alla quale deuono essere comparate le altre grandezze, il di cui quadrato sia E; per l'ottaua definitione di questo, sarà il quadrato E quello, che chiamiamo Rationale, al quale deuono essere comparati gli altri piani. Perche lo spatio B è supposto Rationale, sarà dunque B [a] Rationale rispetto al Rationale E, e perciò i due B, & E, sono commensurabili. In oltre, perche gli spatij E, ed A sono commensurabili al medesimo spatio B, sarà A [b] commensurabile al Rationale E; e, per la 6. definitione di questo, lo spatio A sarà Rationale, ch'era da dimostrarsi.



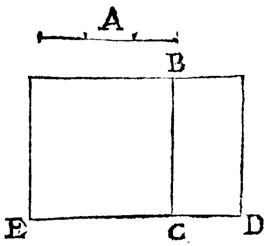
a 9. defin. del 10.
b 12. del 10.

THEO-

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XX.

Il rettangolo, contenuto da linee rette Rationali in lunghezza, e commensurabili secondo qualch'vno de i modi sopradetti, sarà Rationale.

Sia esposta la Rationale A, e lo spatio rettangolo BD, il quale sia contenuto dalle rette Rationali in lunghezza BC, CD, e commensurabili secondo vno de i tre predetti modi, spiegati nel secondo de gli antecedenti Scolij; cioè, che l'vno, ò l'altro de i lati, BC, CD, sia vguale all' esposta Rationale A; ò che nissuno di essi sia vguale alla Rationale A; mà che ambidue ò siano commensurabili in lunghezza, ò commensurabili solamente in potenza alla Rationale A. Dico che il rettangolo BD sarà Rationale. Sopra vno de i lati BC, CD, per essempio, sopra
a 46. del 1. al lato BC, [a] si descriua il quadrato EB. Perche la retta BC, per ipotesi, è Rationale, sarà BC commensurabile, ò in lunghezza, ò solamente in potenza all' esposta Rationale A: per la qual cosa il qua-
b 3. defin. del 10. c 8. defin. del 10. drato di BC, cioè il quadrato EB, [b] sarà commensurabile al quadrato della Rationale A: mà il quadrato della Rationale A [c] è quel Rationale, rispetto al quale, tutti gli altri spatij, che gli sono commensurabili, sono Rationali; essendo il piano EB, commensurabile al quadrato della Rationale A,
d 9. defin. del 10. sarà il quadrato EB [d] Rationale. In oltre, perche BC, come lato del quadrato BE, è vguale ad EC, e la retta BC, per ipotesi, è commensurabile in lunghezza al lato CD, sarà EC commensurabile in lunghezza al medesimo lato CD. Si considerino i rettangoli EB, BD, i quali hanno la medesima altezza BC; sarà il rettan-
e 1. del 6. f 10. del 10. golo EB al rettangolo BD, [e] come la base EC alla base CD, mà EC è dimostrata commensurabile in lunghezza al lato CD, sarà il piano EB [f] commensurabile al piano BD. E perche il quadrato EB è dimostrato Rationale, il rettangolo BD, ch'è commensurabile allo spatio Rationale EB, per l'antecedente Lemma, sarà Rationale, il che era da dimostrarsi.



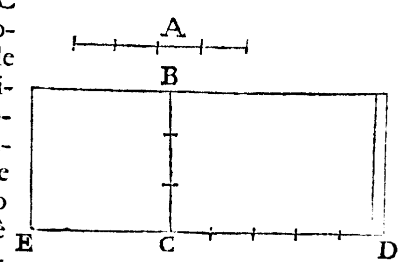
THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XXI.

Se vn rettangolo Rationale sarà applicato ad vna retta Rationale; l'altro lato sarà Rationale, e sarà ancora commensurabile in lunghezza à quel lato, al quale è fatta l'applicatione.

Sia esposta la Rationale A, alla quale tutte le altre si comparano; e sia data la retta BC Rationale, secondo vno de i tre detti modi, spie-

gati

gati nello Scolio secōdo alla 19. propositione di questo; cioè che ò BC sia vguale, ò non vguale alla Rationale A, sia però ò commensurabile in lunghezza, ouero commensurabile solamente in potenza, alla esposta Rationale A, e si applichi alla rationale BC il rettangolo Rationale BD, e ne risulti il lato CD. Dico che il lato CD è Rationale, ed è commensurabile in lunghezza al la-

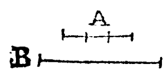


to BC. Sopra al lato BC [a] si descriua il quadrato EB. Essendo BC, per a 46. del 1.
ipotesi, Rationale, dimostraremo, come nell'antecedente propositione si fece, che il quadrato EB è Rationale. Hor essendo BD, per ipotesi, Rationale, ed il quadrato EB, per quel che si è dimostrato, è Rationale; saranno gli spatij BE, BD [b] commensurabili al quadrato della Ratio- b 9. defin. del 10.
nale A; e perciò i rettangoli EB, BD, [c] sono commensurabili frà loro. c 12. del 10.
In oltre perche i rettangoli EB, BD, hanno la medesima altezza BC, sarà il quadrato EB al rettangolo BD, come la base EC, ouero BC, alla base CD: mà il quadrato EB è dimostrato commensurabile al rettangolo BD; sarà BC [d] commensurabile alla retta CD; dal che le rette BC, d 10. del 10.
CD sono frà loro commensurabili in lunghezza. E perche le Rationali CB, ed A, sono commensurabili ò in lunghezza, ouero commensurabili solamente in potenza; essendo CB commensurabile à CD, sarà ancora A [e] commensurabile à CD ò in lunghezza, ouero commensurabile sola- e 12. del 10.
mente in potenza. Hor essendo CD commensurabile alla rationale A ò in lunghezza, ouero commensurabile solamente in potenza, per la sesta definitione di questo, sarà CD Rationale. Per la qual cosa, applicato il piano Rationale BD al lato Rationale BC, ne risulta il lato CD Rationale, e commensurabile in lunghezza al lato BC, ch'era da dimostrarsi.

LEMMA I.

Il lato di qualunque quadrato, vguale à qualche spatio Irrationale, è Irrationale.

Sia il quadrato di qualche retta linea B vguale à qualche spatio Irrationale, cioè, che sia Irrationale. Dico che la retta linea B è ancora Irrationale. Si esponga la Rationale A. Se la retta linea B non è Irrationale, quella necessariamente sarà Rationale, e per la sesta definitione, sarà commensurabile ad A ò in lunghezza, ouero solamente in potenza, e percio il quadrato della retta B sarà commensurabile al quadrato della Rationale A; e per la



nona

nona definitione, il quadrato di B sarà Rationale, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque la retta linea B è Rationale, mà sarà Irrationale, ch'era da dimostrarsi.

Il medesimo si caua dalla definitione vndecima di questo, doue si disse, che le rette linee, i di cui quadrati sono Irrationali, si chiamano Irrationali.

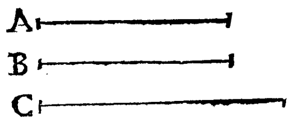
COROLLARIO.

Da quel, che si è detto nell'antecedente Lemma, e da quel, che si disse nella dimostratione alla 20. propositione, si caua, che il quadrato d'vna retta Rationale è Rationale.

LEMMA II.

Ritrouare due, ò più rette, Rationali, commensurabili solamente in potenza.

Le rette Rationali, che sono commensurabili frà di loro solamente in potenza, sono di due generi; cioè, ò vna di quelle è vguale all'esposta Rationale, ò ambedue sono ineguali alla detta Rationale. Habbiansi prima da trouare quelle del primo genere; cioè quelle, delle quali vna è vguale all'esposta Rationale. Sia dunque l'esposta Rationale A, e sia la retta B vguale ad A. Poi si troui la



a 11. del 10. *retta C, a commensurabile solamente in potenza alla retta B; sarà ancora C commensurabile solamente in potenza alla Rationale A; e per la sesta definitione di questo, sarà la retta C Rationale: mà B, per essere vguale ad A, è ancora Rationale; le due dunque B, C, sono Rationali, e sono commensurabili solamente in potenza, delle quali B è vguale alla Rationale A, ch'era da farsi nel primo luogo.*

Per trouare quelle del secondo genere; cioè, che nissuna delle due sia vguale all'esposta Rationale. Sia di nuouo esposta la Rationale A, e si troui

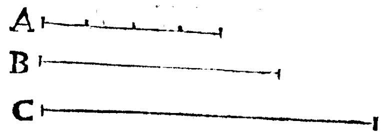
b 11. del 10. *la retta B, b commensurabile solamente in potenza alla Rationale A, per la sesta definitione di questo, B sarà Rationale. Similmente si troui la retta*

c 11. del 10. *C, c commensurabile solamente in potenza alla retta B. Perche A, & B,*

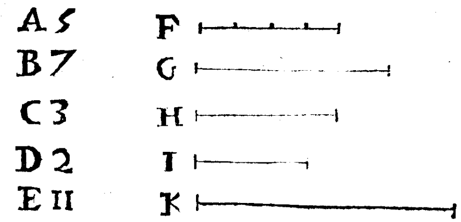
sono

sono commensurabili frà di loro solamente in potenza, e la retta B, per costruttione, è commensurabile à C solamente in potenza; sarà A d commensu- d Scol. alla 12. propos. del 7.

rabile à C solamente in potenza. Hor essendo C commensurabile ad A, solamente in potenza, per la sesta definitione, C sarà Rationale. Per la qual cosa le due B, & C sono Rationali, e sono commensurabili frà di loro solamente in potenza, delle quali nissuna è vguale alla Rationale A, come fù proposto ritrouare.



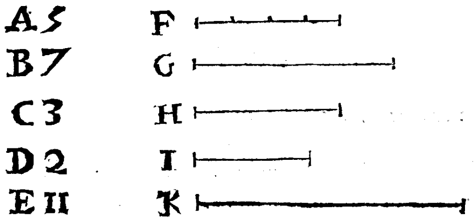
Bisognando poi ritrouare quante rette Rationali si vogliano, commensurabili solamente in potenza, si operi nel seguente modo.



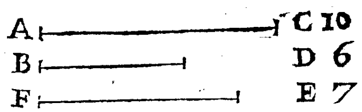
Si espongano tanti numeri primi, per quante rette Rationali si vogliano, come sono i numeri A, B, C, D, E; poi si prenda la Rationale F, e si faccia come il numero A al numero B, così il quadrato di F al quadrato di vn altra rètta, che sia G, come si disse nel Corollario alla sesta propositione di questo. Di nuouo si faccia come il numero B al numero C, così il quadrato di G al quadrato d'vn altra retta, che sia H. E similmente, si faccia come il numero C al numero D, così il quadrato di H al quadrato di I, e come il numero D al numero E, così il quadrato di I al quadrato di K; e con quest'ordine in infinito. Dico che le rette F, G, H, I, K sono Rationali, commensurabili solamente in potenza. Perche il quadrato di F al quadrato di G è come A à B; ed il quadrato di G al quadrato di H è come B à C; ed ancora il quadrato di H al quadrato di I è come C à D; ed il quadrato di I al quadrato di K è come D ad E; sarà per l'egualità, il quadrato di F al quadrato di K come A ad E; e similmente il quadrato di F al quadrato di I sarà come A à D, il quadrato di F al quadrato di H, come A à C; il quadrato di G al quadrato di K, come B ad E; il quadrato di G al quadrato di I, come B à D; ed il quadrato di H al quadrato di K, come C ad E. Per la qual cosa i quadrati delle rette F, G, H, I, K sono come i numeri A, B, C, D, E, e per la sesta propositione di questo, i quadrati delle rette F, G, H, I, K sono frà di loro commensurabili; dal che le rette F, G, H, I, K sono commensurabili in potenza. Dico che le rette F, G, H, I, K sono incommensurabili in lunghezza. Perche i quadrati delle rette F, G, H, I, K, sono come i numeri primi A, B, C, D, E; ed i numeri

meri

meri primi, per il Corollario all'vltimo Scolio dell'ottauo Libro non ſono come i numeri quadrati; in conſeguenza i quadrati delle rette F, G, H, I, K, non ſono come i numeri quadrati; e per la nona propoſitione di queſto, le rette F, G, H, I, K ſono incommenſurabili in lunghezza; furono dimoſtrate commenſurabili in potenza; ſaranno dunque le rette F, G, H, I, K, commenſurabili ſolamente in potenza. Finalmente, perche F, per ipoteſi, è Rationale, ed i quadrati delle rette G, H, I, K ſono comparati al quadrato della Rationale F; perciò le rette F, G, H, I, K ſono Rationali. E coſi ſarà manifeſto il modo da trouare quante ſi voglia rette Rationali, commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.



Se ſaranno propoſte quante ſi voglia rette Rationali commenſurabili ſolamente in potenza, e ſe ne vogliano ritrouare delle altre, che con le propoſte ſiano commenſurabili ſolamente in potenza, ſi operi in queſto modo. Siano propoſte le due Rationali A, B, commenſurabili ſolamente in potenza, ed il quadrato di A al quadrato di B ſia come il numero C al numero D, ſi prenda qualunque altro numero E, non quadrato, che ſia primo à ciaſcuno de numeri C, & D, poi ſi faccia per il Corollario alla ſeſta propoſitione di queſto, come il numero D al numero E coſi il quadrato della retta B al quadrato d'vn altra retta come F. Dico che la retta F è Rationale commenſurabile ſolamente in potenza alle due A, & B, perche il quadrato della retta B al quadrato della retta F è come il numero D al numero E: perciò i quadrati delle rette B, ed F ſono commenſurabili, e le rette B, ed F ſono commenſurabili almeno in potenza; mà la retta B è ſuppoſta Rationale, la retta dunque F, che gl'è commenſurabile, ſarà Rationale. In oltre perche D ad E ſono numeri primi, per quel, che ſi diſſe nel fine dell'ottauo Elemento non ſono frà loro come numero quadrato à numero quadrato, mà per coſtruttione il numero D al numero E è come il quadrato della retta B al quadrato della retta F, il quadrato dunque della retta B al quadrato della retta F non è come numero quadrato à numero quadrato, e per la nona propoſitione di queſto, le rette B, ed F ſono incommenſurabili in lunghezza, e perciò ſono commenſurabili ſolamente in potenza. Finalmente eſſendo il quadrato di A al quadrato di B come il numero C al numero D, ed il quadrato di B al quadrato di F è come il numero D al numero E; per l'egualità il quadrato di A al quadrato di F ſarà come il numero C al numero E; mà li numeri C ed E per eſſere numeri primi nō ſono come numero quadrato à numero quadrato, in conſeguenza il quadrato di A al quadrato di F non ſarà come numero quadrato à numero quadrato,

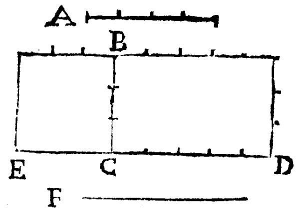


e per la 9. propoſitione di queſto, le rette A, ed F, ſono incommenſurabili in lunghezza, mà ſono commenſurabili in potenza, ſtante che li loro quadrati ſono come i numeri C & E; ſaranno dunque le rette A, & F, Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, come fù propoſto fare, e dimoſtrare. Nell'iſteſſo modo ſe ne poſſono trouare quante ſi voglia altre.

THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXII.

Il rettangolo, contenuto da due rette linee Rationali, e commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza, è Irrationale: e la retta linea, il di cui quadrato è vguale al detto rettangolo, è parimente Irrationale; e queſta retta linea ſi chiamerà Media.

Sia eſpoſta la Rationale A, ed il propoſto rettangolo ſia BD, il quale ſia contenuto da i lati BC, CD, Rationali, e frà di loro commenſurabili ſolamente in potenza, ſecondo vno de gli antedetti modi, ſpiegati nel ſecondo de gli antecedenti Lemma; cioè ò che vno de i lati BC, CD ſia vguale alla rationale A, ouero ambidue ſiano inegualі alla Rationale A. Dico che il rettangolo BD è Irrationale, e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo BD, ſarà ancora Irrationale, e ſi chiamerà Media. Sopra ad vno de i lati BC, CD, per eſſempio, ſopra al lato BC, [a] ſi deſcriua il quadrato BE. Perche BC, per ipoteſi, è Rationale, per il Corollario dopo la vigeſima propoſitione, ſarà il quadrato EB Rationale, e perciò [b] ſarà commenſurabile al quadrato della Rationale A. In oltre, perche i due rettangoli EB, BD, hanno la medeſima altezza BC, ſarà il quadrato EB al rettangolo BD [c] come la baſe EC, ouero BC, alla baſe CD: mà BC (per eſſere commenſurabile ſolamente in potenza à CD) è incommenſurabile in lunghezza alla medeſima CD; ſarà il quadrato EB [d] incommenſurabile al rettangolo BD. Finalmente perche il quadrato EB è commenſurabile al quadrato della Rationale A, e ſi è dimoſtrato il quadrato EB eſſere incommenſurabile al rettangolo BD, ſarà il quadrato di A [e] incommenſurabile al rettangolo BD. Hor eſſendo il rettangolo BD incommenſurabile al quadrato della Rationale A, per la definitione decima, il rettangolo BD ſarà Irrationale. Frà li due lati BC, CD, [f] ſi troui vna media proportionale, che ſia F; il quadrato della retta F [g] ſarà vguale al rettangolo BD: mà il rettangolo BD è irrationale, ſarà il quadrato della retta F irrationale, e per il primo de gli antecedenti Lem-



a 46. del I.

b 9. defin. del 10.

c 1. del 6.

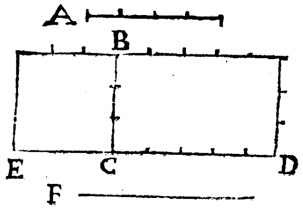
d Scol. alla prop. 10. del 10.

e 14. del 10.

f 13. del 6.

g 17. del 6.

ma, ſarà la retta F irrationale; la quale, eſſendo media proportionale frà i due lati BC,CD, commenſurabili ſolamente in potenza, ſi chiamerà Media. Per la qual coſa il rettangolo, contenuto da i lati BC, CD, commenſurabili ſolamente in potenza, è irrationale; e la retta F, il di cui quadrato è vguale allo irrationale BD, è parimente irrationale; la quale ſi chiamerà Media, come fù propoſto dimoſtrare.



S C O L I O.

Deueſi però auuertire, che non tutte le rette, che ſono medie proportionali frà due lati, che contengono vn rettangolo, ſi deuono chiamare Medie, mà quando ſi dirà Media, s'intenderà quella retta, ch'è media proportionale frà le due rette Rationali, e frà di loro commenſurabili ſolamente in potenza.

Fù dimoſtrato dopo la prima propoſitione del ſeſto Libro, che, ſe ſaranno due qualunque rette linee, come BC, CD, il quadrato dell'vna al rettangolo, contenuto dalle due, è come il medeſimo rettangolo al quadrato dell'altra; cioè, il quadrato di BC al rettangolo BD, è come il medeſimo rettangolo BD al quadrato di CD; dal che il rettangolo BD è medio proportionale frà il quadrato del lato BC, ed il quadrato del lato CD; e perciò vuole il Campano, che non ſolo la retta F debba chiamarſi media, mà il rettangolo ancora BD, ed il quadrato della retta F, che gli è vguale, ſi debba chiamare Medio. E qui ancora ſi deue auuertire, che, quando vn rettangolo ſi chiamerà con queſta voce, Medio, dobbiamo intendere quello, ch'è contenuto da i lati commenſurabili ſolamente in potenza, ed il quadrato della ſudetta media F, ch'è vguale al medio BD, ſarà quello, che ſi chiamerà ancora Medio.

THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXIII.

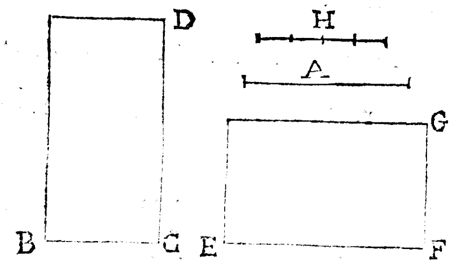
Se à qualche retta Rationale è applicato vn rettangolo, vguale al quadrato della media; l'altro lato del rettangolo ſarà Rationale, e ſarà incommenſurabile in lunghezza à quella Rationale, alla quale fù fatta l'applicatione.

Sia la media A, e qualunque retta Rationale BC, alla quale ſia applicato il rettangolo BD, [a] vguale al quadrato della media A. Dico che il lato CD è Rationale, ed è incommenſurabile in lunghezza al lato BC. Perche la retta A, per ipoteſi, è media, il ſuo quadrato ſarà vguale à quel rettangolo, ch'è contenuto da due rette Rationali, e frà di loro commenſurabili ſolamente in potenza; altrimente, per lo Scolio antecedente,

a 45.del 1.

ceden-

cedente, la retta A non ſarebbe quella, che chiamiamo Media. Sia quel rettangolo il notato EG, contenuto da i due lati Rationali EF, FG, commenſurabili frà di loro ſolamente in potenza. Eſſendo il rettangolo BD, per coſtruttione, vguale al quadrato della Media A, ed il rettangolo EG vguale al medeſimo quadrato di A; ſarà il rettangolo BD vguale al rettangolo EG: per la qual coſa i rettangoli BD, EG [b] hanno i lati reciprochi intorno à gli angoli vguali; e ſarà come BC ad EF, così FG al lato CD; ed il quadrato di BC al quadrato di EF [c] ſarà come il quadrato di FG al quadrato di CD: ma il quadrato di BC è commenſurabile al quadrato di EF (ſtante che le rette BC, EF, ſono ſuppoſte Rationali) in conſeguenza il quadrato di FG [d] ſarà commenſurabile al quadrato di CD; e perciò le rette FG, CD ſono commenſurabili almeno in potenza. E perche BC è ſuppoſta Rationale, ſe BC ſarà quella Rationale, alla quale ſi comparano tutte le altre, eſſendo DC commenſurabile almeno in potenza alla Rationale BC; ſarà DC [e] Rationale; e ſe BC non è quella Rationale, alla quale ſi comparano tutte le altre, ſia quella la retta H. Perche BC è ſuppoſta Rationale, ſarà BC [f] commenſurabile, almeno in potenza, alla eſpoſta Rationale H: ma CD è commenſurabile, almeno in potenza, alla retta BC; ſarà ancora DC [g] commenſurabile, almeno in potenza, all'eſpoſta Rationale H: per la qual coſa la retta CD [h] ſarà Rationale. Dico finalmente, che CD è incommenſurabile in lunghezza alla retta BC. Si prendano i due lati EF, FG come baſi di due rettangoli, e l'altezza commune ſia EF; ſarà il quadrato di EF al rettangolo, contenuto dalle due EF, FG, [K] come la baſe EF alla baſe FG. Nell'iſteſſo modo, preſe DC, & CB, come baſi di due rettangoli, e ſia DC l'altezza commune, ſarà il quadrato di DC al rettangolo DCB, come DC à CB. In oltre, perche i lati EF, FG ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ſaranno dunque incommenſurabili frà di loro in lunghezza; e perche il quadrato di EF al rettangolo EFG, per quel, che ſi è dimoſtrato, è come EF ad FG; eſſendo EF incommenſurabile in lunghezza ad FG, ſarà il quadrato di EF [l] incommenſurabile al rettangolo EFG: fù moſtrato il rettangolo EFG vguale al rettangolo BCD; ſarà il quadrato di EF incommenſurabileal rettangolo BCD. Di più, perche le rette EF, CD ſono Rationali, ſaranno almeno commenſurabili frà di loro in potenza; e perciò il quadratodi EF ſarà commenſurabile al quadrato di CD: ma il quadrato di EF è dimoſtrato incommenſurabile al rettangolo DCB; ſarà il quadrato di DC [m] incommenſurabile al rettangolo DCB: ma il quadrato di DC al rettangolo DCB, per quel, che ſi è dimoſtrato, è come DC à CB; eſſendo il quadrato di DC incommenſura-

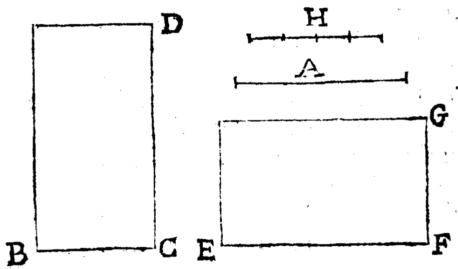


b 14.del 6.
c 22.del 6.
d 10.del 10.
e 6. defin. del 10.
f 6. defin. del 10.
g 12.del 10.
h 6. defin. del 10.
K 1. del 6.
l 10.del 6.
m 13.del 10.

bile

n 13. del 10. bile al rettangolo DCB, farà il lato DC [n] incommenfurabile al lato BC. Per la qual cofa il lato DC è incommenfurabile in lunghezza al lato BC, ch'era da dimoftrarfi.

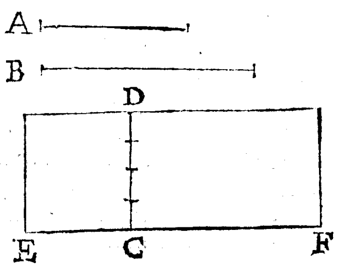
S C O L I O.



Perche il quadrato della media A è vguale al rettangolo BD, applicato alla Rationale BC; farà A media proportionale frà i lati BC, CD; e perciò applicando à qualche Rationale BC il quadrato della media A, ne rifulterà la terza proportionale CD. Si che, nelle cofe à venire, douendofi applicare à qualche Rationale BC il quadrato della media A, per facilità, fi faccia come la Rationale BC alla media A, così A ad vn altra, che ne rifulterà il terzo lato CD; ed in quefto modo faremo liberi dalla lunga operatione, che bifognarebbe fare, operandofi come nella 45. propof. del primo lib.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIV.

La retta linea, commenfurabile alla Media, è Media.



Sia la retta linea B, commenfurabile alla media A, ò che fia commenfurabile in lunghezza, e potenza, ò fia commenfurabile in potenza folamente. Dico che la retta B farà Media. Sia efpofta la Rationale DC, alla quale fia applicato il rettangolo
a Scol. antecedente. DE, [a] vguale al quadrato della media A, per lo Scolio alla propof. 22, farà il rettangolo ED medio, il quale,
b 23. del 10. applicato alla Rationale DC, fà il lato EC [b] Rationale, ed incommenfurabile al lato DC in lunghezza. Di nuouo fi applichi alla Rationale
c Scol. antecedente. DC [c] il rettangolo DF, vguale al quadrato della retta B; e perche le
d 9. del 10. rette A, & B, per ipotefi, fono commenfurabili, i loro quadrati [d] faranno frà loro commenfurabili, ed i rettangoli DF, DE, che fono vguali à i loro quadrati, faranno frà di loro commenfurabili: ma il rettangolo DE al
e 1. del 6. rettangolo DF [e] è come la bafe EC alla bafe CF; effendo il rettangolo
f 10. del 10. ED commenfurabile al rettangolo DF, farà EC [f] commenfurabile alla retta CF: ma EC è dimoftrata incommenfurabile alla Rationale CD,
g 14. del 10. farà CF [g] incommenfurabile alla Rationale CD. In oltre perche EC è

dimo-

dimoftrata Rationale, non effendo commenfurabile alla Rationale CD in lunghezza, farà neceffariamente [h] alla Rationale CD commenfurabile in potenza; perche, fe fuffe altrimente, CD non farebbe Rationale. Hor h 6. defin. del 10.
effendo le due EC, CF, commenfurabili in lunghezza, faranno ancora [K] commenfurabili frà loro in potenza: ma EC è commenfurabile in potenza alla Rationale CD, farà ancora CF commenfurabile in potenza alla K 9. del 10.
Rationale CD; e perciò CF [l] farà Rationale: per la qual cofa le due DC, CF fono Rationali, e commenfurabili frà di loro folamente in potenza; l 6. defin. del 10.
e per lo Scolio alla propof. 22, il rettangolo DF è medio. Finalmente, perche il quadrato della retta B è vguale al rettangolo DF, contenuto da i lati DC, CF, Rationali, e commenfurabili frà di loro folamente in potenza, perciò la retta B [m] farà Media. Per la qual cofa la retta, ch'è commenfurabile alla Media, è Media, ch'era da dimoftrarfi. m 22. del 10.

COROLLARIO I.

Da quel, che fi è detto, appare, che il rettangolo, il quale è commenfurabile al Medio, è ancora Medio; mentre fi è dimoftrato, che il rettangolo DF, commenfurabile al medio DE, è Medio.

COROLLARIO II.

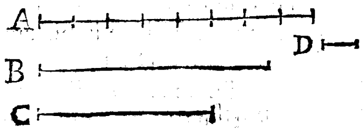
Le rette linee frà di loro commenfurabili, per la nona propofitione, ò fono commenfurabili in lunghezza, e potenza, ouero fono commenfurabili folamente in potenza. E perche la retta, ch'è commenfurabile alla Media, per l'antecedente propofitione, è Media; farà manifefto, che due Medie, frà di loro commenfurabili, ò faranno commenfurabili in lunghezza, e potenza, ouero faranno commenfurabili folamente in potenza; fe faranno commenfurabili in lunghezza, e potenza; fi chiameranno Medie commenfurabili in lunghezza; ed in quefta voce vi fi comprende ancora commenfurabili in potenza: e fe faranno commenfurabili folamente in potenza, fi chiameranno Medie commenfurabili folamente in potenza.

L E M M A.

Ritrouare quattro Medie, cioè due commenfurabili in lunghezza, e due altre commenfurabili folamente in potenza.

Sia

Sia esposta qualunque Media A, e si troui la retta B, commensurabile in lunghezza alla media A; che si fà col diuiderla in quante parti vguali si vogliano, ed vna di quelle parti sia D; poi si prenda la retta B, multiplice di D, secondo qualunque multiplicatione; sarà D commune misura delle due A, & B, e percio le due A, & B, sono commensurabili in lunghezza. In oltre, per l'vndecima di questo, si troui la retta C, commensurabile solamente in potenza alla retta A, cioè che sia solamente incommensurabile in lunghezza, e per l'antecedente propositione, essendo le due B, & C, commensurabili ad A, cioè vna commensurabile in lunghezza, e l'altra solamente in potenza, quelle saranno Medie; ed in questo modo saranno ritrouate le due Medie A, & B, commensurabili in lunghezza, e saranno ritrouate ancora le due Medie A, & C, commensurabili solamente in potenza, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXV.

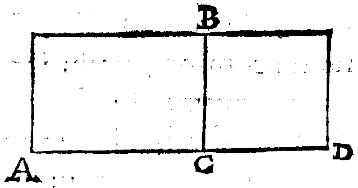
Il rettangolo, contenuto da due rette Medie, commensurabili in lunghezza, è Medio.

Sia il rettangolo AB, contenuto dalle due rette AC, BC, le quali siano Medie, commensurabili frà di loro in lunghezza. Dico che il rettangolo AB è Medio.

a 46. del 1.

Sopra la media BC [a] si descriua il quadrato BD; per lo Scolio alla propositione 22. il quadrato BD sarà Medio. Si considerino i rettangoli AB, BD, che hanno la medesima altezza BC; sarà il rettangolo AB al rettangolo BD, [b] come la base AC alla base CD, ouero CB: ma AC, per ipotesi, è commensurabile in lunghezza à CB, ouero CD; sarà il rettangolo AB, [c] commensurabile al Medio BD, e per il Corollario 1. all'antecedente propositione, sarà il rettangolo AB Medio. Per la qual cosa il rettangolo, contenuto dalle medie, commensurabili in lunghezza, è Medio, ch'era da dimostrarsi.

b 1. del 6.
c 10. del 10.



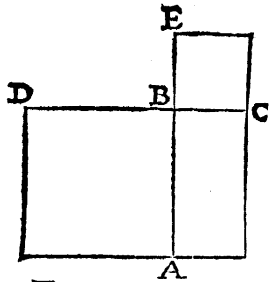
THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVI.

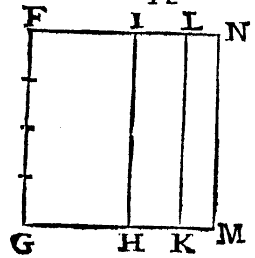
Il rettangolo contenuto dalle rette, che sono Medie,

com-

commensurabili solamente in potenza, ò è Rationale, ouero è Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalle rette AB, BC, che siano medie, commensurabili solamente in potenza. Dico che il rettangolo AC, ò è Rationale, ouero è Medio. Sopra i lati AB, BC si descriuano i quadrati AD, CE. Perche le due AB, BC, per ipotesi, sono Medie, per lo Scolio alla 22. propositione, i loro quadrati AD, CE, sono Medij. Si esponga la Rationale FG, alla quale si applichi il rettangolo FH, [a] vguale al quadrato AD; al lato IH si applichi il rettangolo IK, vguale al rettangolo AC; ed al lato KL si applichi il rettangolo LM, vguale al quadrato CE. Perche gli angoli in H,K,I,L sono retti, le rette GH, HK, KM [b] costituiscono vna sola retta linea; e le rette FI, IL, LN costituiscono similmente vna sola retta linea; dal che tutto il quadrilatero FGMN sarà vn solo parallelogrammo. E perche le rette FG, IH, LK, NM [c] sono frà di loro vguali, essendo FG Rationale, sarà ancora IH, ouero LK, Rationale. E perche i quadrati AD, CE sono Medij, i rettangoli ancora FH, LM, che sono vguali à quei quadrati, saranno Medij; i quali, applicati alle Rationali FG, LK, ne risultano i lati GH, KM [d] Rationali, ed incommensurabili alle Rationali FG, LK; ed essendo le rette AB,BC, commensurabili in potenza, i loro quadrati AD,CE saranno commensurabili, ed i rettangoli FH,LM, che sono vguali à i medesimi quadrati, saranno frà di loro commensurabili. In oltre, essendo i rettangoli FH, LM, sotto vguali altezze, sarà il rettangolo FH al rettangolo LM, [e] come la base GH alla base KM: ma il rettangolo FH è dimostrato commensurabile al rettangolo LM, sarà GH [f] commensurabile ad MK; e perciò le rette GH,KM sono commensurabili in lunghezza. E perche le rette GH,KM sono state dimostrate Rationali, in conseguenza [g] saranno commensurabili alle Rationali FG, LK: ma si disse, che le rette GH, KM sono incommensurabili in lunghezza alle Rationali FG,LK; saranno dunque le rette GH, KM, commensurabili solamente in potenza alle Rationali FG,LK, e commensurabili frà di loro in lunghezza; e per la 20. propositione di questo, il rettangolo contenuto dalle due GH,KM, sarà Rationale. Di più, essendo AB vguale à DB, ed il lato BC vguale ad EB, sarà AB à BE, [h] come DB à BC, cioè [K] come DA ad AC: ma AB à BE è come AC à CE, sarà DA ad AC, [l] come AC à CE; dal che i tre AD,AC,CE sono continui proportionali; ma i tre DA, AC, CE sono vguali à i tre FH, IK, LM; saranno i tre FH, IK, LM continui proportionali. E perche i tre

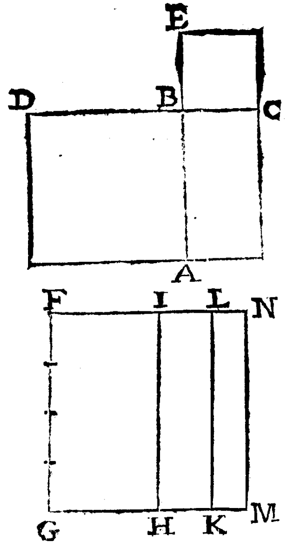




a 45. del 1.
b 14. del 1.
c 34. del 1.
d 32. del 10.
e 1. del 6.
f 10. del 10.
g 6. defin. del 10.
h Corol. alla 7. del 5.
K 1. del 6.
l 11. del 5.

rettan-

m 1.del 6. rettangoli FH, IK, LM [m] sono come le basi GH, HK, KM, saranno le rette
GH, HK, KM, continue proportionali, ed il rettangolo delle estreme GH,
n 17.del 6. KM, [n] sarà vguale al quadrato della
media HK; ma il rettangolo conte-
nuto dalle due GH, KM, fù dimo-
strato Rationale; il quadrato dun-
que di HK sarà Rationale; e per la 9.
definitione di questo, il quadrato di
HK sarà commensurabile al quadra-
to della Rationale IH, ouero FG;
o 6.defin. del 6. dal che HK [o] sarà Rationale, e sarà
commensurabile alla Rationale HI,
ouero FG, ò in lunghezza, ouero so-
lamente in potenza. Se la Rationale
HK è commensurabile in lunghezza
alla Rationale HI, sarà il rettangolo
IK, contenuto dalle rationali IH, HK
p 20.del 10. commensurabili in lunghezza, [p] Ra-
tionale: ma il rettangolo IK è fatto
vguale al rettangolo AC, sarà, in
tal caso, AC Rationale. Se poi la
Rationale HK sarà commensurabile
alla Rationale IH solamente in po-
tenza, il rettangolo IK, contenuto dalle Rationali IH, HK, commensu-
q 22.del 10. rabili solamente in potenza, [q] sarà Medio; ma il rettangolo IK è vguale
al rettangolo AC; il rettangolo dunque AC, in questo caso, sarà Me-
dio, come fù proposto dimostrare.



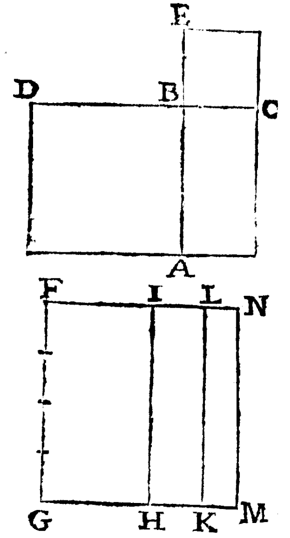
CONSETTARIO.

a 20.del 10. Dalle cose dette si conclude, che [a] il rettangolo, con-
tenuto da due rette Rationali, e commensurabili in lun-
b 22.del 10. ghezza, è Rationale; che [b] il rettangolo, contenuto da
due rette Rationali, commensurabili solamente in poten-
za, è Irrationale, e si chiama Medio; ed il quadrato, che
gli è vguale, si chiama Medio; il di cui lato si dice pari-
c 25.del 10. mente Media; che [c] il rettangolo, contenuto da due rette
d 26.del 10. Medie, commensurabili in lunghezza, è Medio; e che [d]
il rettangolo, contenuto da due rette Medie, commensu-
rabili solamente in potenza, ò è Rationale, ouero è Me-
dio.

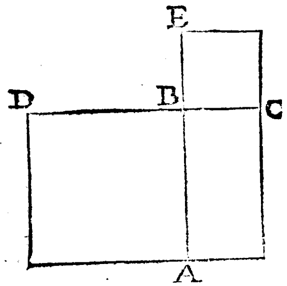
SCOLIO.

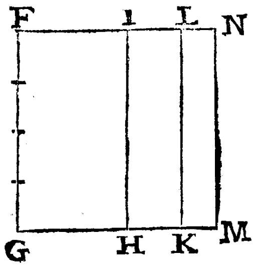
*Perche due rette Rationali non possono in altri modi essere commensurabili,
se non che ò in lunghezza, ò solamente in potenza, è manifesto dall'anteceden-
te Consettario, ch'Euclide sin qui hà spiegato la natura de i rettangoli conte-
nuti da quelle Rationali secondo i due predetti modi; poiche, nella 20. propo-
sitione hà dimostrato, che il rettangolo, contenuto da due Rationali, com-
mensurabili in lunghezza, è Rationale; e quello, contenuto da due rationa-
li, commensurabili solamente in potenza, è Medio; e quella retta, il di cui
quadrato è vguale all'antedetto Medio, la chiama Media. E perche le me-
die ancora, ò sono commensurabili in lunghezza, ouero solamente in potenza,
hà dimostrato, che il rettangolo, contenuto da due medie, commensurabili in
lunghezza, è ancora Medio; e che il rettangolo, contenuto da due medie,
commensurabili solamente in potenza, ò è Rationale, ouero è medio. Resta
solo d'inuestigare, qual rettangolo sia quello, ch'è contenuto da due Medie
incommensurabili in lunghezza, e potenza; al che supplisce il P. Clauio, col
dimostrare, che quello non è Rationale, ne Medio; mà che costituisce vn ter-
zo genere; stante che è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e da
quella retta, che si chiama Media; e la dimostratione è la seguente.*

*Sia il rettangolo AC, contenuto dalle due
Medie AB, BC, incõmensurabili in lunghez-
za, e potenza. Dico che il rettangolo AC non
è Rationale, ne meno è Medio, &c. s'inten-
tenda fatta la costruttione del antecedente
Theorema, e si dimostri, come iui si fece, che
le rette GH, KM sono Rationali; e che sono
alla Rationale FG, ouero LK, incommensura-
bili in lunghezza. E perche le medie AB, BC,
per ipotesi, sono incommensurabili in lunghez-
za, e potenza, perciò i loro quadrati AD, C
E, [a] ed i rettangoli FH, LM, che sono vgua-* a 9. del 10.
*li à quei quadrati, saranno incommensurabi-
li: mà FH ad LM [b] è come GH à KM; sa-* b 1. del 6.
ranno le rette GH, KM, [c] incommensurabili c 10. del 10.
*in lunghezza. E perche le rette GH, KM,
sono state dimostrate Rationali, perciò sono
frà di loro commensurabili solamente in potẽ-
za; ed il rettangolo, contenuto da esse rette G
H, KM, [d] sarà Irrationale, e sarà quello,
che si chiama Medio. Ed essendo il rettango-* d 22.del 10.
*lo, contenuto dalle due GH, KM, [e] per le cose dimostrate nell'antecedente
propositione, vguale al quadrato di HK, sarà il quadrato di HK Medio, ed* e 17.del 6.
*il lato HK sarà irrationale; ed è quella retta, che si chiama Media. Per la
qual cosa il rettangolo IK, ouero AC, non è Rationale; perche se fosse rationa-
le, applicato alla Rationale IH, l'altro lato HK [f] sarebbe rationale, ch'è con-
tro à quel, che si è dimostrato. Dico che ne meno IK è medio, perche, se fos-* f 21. del 10.



g 23.del 10 *se Medio, applicato alla Rationale HI, ne risultarebbe [g] il lato HK Ratio-*
nale, ed incommensurabile in lunghezza
alla Rationale HI: mà HK fù dimo-
strata irrationale, sarebbe Rationale, ed
irrationale, ch'è impossibile. Non dunque
il rettangolo IK, ouero AC, che gli è v-
guale, è Medio; nè meno, per quel, che si
è dimostrato, è Rationale; in conseguen-
za il rettangolo AC è d'vn altro gene-
re, vguale à quello, che è contenuto
dalla Rationale, come IH, e dalla
Media, per essempio HK. Donde ne
segue, che la retta, il di cui quadrato
è vguale al rettangolo, contenuto da
due Medie incommensurabili in lun-
ghezza, e potenza, come (per l'vltima
suppositione) sono le due AB, BC, non è
Media, mà è di quel genere di linee, il
di cui quadrato è vguale al rettangolo,
contenuto dalla Rationale, e dalla me-
dia, come sono le rette IH, HK, ch'è il
nostro proposito.

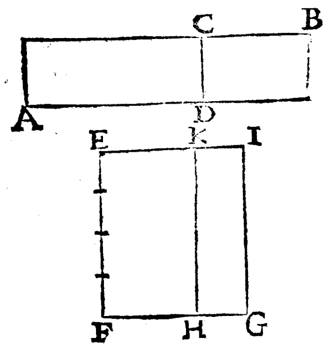




THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXVII.

Il Medio non supera il Medio per vno spatio Rationale.

Siano i due Medij AB, AC, ed il Medio AB superi il medio AC, per
quanto è il rettangolo DB. Dico che DB non è Rationale. Sia DB,
se è possibile, Rationale. Si esponga la Rationale EF, alla quale si ap-
a 45. del 1. plichi il rettangolo EG, [a] vguale
al Medio AB; ad alla medesima
Rationale EF sia applicato il ret-
tangolo EH, vguale al medio AC,
il rimanente KG sarà vguale al
Rationale DB, e perciò KG sarà
Rationale. Perche i Medij AB,
AC, cioè i rettangoli EG, EH, so-
no applicati alla Rationale EF, i
b 23.del 10 lati FG, FH [b] saranno Rationali,
ed ogn'vno incommensurabile in
lunghezza alla Rationale EF. Di
nuouo perche il Rationale KG è
applicato alla Rationale KH, oue-
c 21.del 10 ro EF, l'altro lato HG [c] sarà Rationale, commensurabile in lunghezza
alla Rationale EF. Hor perche le due EF, HG sono commensurabili in

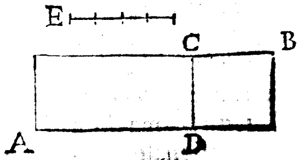


lunghezza, è la retta EF è dimostrata incommensurabile in lunghezza
ad FH, sarà HG [d] incommensurabile in lunghezza alla medesima FH. d 14.del 10.
Prese FH, ed HG come basi di due rettangoli, ed FH sia altezza com-
mune, sarà il quadrato di FH al rettangolo delle due FH, HG, [e] come e 1.del 6.
FH ad HG: mà FH è dimostrata incommensurabile in lunghezza ad HG;
sarà il quadrato di FH [f] incommensurabile al rettangolo delle due FH, f 10.del 10.
HG. In oltre perche le rette FH, HG, per quel, che si è dimostrato, so-
no Rationali, perciò i loro quadrati sono commensurabili, e l'aggregato
de i quadrati di FH, HG, [g] sarà commensurabile al quadrato di FH; mà il g 16.del 10.
quadrato di FH è Rationale; perciò l'aggregato de' quadrati di FH, HG,
che gl'è commensurabile per il Lemma, che antecede alla 20. propos. di
questo è Rationale. Similmente il doppio rettangolo, contenuto dalle due
FH, HG, è comensurabile al semplice rettangolo delle medesime FH, HG
(stante che il doppio rettangolo contiene il semplice due volte.) Hor per-
che i quadrati di FH, HG, giunti insieme, sono commensurabili al quadra-
to di FH, ed il quadrato di FH è incommensurabile al rettangolo delle
due FH, HG; l'aggregato de i due quadrati di FH, HG, [h] sarà incom- h 14.del 10.
mensurabile al rettangolo delle due FH, HG: mà il doppio rettangolo
delle due FH, HG, è commensurabile al semplice rettangolo delle due
FH, HG; sarà l'aggregato de i due quadrati di FH, HG, [K] incommen- K 14.del 10.
surabile al doppio rettangolo delle due FH, HG; e per la 17. di questo,
il Composto de i quadrati delle due FH, HG, col doppio rettangolo del-
le due FH, HG, sarà incommensurabile all'aggregato de i quadrati di
FH, HG: mà il Composto de i due quadrati FH, HG, col doppio rettan-
golo delle due FH, HG, [l] è vguale al quadrato di FG; sarà il quadrato l 4.del 2.
di FG incommensurabile all'aggregato de i quadrati di FH, HG: Mà l'ag-
gregato de i quadrati di FH, HG, per essere commensurabile al qua-
drato di FH, è Rationale, essendo il quadrato di FG incommensurabile
all'aggregato de i quadrati di FH, HG, ch'è Rationale, per la decima
definitione di questo, il quadrato di FG sarà irrationale; ed il lato FG [m] m 11.defin. del 10.
sarà irrationale, ch'è impossibile, mentre fù dimostrato, che la retta FG
è Rationale, incommensurabile in lunghezza alla Rationale EF. Non
dunque il rettangolo DB, ch'è la differenza di quanto il medio AB su-
pera il medio AC, è Rationale, che era da dimostrarsi.

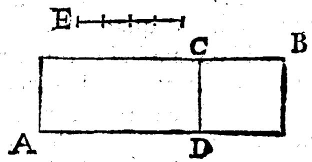
SCOLIO.

Il Rationale supera il Rationale per vno spatio Rationale.

Sia il Rationale AB, il quale su-
peri il Rationale AC, per il rettango-
lo DB. Dico che il rettangolo DB è
Rationale. Si esponga la Rationale
E, rispetto alla quale si comparano
tutte le altre. Perche i rettangoli AB,
AC sono Rationali, ogn'vno [a] sarà commensurabile al quadrato a 9. defin. del 10.



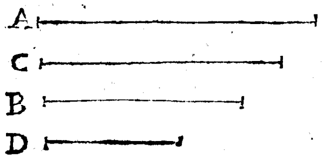
della Rationale E; e perciò [b] saranno frà di loro commensurabili. Hor essendo tutto il rettangolo AB, ch'è composto de i due AC, DB, commensurabile ad AC, sarà, per il Corollario alla 16. propos., il medesimo rettangolo AB commensurabile al rettangolo DB: ma AB, per ipotesi, è Rationale; sarà DB, per il Lemma, che antecede la 20. propos. Rationale, il che era da dimostrarsi.



b 12. del 10.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XXVIII.

Ritrouare due Medie, commensurabili frà di loro solamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale.



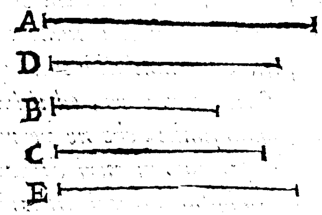
Si trouino, per il 2. Lem. dopo la 21. propos., due rette Rationali, e commensurabili solamente in potenza, che siano le notate A, & B; si troui frà le due A, & B, [a] vna media proportionale, che sia C; e si faccia si come A à B, così C [b] ad vn' altra, che sia D. Dico che le due C, & D sono le Medie, commensurabili solamente in potenza, e contengono vn rettangolo Rationale. Perche le due A, &B sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, sarà il rettangolo, contenuto da esse, [c] Irrationale, che si chiama Medio: ma il rettangolo, contenuto dalle due A,& B, [d] è vguale al quadrato di C (stante che C è media proportionale frà le due A,& B) sarà il quadrato di C [e] Medio, e la retta C sarà quella, che si chiama Media. E perche la proportione di A à B è come quella di C à D, e le due A, & B sono commensurabili solamente in potenza, saranno le due C, & D, [f] commensurabili solamente in potenza: ma la retta C è dimostrata Media, sarà la retta D, [g] che gli è commensurabile, Media, e saranno ritrouate le due Medie C, & D, commensurabili solamente in potenza. Dico finalmente, che il rettangolo, contenuto dalle Medie C, & D, è Rationale. Per costruttione A à B è come C à D, permutando A à C [h] sarà come B à D; ma A à C è come C à B (stante che C è media proportionale frà le due A, & B) sarà C à B [K] come B à D; per la qual cosa B è media proportionale frà le due C, & D; e perciò il rettangolo contenuto dalle due C, & D, [l] è vguale al quadrato della retta B: ma il quadrato di B è Rationale, (mentre per costruttione B è Rationale) sarà il rettangolo, contenuto dalle Medie C, & D, Rationale, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 13. del 6.
b 12. del 6.
c 22. del 10.
d 17. del 6.
e Scol. alla propos. 22. del 10.
f Scol. alla propos. 10. del 10.
g 14. del 10.
h 16. del 5.
K 11. del 5.
l 17. del 6.

PROBLE-

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXIX.

Ritrouare due Medie commensurabili solamente in potenza, le quali contengano quel Rettangolo, che si chiama Medio.



Per lo Scolio alla propos. 21. di questo, si trouino tre rette Rationali, commensurabili solamente in potenza, che siano le notate A,B,C; frà le due A,& B, [a] si troui la media proportionale D; sarà il rettangolo contenuto dalle due A, & B, [b] vguale al quadrato di D. Poi si faccia si come B à C, [c] così D ad vn altra, che sia E. Dico che le due D, ed E sono le medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono quel rettangolo, che si chiama Medio. Perche le due A, & B sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, sarà il rettangolo, contenuto dalle due A, & B, Irrationale, cioè [d] quello, che si chiama Medio: ma il rettangolo delle due A, & B è vguale al quadrato di D; sarà il quadrato di D Medio, e la retta D [e] sarà Media. In oltre, perche B à C è come D ad E, e le due B, & C, per costruttione, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; saranno le due D, ed E, [f] commensurabili solamente in potenza: ma D è dimostrata Media, sarà E, [g] che gli è commensurabile solamente in potenza, Media; e perciò le due D, ed E sono Medie, commensurabili solamente in potenza. Dico che le Medie D, ed E, contengono quel rettangolo, che si dice Medio. Perche B à C è come D ad E, permutando, B à D [h] sarà come C ad E; ma B à D è come D ad A (stante che le tre B, D, A sono continue proportionali) sarà D ad A [K] come C ad E; ed il rettangolo, contenuto dalle estreme D, ed E, [l] sarà vguale al rettangolo contenuto dalle Medie A, & C: ma il rettangolo contenuto dalle due Rationali A, & C, commensurabili solamente in potenza, [m] è Medio; il rettangolo dunque, contenuto dalle Medie D, ed E, sarà Medio, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 13. del 6.
b 17. del 6.
c 12. del 6.
d 22. del 10.
e Scol. alla 22. del 10.
f Scol. alla 10. del 10.
g 24. del 10.
h 16. del 5.
K 11. del 5.
l 16. del 6.
m 22. del 10.

LEMMA I.

Ritrouare due numeri piani simili.

A 3	6 C
B 5	10 D
E 15	60 F

Si espongano quattro numeri proportionali A, B, C, D, talmente, che A à B sia come C à D; ed A, multiplicando B, produca il numero E; come ancora C, multiplicando D, produca F; i numeri E, ed F, che hanno i lati proportionali, per la 21. defin. del 7, sono numeri piani simili, che era da farsi.

Nel

a 28. e 29. prop. del 9.

Nel 9. lib. si è dimostrato, che [a] se il numero disparo, ouero il numero paro, multiplica vn numero paro, produce numero paro; ed il numero disparo multiplica il numero disparo, produce numero disparo; sarà manifesto di quali numeri dobbiamo valerci, per trouare due numeri piani simili, che ambidue siano numeri pari, ò ambidue numeri dispari. E perche per trouare due numeri piani simili, si deuono prendere quattro numeri proportionali, come antecedentemente si è fatto, pigliandoli ò tutti quattro numeri pari, ouero il primo, e terzo sia numero paro, ed il secondo, e quarto numero disparo, sempre i piani simili, che ne verranno, saranno numeri pari; e se tutti quattro saranno numeri dispari, i piani simili, che ne verranno, saranno ambidue numeri dispari; e se il primo, e secondo, sarà disparo, ed il terzo, e quarto sarà numero paro, vno de' piani simili sarà numero paro, e l'altro disparo.

LEMMA II.

Ritrouare due numeri quadrati, in modo, che il loro aggregato sia numero quadrato.

Per l'antecedente Lemma si trouino due numeri piani, simili, come AB, & C, i quali siano ambidue ò numeri pari, ouero ambidue numeri dispari; e dal numero AB se ne detragga il numero DB, vguale al numero C: perche da vn numero paro, detratto vn numero paro, resta numero paro; e similmente dal numero disparo, detratto il numero disparo, resta numero paro, ò che i due AB, BD siano pari, ò pure siano ambidue dispari, il rimanente AD sarà numero paro. Si diuida il numero paro AD in due parti vguali, che siano AE, ED. Dico che il prodotto, fatto dalla multiplicatione di AB in BD, sarà vno de i numeri quadrati; e l'altro sarà al quadrato di ED i quali gionti insieme comporranno vn numero quadrato. Perche i numeri AB, BD sono piani simili, per la prima propositione del nono Libro, il prodotto, fatto dalla multiplicatione del numero AB nel numero BD, sarà numero quadrato. In oltre, perche il numero AD è diuiso in due parti vguali in E, ed à quello se gli è aggiunto il numero DB, per il sesto Theorema dopo la 14. propositione del Libro nono, il prodotto fatto dalla multiplicatione del numero AB nel numero BD, col quadrato del numero ED, è vguale al quadrato del numero EB. Per la qual cosa i numeri quadrati sono,

A . . . . . E . . . . . D . . . . B
C . . . .

no, vno il prodotto di AB in BD; e l'altro il quadrato di ED, i quali, giunti insieme, fanno il numero quadrato EB, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

COROLLARIO.

Perche il prodotto, fatto da AB in BD, col quadrato di DE, è vguale al quadrato di EB, la differenza frà il quadrato di EB, ed il quadrato di DE, sarà il prodotto, fatto da i due AB, BD: Si che, se i due AB, BD, sono numeri piani, simili, sarà noto il modo di trouare due numeri quadrati, che la loro differenza sia numero quadrato; poiche, detratto da AB il numero DB, vguale al numero C, e l'auanzo AD, sia diuiso in due parti vguali, vno di quelli numeri quadrati, sarà il quadrato di EB, e l'altro il quadrato di ED.

Se poi i numeri presi AB, & C, ouero AB, & BD, non sono piani simili, ma ambidue siano numeri pari, ò ambidue dispari, nell'istesso modo si troueranno i due numeri quadrati EB, ED, la di cui differenza sarà il prodotto de i due AB, BD, il quale non sarà numero quadrato; perche, se il prodotto, fatto da i due AB, BD, fusse numero quadrato, i due AB, BD, sarebbero piani simili, ch'è contro all'ipotesi.

LEMMA II.

Ritrouare due numeri quadrati, che il loro aggregato non sia numero quadrato.

Siano esposti i due numeri piani simili AB, & C, ambidue pari, ouero ambidue dispari; e, detratto dal numero AB il numero DB, vguale al numero C, saranno i numeri AB, BD piani simili; e perche sono ambidue pari, ouero ambidue dispari, il rimanente AD sarà numero paro; il quale, diuiso ne i due numeri vguali AE, ED, per l'antecedente Lemma, il prodotto, fatto da i due AB, BD, è numero quadrato; al quale si aggiunga il quadrato di ED, l'aggregato sarà numero quadrato, cioè sarà il quadrato del nu-

A . . . . . E . F . . . . D . . . . B
C . . . .

numero EB; da ED se ne leui l'vnita EF, sarà il quadrato di DF minore del quadrato di DE. Dico che il prodotto, fatto da AB in BD, ch'è numero quadrato, col quadrato del numero FD, non fà numero quadrato. Se l'aggregato del prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, è numero quadrato, quel numero quadrato, ò sarà maggiore, ò vguale, ò minore del quadrato di FB. Sia prima, se è possibile, il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, maggiore del quadrato di FB; sarà il suo lato, ò radice, maggiore di FB. Hor se quel lato è maggiore di FB, ò sarà vguale ad EB, ò sarà maggiore di EB, non potendo

A . . . . . E . F . . . . D . . . . B
C . . . .

essere minore di EB, stante che EB supera FB per vna sola vnità; si che, essendo quel lato maggiore di FB, e minore di EB, bisognarebbe diuidere l'vnità EF, ch'è impossibile, nella quantità discreta. Non dunque quel lato è minore di EB, ma sarà ò vguale ad EB, ouero maggiore. Sia prima vguale ad EB, in tal caso, il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, sarà vguale al quadrato di EB: ma, per il Lemma antecedente, il prodotto di AB, in BD, col quadrato di ED, è vguale al medesimo quadrato di EB: sarà il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, vguale al prodotto di AB in BD, col quadrato di ED: se ne leui vgualmente il prodotto di AB in BD, resta il quadrato di FD vguale al quadrato di ED, ed il lato FD vguale al lato ED, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il lato del quadrato composto del prodotto di AB, in BD, col quadrato di DF, è vguale ad EB. Sia di nuouo quel lato maggiore di EB, sarà il suo quadrato maggiore del quadrato di EB; cioè il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, sarà maggiore del quadrato di EB: fù dimostrato, nel Lemma antecedente, il quadrato di EB vguale al prodotto di AB in BD, col quadrato di ED; sarà il prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, maggiore del prodotto di AB in BD, col quadrato di ED; se ne leui vgualmente il prodotto di AB in BD, resta il quadrato di FD maggiore del quadrato di ED; ed il numero FD sarà maggiore del numero ED; la parte maggiore del tutto, ch'è impossibile. Non dunque il lato del quadrato, composto del prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, è maggiore di EB, ne meno, per quel che si è dimostrato, è vguale, ne minore di EB. Per la qual cosa il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, non è maggiore del quadrato di FB.

Di nuouo sia, se è possibile, il prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, vguale al quadrato di FB. Dal numero AE se ne detraggano le due vnità AH, sarà AH il doppio dell'vnità EF.

A . . H . . . E . F . . . . D . . . . B
C . . . .

Perche il tutto AD, per costruttione, è il doppio di ED, e la parte AH è il doppio di EF, per la 7. propositione del 7, il rimanente HD sarà il doppio del rimanente FD; e percio HD è diuiso ne i due numeri vguali HF, FD, à i quali aggiunto il numero DB, per il 6. Theorema dopo la propositione 14. del 9, il prodotto di HB in BD, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di FB: ma, per la suppositione fatta, il medesimo quadrato di FB è vguale al prodotto di AB in BD, col quadrato di FD; sarà il prodotto di AB in BD col quadrato di DF, vguale al prodotto di HD in DB, col quadrato di FD: se ne leui il commune quadrato di FD, resta il prodotto di AB in BD vguale al prodotto di HB in BD: dal che DB, multiplicando HB, e multiplicando AB, produce numeri vguali, e, per la 17. del 7, il prodotto al prodotto è come il numero multiplicato BH al numero multiplicato AB: ma i prodotti sono stati dimostrati vguali; perciò i numeri AB, HB sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, è vguale al quadrato di FB.

Sia finalmente, s'è possibile, il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, minore del quadrato di FB. Perche il prodotto di HB in BD, col quadrato di DF, per quel, che si è dimostrato, è vguale al quadrato di FB; ed il prodotto di AB in BD, col quadrato FD, per la fatta suppositione, è minore del quadrato di FB; sarà il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, minore del prodotto di HB in BD, col quadrato di FD: se ne leui il commune quadrato di FD, resta il prodotto di AB in BD, minore del prodotto di HB in BD. Hor perche i numeri AB, HB, multiplicano il medesimo numero DB, il prodotto di AB in BD al prodotto di HB in BD, per la 18. del 7, sarà come il multiplicante AB al multiplicante HB: ma il prodotto di HB in BD è dimostrato minore del prodotto di HB in BD; sarà il numero AB minore del numero HB; il tutto minore della parte, ch'è impossibile. Non dunque il prodotto di AB in BD, col quadrato di FD, è minore del quadrato di FB: non è maggiore, ne vguale, per quel, che si è dimostrato, in conseguenza il prodotto di AB in BD, col quadrato di DF, non è numero quadrato, come fù proposto dimostrare.

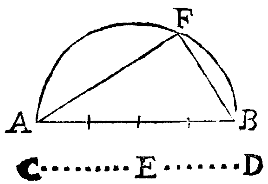
S C O L I O.

Dall'antecedente Lemma si caua il modo da trouare due numeri, il di cui aggregato non habbia à ciascuno di quelli la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato: poiche, se per l'antecedente Lemma si trouano due numeri quadrati, che il loro composto non sia numero quadrato, quel composto, che non è quadrato, à ciascuno de i due quadrati trouati, non sarà come numero quadrato à numero quadrato. Ouero, se si diuiderà vn numero quadrato in due numeri non quadrati, quel quadrato à ciascuno de i non quadrati, non sarà come numero quadrato à numero quadrato.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XXX.

Ritrouare due rette Rationali, commensurabili solamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore superi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore.

Sia esposta la Rationale AB, e per la seconda parte all'antecedente Corollario, si trouino due numeri quadrati, la differenza de'quali non sia quadrato; e siano quelli i numeri quadrati CD, CE, la di cui differenza DE non sia numero quadrato; presa la Rationale AB come diametro d'vn circolo, intorno al quale si descriua il mezzo circolo AFB, poi, per il Corollario alla 6. propos. di questo, si faccia come il numero CD al numero non quadrato ED, così AB ad vn altra quantità BF, la quale sia addattata nel mezzo circolo AFB; si tiri la retta AF, sarà l'angolo AFB, a nel semicircolo, retto; ed il quadrato di AB b sarà vguale à i quadrati de i due lati AF, FB; e perciò il quadrato di AB è maggiore del quadrato di AF, per quanto è il quadrato di FB. Dico che le rette AB, BF sono Rationali, commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato della maggiore AB supera il quadrato della minore FB, per il quadrato d'vna retta, come AF, commensurabile in lunghezza alla maggiore AB. Perche il quadrato di AB al quadrato di FB, per costruttione, è come il numero CD al numero ED; saranno i quadrati di AB, FB, c commensurabili: ma il quadrato della Rationale AB d è Rationale, sarà il quadrato di FB e Rationale, ed il suo lato FB sarà Rationale; per la qual cosa le rette AB, FB sono Rationali. E perche il quadrato di AB al quadrato di FB è come il numero CD al numero DE; ed il numero CD al numero DE nõ è come numero quadrato à numero quadrato, stante che ED non è numero quadrato, ne meno il quadrato di AB al quadrato di FB



a 21. del 3.
b 47. del 1.
c 6. del 10.
d 8. defin. del 10.
e 9. defin. del 10.

è come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette AB, FB f sono incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate commensurabili in potenza; saranno le Rationali AB, FB commensurabili solamente in potenza.

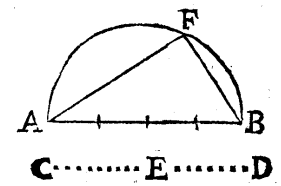
Finalmente, perche il numero CD al numero DE è come il quadrato di AB al quadrato di FB, per la conuersione della proportione, l'antecedente CD alla differenza CE g sarà come l'antecedente, cioè il quadrato di AB, al quadrato di AF (che è la differenza frà li due quadrati AB, FB) cioè sarà il quadrato di AB al quadrato di AF, come il numero quadrato CD al numero quadrato AF: per la qual cosa le rette AF, AB, h sono commensurabili in lunghezza. Saranno dunque ritrouate le due rette AB, FB, Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato della maggiore AB supera il quadrato della minore FB, per il quadrato della retta AF, commensurabile in lunghezza alla maggiore AB, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

f 9. del 10.
g Corol. alla 19. del 5.
h 9. del 10.

PROBLEMA VII. PROPOSITIONE XXXI.

Ritrouare due rette Rationali, commensurabili solamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore superi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla maggiore.

Si esponga la retta Rationale AB, e per il 2. Lemma dopo la 29. propositione di questo, si trouino due numeri quadrati, come CE, ED, in modo, che il loro aggregato CD non sia numero quadrato. Sopra la Rationale AB si descriua il mezzo circolo AFB; poi, per il Corollario alla 6. propos. di questo, si faccia come il numero CD al numero DE, così il quadrato di AB al quadrato della retta FB, la quale a si addatti nel mezzo circolo AFB; si tiri la retta AF. Si mostri, come si fece nell'antecedente propositione, che il quadrato di AB supera il quadrato di FB, per quanto è il quadrato di AF; e si mostri ancora, che le due AB, FB sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, stante che questo si dimostra nell'istesso modo, che si fece all'antecedente propositione. In oltre, perche il quadrato di AB al quadrato di FB è come CD à DE, per la conuersione della proportione, sarà il numero DC al numero CE, b come il quadrato di AB al quadrato di AF: ma CD à CE c non è come numero quadrato à numero quadrato (stante che CD non è numero quadrato) ne meno il quadrato di AB al quadrato di AF è come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette AF, AB d sono incommensurabili in lunghezza. Per la qual cosa saranno ritrouate le due Rationali AB, BF, commensurabili solamente in potenza, ed il quadrato della maggiore AB



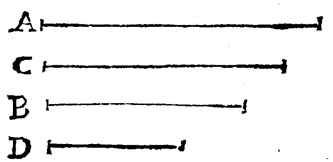
a 1. del 4.
b Corol. alla 19. del 5.
c 24. del 8.
d 9. del 10.

ſupera il quadrato della minore FB, per il quadrato della retta AF, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore AB, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

PROBLEMA VIII. PROPOSITIONE XXXII.

Ritrouare due Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, che contengano vn rettangolo Rationale, ed il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore.

Si trouino, per la 30.propoſitione di queſto, due rette Rationali,com-
menſurabili ſolamente in potenza, come A, & B, in modo, che il qua-
drato della maggiore A ſuperi il quadrato della minore B,per il quadra-
to d'vna retta, commenſurabile in
lunghezza ad eſſa maggiore A: frà



a 13.del 6. le due A, & B, [a] ſi troui vna media
proportionale, che ſia C, ſarà il ret-
tangolo, contenuto dalle due A, &
B, vguale al quadrato della retta C.
b 11.del 6. Poi ſi faccia ſi come A à B, [b] così C
ad vn altra, che ſia D. Dico che le
due rette C,& D ſono le medie, che
ſi cercano. Perche le due A, B ſono Rationali, commenſurabili ſola-
c 22.del 10. mente in potenza, il rettangolo contenuto dalle medeſime A, & B, [c] ſa-
rà irrationale, che ſi chiama Medio; e la retta C, il di cui quadra-
to è vguale à quel rettangolo, ſarà quella retta, che ſi chiama
Media. E perche A à B è come C à D, e le due A, & B ſono commen-
ſurabili ſolamente in potenza; per lo Scolio alla 10.propoſitione di que-
ſto, le due C, & D,ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza.Per la
d 24.del 10. qual coſa D, ch'è commenſurabile alla media C, [d] ſarà Media; e ſaranno
ritrouate le due medie C, & D, commenſurabili ſolamente in potenza.
Dico che contengono vn rettangolo Rationale. Perche A à B è come C
e 16.del 5. à D, permutando, A à C [e] ſarà come B à D; ma A à C è come C à B
f 11.del 5. (ſtante che C è media proportionale frà le due A, & B) ſarà C à B,[f] co-
me B à D; e perciò B è media proportionale frà le due C, & D. Per la
g 17. del 6. qual coſa il rettangolo, contenuto dalle eſtreme C, & D, [g] è vguale al
quadrato della retta B: ma la retta B è poſta Rationale, ſarà il quadrato
h 8. defin. del 10. di B [h] Rationale; cioè il rettangolo, contenuto dalle medie C, & D, è
Rationale. Finalmente perche A à B è come C à D,ed il quadrato di A,
per coſtruttione, ſupera il quadrato di B, per il quadrato d'vna retta,
commenſurabile in lunghezza alla maggiore A; il quadrato ancora di
K 15.del 10. C ſuperarà il quadrato di D, [K] per il quadrato d'vna retta, commenſura-
bile in lunghezza alla maggiore C; e ſaranno ritrouate le due Medie C,
& D, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono vn

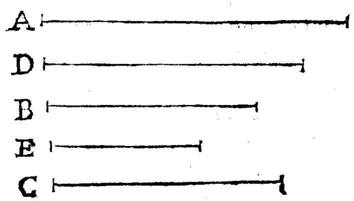
rettan-

rettangolo Rationale, ed il quadrato della maggiore C, ſupera il qua-
drato della minore D, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in
lunghezza alla maggiore C, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.
Se ſaranno trouate le Rationali A, B, [l] commenſurabili ſolamente in l 31.del 10.
potenza, in modo, che il quadrato della maggiore A ſuperi il quadrato
della minore B, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lun-
ghezza alla maggiore A; ed il rimanente ſi faccia come prima, hauere-
mo ritrouate le due medie C, & D, commenſurabili ſolamente in poten-
za, le quali contengono vn rettangolo Rationale, ed il quadrato della
maggiore C ſuperarà il quadrato della minore D, per il quadrato d'vna
retta, incommenſurabile in lunghezza alla maggiore C, il che tutto ſi
dimoſtra, come ſopra ſi fece.

PROBLEMA IX. PROPOSITIONE XXXIII.

Ritrouare due Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano quel rettangolo, che ſi chiama Medio; ed il quadrato della maggiore ſuperi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla maggiore.

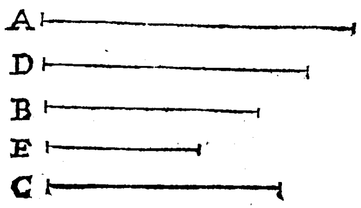
Si trouino due rette Rationali, come A, & C, [a] commenſurabili ſola- a 30. del 10.
mente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore A ſuperi il
quadrato della minore C, per il
quadrato d'vna retta, commenſura-
bile in lunghezza alla maggiore A;
poi, per lo Scolio alla propoſit. 21.
di queſto, ſi troui la retta B Ratio-
nale, e commenſurabile alle due A,
& C, ſolamente in potenza; Ciò
fatto, ſi troui vna media propor-



tionale, [b] frà le due A, & B, che ſia b 13.del 6.
D; ſarà il quadrato della retta D [c] vguale al rettangolo, contenuto dal- c 17.del 6.
le due A, & B. Si faccia poi come D à B, [d] così C ad vn altra, che ſia E, d 12.del 6.
ſarà il rettangolo delle eſtreme D, ed E, [e] vguale al rettangolo delle e 16 del 6.
medie B, & C. Dico che le due D, ed E ſono le Medie, che ſi cercano.
Si prendano le due A, & C, come baſi di due rettangoli, e ſia B altezza
commune; ſarà il rettangolo, contenuto dalle due A,& B, al rettangolo
contenuto dalle due B,& C, [f] come le baſe A alla baſe C: ma il rettan- f 1. del 6.
golo delle due A,& B,è vguale al quadrato della retta D;ed il rettango-
lo delle due B,& C,è vguale al rettangolo delle due D,ed E; ſarà il qua-
drato di D al rettangolo delle due D, ed E, come A à C. Preſe D,ed E,
come baſi di due rettangoli, e ſia D altezza commune; ſarà il quadrato di
D al rettangolo delle due D,ed E,[g] come la baſe D alla baſe E: ma il qua- g 1. del 6.
drato di D al rettãgolo delle due D,ed E,fù moſtrato eſſere come A à C;

ſarà

farà dunque A à C, come D ad E; e perche le due A, & C fono, per co-ftruttione, commenfurabili folamente in potenza, faranno le due D, ed E, per lo Scolio alla 10. propofitione di quefto, commenfurabili folamente in potenza. In oltre, perche il quadrato di D, è vguale al rettãgolo contenuto dalle due rationali A, & B, commenfurabili folamente in



h 23. del 10. potenza; farà il quadrato di D [h] irrationale, e la retta D farà Media; ma fi diffe, che la retta E è cõmenfurabile alla media D, perciò la retta

K 24. del 10. E [K] farà Media. Hor effendo le rette B, & C, Rationali, e commenfura-

l 22. del 10. bili folamente in potenza, il rettangolo contenuto dalle due B, & C, [l] farà irrationale; cioè quello, che fi chiama Medio: ma il rettangolo delle due B, & C, fù dimoftrato vguale al rettangolo delle due D, ed E; il rettangolo dunque, contenuto dalle due D, ed E, farà Medio; E faranno ritrouate le due Medie D, ed E, commenfurabili folamente in potenza, le quali contengono quel rettangolo, che fi chiama Medio. Dico finalmente, che il quadrato di D fupera il quadrato di E, per il quadrato di vna retta, commenfurabile in lunghezza alla maggiore D. Perche fù dimoftrato, che A à C è come D ad E, e, per coftruttione, il quadrato di A fupera il quadrato di C, per il quadrato d'vna retta, commenfura-

m 15. del 10. bile in lunghezza alla maggiore A; il quadrato di D [m] fuperarà il quadrato di E, per il quadrato d'vna retta, commenfurabile in lunghezza alla medefima D, come fù propofto fare, e dimoftrare.

n 31. del 10. Se faranno trouate le Rationali A, & C, [n] commenfurabili folamente in potenza, in modo, che il quadrato della maggiore A fuperi il quadrato della minore C, per quanto è il quadrato d'vna retta, incommenfurabile in lunghezza alla maggiore A; ed il rimanente fi faccia come prima, faranno trouate le due Medie D, ed E, commenfurabili folamente in potenza, le quali conterranno vno fpatio Medio, ed il quadrato della maggiore D fuperarà il quadrato della minore E, per quanto è il quadrato d'vna retta, incommenfurabile alla maggiore D; e la dimoftratione è la medefima, fatta di fopra.

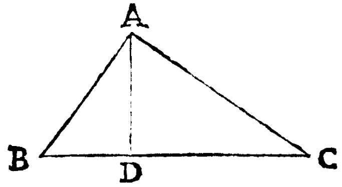
L E M M A.

Se fia il triangolo rettangolo ABC, e l'angolo retto fia BAC, dal quale cada la retta AD, perpendicolare al lato BC. Dico che il rettangolo, contenuto dalle due BC, CD è vguale al quadrato di AC; che il rettangolo, contenuto dalle due CB, BD, è vguale al quadrato di AB; che il rettangolo, contenuto dalle due BD, DC, è vguale al quadrato di AD; e che il rettangolo, contenuto dalle due

AD,

AD, BC, è vguale al rettangolo, contenuto da i due lati BA, AC.

Perche AD diuide il triangolo ABC ne i due triangoli ADC, ADB, fimili frà di loro, e fimili à tutto il triangolo ABC, confiderando i due fimili triangoli ABC, ADC, farà BC à CA, come CA à CD; ed il rettangolo, contenuto

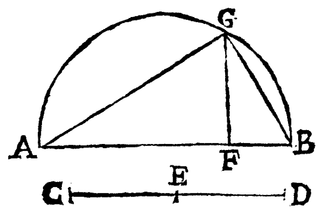


dalle due BC, CD, farà vguale al quadrato di AC. Similmente, confiderando i fimili triangoli ABC, ABD, farà CB ad AB, come AB à BD; ed il rettangolo, contenuto dalle due CB, BD, farà vguale al quadrato di AB. Di nuouo, confiderando i fimili triangoli ADB, ADC, farà BD à DA, come DA à DC, ed il rettangolo, contenuto dalle due BD, DC, farà vguale al quadrato di AD. Finalmente, confiderando i fimili triangoli ABC, ADB, farà DC à CA, come BA ad AD; ed il rettangolo contenuto dalle eftreme BC, AD, farà vguale al rettangolo contenuto dalle medie BA, AC, come fù propofto dimoftrare.

PROBLEMA X. PROPOSITIONE XXXIV.

Ritrouare due rette linee, incommenfurabili in potenza, in modo, che il compofto de i loro quadrati fia Rationale, ed il rettangolo, contenuto da effe, fia Medio.

Si trouino due rette Rationali, come AB, CD, [a] commenfurabili folamente in potenza; e che il quadrato della maggiore AB fuperi il quadrato della minore CD, per il quadrato d'vna retta, incommenfurabile in lunghezza alla maggiore AB: fi diuida CD in due parti vguali in E; poi a 31. del 10.

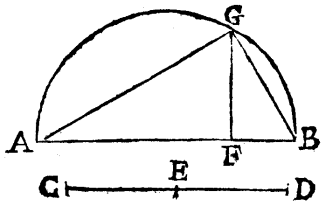


per il fecondo Lemma dopo la 17. propofitione di quefto, fi applichi ad AB vn rettangolo, vguale al quadrato di CE, in modo, che manchi à compire la retta AB, per vna figura quadrata; per il Corollario al citato Lemma, farà diuifa AB talmente in F, che il rettangolo, contenuto dalle parti AF, FB, farà vguale al quadrato di CE; cioè farà vguale alla quarta parte del quadrato di tutta CD. Intorno alla retta AB fi defcriua il mezzo circolo AGB; nel punto F [b] fi erigga la retta FG, perpendi- b 11. del 1.

colare

colare ad AB, la quale, continuata, concorra con la circonferenza in qualche punto G: si tirino le rette AG, GB; l'angolo AGB [c] sarà retto, c 31. del 3. e, per l'antecedente Lemma, il rettangolo, contenuto dalle due AF, FB, sarà vguale al quadrato di FG: mà il rettangolo delle due AF, FB, è vguale, per costruttione, al quadrato di CE; sarà il quadrato di FG vguale al quadrato di CE; e la retta FG vguale alla retta CE; mà CD è il doppio di CE; sarà CD il doppio di FG. Supposto questo.

Perche il quadrato di AB, per costruttione, supera il quadrato di CD, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza ad AB; e si è applicato ad AB il rettangolo, contenuto dalle parti AF, FB, vguale alla quarta parte del quadrato della minore CD, che gli manchi à compire la linea, vna figura quadrata; per la decimanona propositione di questo, le parti AF, FB sono frà di loro incommensurabili in lunghezza. Prese AF, FB, come basi di due rettangoli, de' quali sia AB altezza commune; sarà il rettangolo, contenuto dalle rette BA, AF, al rettangolo, contenuto dalle rette AB, BF, [d] come le base AF alla base FB: mà, per il Lemma antecedente, il rettangolo delle due BA, AF, è vguale al quadrato di AG; ed il rettangolo delle due AB, BF, è vguale al quadrato di GB; il quadrato dunque di AG al quadrato di GB [e] sarà, come AF ad FB: fù dimostrata AF incommensurabile in lunghezza ad FB; sarà il quadrato di AG [f] incommensurabile al quadrato di GB; per la qual cosa le rette AG, GB, [g] sono incommensurabili in potenza. E perche il quadrato della Rationale AB [h] è Rationale, ed è vguale [K] à i quadrati delle due AG, GB, haueremo ritrouato due rette, come AG, GB, incommensurabili in potenza, che il loro composto fanno il quadrato di AB Rationale. Dico che il rettangolo contenuto dalle rette AG, GB è Medio. Prese CD DE, come basi di due rettangoli, e sia AB altezza commune; il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, al rettangolo, contenuto dalle due AB, DE, [l] sarà come la base CD alla base DE: mà CD è il doppio di DE, sarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, il doppio del rettangolo, contenuto dalle due AB, ED, ouero dalle due AB, FG (stante che FG è vguale ad ED) e perciò il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, sarà commensurabile al rettangolo, contenuto dalle due AB, GF, (à causa che il doppio è misurato da quello, che è sua metà). Hor essendo le due AB, CD, Rationali, e commensurabili solamente in potenza, il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, [m] sarà irrationale, cioè quello, che si chiama Medio: essendo il rettangolo, contenuto dalle due AB, FG, commensurabile al Medio, cioè al rettangolo, contenuto dalle due AB, CD; il rettangolo ancora, contenuto dalle due AB, FG, [n] sarà Medio: mà, per il Lemma antecedente, il rettangolo, contenuto dalle due AB, FG, è vguale al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, Medio. Per la qual



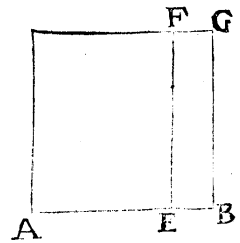
d 1. del 6.
e 11. del 5.
f 10. del 10.
g 4. defin. del 10.
h 8. de fin. del 10.
K 47. del 1.
l 1. del 6.
m 22. del 10.
n Corol. alla 24. del 10.

cosa

cosa le rette AG, GB sono incommensurabili in potenza; i loro quadrati compongono il quadrato di AB, ch'è Rationale; e contengono quel rettangolo, che si chiama Medio, come fù proposto fare, e dimostrare.

SCOLIO.

Non sarà inutile dimostrare in questo luogo quel, che si dimostra in vn Scolio Antico, cioè. Se sia possibile, che due spatij irrationali compongano vno spatio Rationale. Si esponga la retta Rationale AB, e si prendano due numeri ineguali, come C maggiore, ed il minore sia D, che non habbiano la proportione del numero quadrato al numero quadrato: sopra la Rationale AB [a] si descriua il quadrato AG; sarà il quadrato AG [b] Rationale. Si faccia poi sicome C à D, così il quadrato di AB al quadrato di AE; dal punto E [c] si tiri la retta EF, parallela al lato BG. Perche il quadrato di AB al quadrato di AE è come il numero C al numero D; non essendo il numero C al numero D come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di AB al quadrato di AE sarà come numero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa i lati AB, AE [d] di quei quadrati sono incommensurabili in lunghezza. Hor essendo AB, composta delle due AE, EB, incommensurabili in lunghezza ad AE; la medesima AB [e] sarà incommensurabile in lunghezza al restante EB. In oltre, perche il quadrato di AB, cioè AG, al rettangolo AF, [f] è come AB ad AE, ed AB è incommensurabile in lunghezza ad AE; sarà il quadrato AG [g] incommensurabile al rettangolo AF: Mà il quadrato AG è Rationale, perciò il rettangolo AF sarà irrationale. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il rettangolo EG è irrationale. Per la qual cosa i due irrationali, AF, EG, compongono lo spatio AG Rationale, ch' era da dimostrarsi.



C 6 D 4

a 46. del 1.
b 8. defin. del 10.
c 31. del 1.
d 9. del 10.
e Corol. alla 17. del 10.
f 1. del 6.
g 10. del 10.

Se poi i due Rettangoli AF, EG fossero Rationali, si dimostrerà, che tutto il composto AG è Rationale. Perche l'vno, e l'altro de i Rettangoli AF, EG, si suppone Rationale, perciò saranno frà di loro [h] commensurabili, per la qual cosa tutto il Composto da loro, cioè AG, [K] sarà commensurabile ad ogn' vno di essi, ed in conseguenza tutto il Composto AG, essendo commensurabile à i Rationali AF, EG, [l] sarà Rationale; il che era da dimostrarsi.

h 9. defin. del 10.
K 16. del 10.
l 9. defin. del 10.

PROBLEMA XI. PROPOSITIONE XXXV.

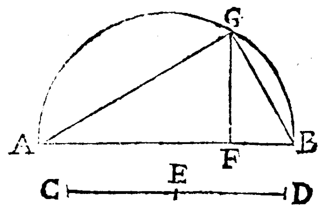
Ritrouare due rette linee, incommensurabili in potenza, in modo, che i loro quadrati, giunti insieme, compongano vn' spatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro, sia Rationale.

Si ritrouino due rette Medie, come AB, CD, [a] commensurabili solamente

a 32. del 10.

mente

mente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale, in modo, che il quadrato della maggiore AB superi il quadrato della minore CD, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla maggiore AB. Si facciano le altre cose, come nell'antecedente propositione, e si mostri, come iui si fece, che le rette AG, GB sono incommensurabili in potenza; e per-



b 47. del 1. che il quadrato della media AB è Medio, essendo vguale [b] à i quadrati delle due AG, GB, i quadrati delle due AG, GB, giunti insieme, comporranno vno spatio Medio. Si dimostri ancora, come si fece nell'antecedente propositione, che il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, è il doppio del rettangolo, contenuto dalle due AB, GF; e perciò l'vno è commensurabile all'altro. E perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, per costruttione, è Rationale, sarà ancora il rettangolo,
c 9. defin. del 10. contenuto dalle due AB, FG, che gli è commensurabile, [c] Rationale: mà per il Lemma dopo la 33. propositione, il rettangolo, contenuto dalle due AB, GF, è vguale al rettangolo contenuto dalle due AG, GB; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, Rationale: mà si è dimostrato, che il composto de i quadrati delle rette AG, GB, è Medio; si saranno dunque ritrouate le due rette AG, GB, incommensurabili in potenza, i di cui quadrati, giunti insieme, compongono vn Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro, è Rationale, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

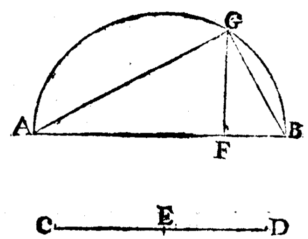
PROBLEMA XII. PROPOSITIONE XXXVI.

Ritrouare due rette linee, incommensurabili in potenza, in modo, che i loro quadrati, giunti insieme, compongano vn' spatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro, sia Medio; il quale sia incommensurabile al composto de i loro quadrati.

a 33. del 10. Si ritrouino due Medie AB, CD, [a] commensurabili solamente in potenza, le quali contengano vn' spatio Medio; ed il quadrato della maggiore superi il quadrato della minore, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla maggiore AB; e si facciano tutte le altre cose, come fù fatto nella 34. propositione di questo; e si dimostri, come iui si fece, che le rette AG, GB, sono incommensurabili in poten-
b 47. del 1. za. E perche il quadrato della Media AB è Medio, essendo vguale [b] à i quadrati delle due AG, GB, il composto de i quadrati delle rette AG, GB, sarà Medio. In oltre si dimostri, come si fece nella 34. propositione di questo, che il rettangolo, contenuto dalle due AB, CD, è il doppio del rettangolo, contenuto dalle due AB, GF; per il che il rettangolo delle due AB, GF, è commensurabile al rettangolo delle due AB, CD.

E perche il rettangolo delle due AB, CD, per costruttione, è Medio; il rettangolo delle due AB, GF, [c] che gli è commensurabile, sarà Medio: c Corol. alla 24. del 10.
mà il rettangolo contenuto dalle due AB, GF, [d] è vguale al rettangolo, d Lem. dopo la 33. del 10.
contenuto dalle due AG, GB; sarà il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, Medio.

In oltre, perche AB, per costruttione, è incommensurabile in lunghezza alla retta CD, e la retta CD è commensurabile alla sua metà CE; sarà AB [e] incommensurabile alla retta CE. Prese AB, CE, come basi e 13. del 10.
di due rettangoli, e sia AB altezza commune, sarà il quadrato di AB al rettangolo, contenuto dalle due AB, CE, [f] come le base AB alla base f 1. del 6.
CE; mà il rettangolo delle due AB, CE, è vguale al rettangolo, contenuto dalle due AB, GF (per essere GF vguale à CE) sarà il quadrato di AB al rettangolo delle due AB, GF, come AB à CE: il rettangolo, contenuto dalle due AB, GF, è vguale al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; sarà il quadrato di AB al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, come AB ad EC: mà AB è dimostrata incommensurabile in lunghezza à CE; sarà il quadrato di AB [g] incommensurabile al rettangolo, contenuto dalle due AG, GB; cioè incommensurabile al Medio, contenuto dalle due AG, GB. Per la qual cosa haueremo trouate le due rette AG, GB, incommensurabili in potenza, i di cui quadrati, composti insieme, fanno vn' spatio Medio; come ancora il rettangolo contenuto dalle medesime è Medio, il quale è incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, come fù proposto fare, e dimostrare. g 10. del 10.



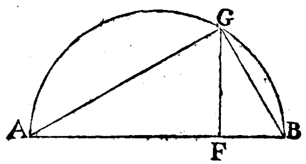
S C O L I O.

Da quel, che si è detto se ne caua il seguente problema.

Ritrouare due medie, incommensurabili in lunghezza, e potenza.

Essendosi dimostrato, che il quadrato di AB, cioè il composto de i quadrati delle rette AG, GB, è Medio, ed ancora il rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, è Medio; e questo è incommensurabile al composto de i quadrati delle rette AG, GB; sarà il lato dell'aggregato de i quadrati di AG, GB Media; e sarà ancora Media il lato del rettangolo, contenuto dalle due AG, GB, le quali saranno incommensurabili in lunghezza; perche, se non sono incommensurabili in lunghezza, i loro quadrati, [a] cioè il rettangolo delle due AG, GB, e l'aggregato de i quadrati delle medesime AG, GB, saranno commensurabili, a 9. del 10.

ch'è contro à quello, che ſi è dimoſtrato. Non dunque i detti lati ſono commenſurabili in lunghezza; mà ſono in lunghezza incommenſurabili, e perciò, ſe ſi prenda la retta AB, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle rette AG, GB, e ſi troua vna media proportionale frà le due AG, GB, il di cui quadrato è vguale al rettangolo delle due AG, GB, ſaranno la retta AB, e quella media proportionale trouata, due Medie incommenſurabili in lunghezza, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



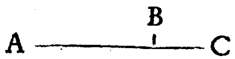
PRINCIPIO DE' SENARII.

Per compoſitione.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXXVII.

Il Compoſto di due rette Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, è Irrationale; e ſi chiamerà Binomio.

Siano le due Rationali AB, BC, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali ſi aggiungano inſieme, in modo, che facciano la ſola retta linea AC. Dico che tutta la compoſta AC è Irrationale. Perche le Rationali AB, BC, ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ſarà la retta AB incommenſurabile in lunghezza alla retta BC;



ed, eſſendo il quadrato di AB commenſurabile al quadrato di BC, l'ag-
a 16.del 10. gregato de i due quadrati di AB, e BC, [a] ſarà commenſurabile al qua-
drato di BC: preſe AB, BC, come baſi di due rettangoli, de' quali BC
b 1. del 6. ſia altezza commune; ſarà il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC,
al quadrato di BC, [b] come la baſe AB alla baſe BC: mà AB è incom-
c 10.del 10. menſurabile in lunghezza alla retta BC; ſarà il rettangolo, contenuto
dalle due AB, BC, [c] incommenſurabile al quadrato di BC: mà il rettan-
golo, contenuto dalle due AB, BC, è commenſurabile al ſuo doppio,
cioè al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; ſarà il doppio
d 14. del 10 rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [d] incommenſurabile al qua-
drato di BC: mà l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, è dimo-
ſtrato commenſurabile al quadrato di BC; ſarà l'aggregato de i quadrati
e 14.del 10. delle due AB, BC, [e] incommenſurabile al doppio rettangolo, contenuto
dalle due AB, BC. E perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio
f 4.del 2. rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [f] è vguale al quadrato di AC;
eſſendo l'aggregato de i quadrati di AB, BC, incommenſurabile al dop-

pio

pio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC; ſarà il quadrato di AC [g] g 17.del 10.
incommenſurabile, tanto all'aggregato de i quadrati di AB, BC, quanto
al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC. In oltre, per quel,
che ſi è dimoſtrato, l'aggregato de i quadrati di AB, BC, è commenſura-
bile al quadrato di BC, ed il quadrato di BC [h] è Rationale, per eſſere BC h 8. defin. del 10.
Rationale; ſarà l'aggregato de i quadrati di AB, BC, [K] Rationale: Mà K 9.defin. del 10.
il quadrato di AC, per quel, che ſi è dimoſtrato, è incommenſurabile
all'aggregato de i quadrati di AB, BC; ſarà il quadrato di AC [l] Irratio- l 10. defin. del 10.
nale. Per la qual coſa il ſuo lato AC [m] ſarà Irrationale; e queſta retta m 11. defin. del 10.
irrationale AC, compoſta delle due AB, BC, commenſurabili ſolamen-
te in potenza, ſi chiamerà Binomio, ch'era da dimoſtrarſi.

COROLLARIO.

Appare da quel, che ſi è detto, che da due rette commenſurabili ſolamente in potenza, ſe ne generano due rette Irrationali; cioè quella retta, che frà loro è media proportionale, è Irrationale, e ſi chiama Media; e quella, che naſce dal loro compoſto, è Irrationale, e ſi chiama Binomio.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXVIII.

Se due di quelle Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, che contengono vn rettangolo Rationale, ſi compongono inſieme; tutta la retta, compoſta di quelle due, è Irrationale; e ſi chiamerà Prima Bimediale.

Si compongano le due Medie AB, BC, commenſurabili ſolamente in potenza, che contengano vn rettangolo Rationale, in modo, che facciano la ſola retta linea AC. Dico che la compoſta AC è irrationale. Perche le Medie AB, BC ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ſarà il quadrato di AB commenſurabile al quadrato di BC; e l'aggregato de i quadrati

AB, BC, [a] ſarà commenſurabile al quadrato di BC. Preſe le due AB, a 16.del 10.
BC, come baſi di due rettangoli, e l'altezza commune ſia BC; ſarà il ret-
tangolo delle due AB, BC, al quadrato di BC, [b] come la baſe AB alla b 1.del 6.
baſe BC: ma AB è incommenſurabile in lunghezza alla retta BC; ſarà
il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, [c] incommenſurabile al qua- c 10.del 10.
drato di BC: ma il rettangolo delle due AB, BC, è commenſurabile al
doppio rettangolo delle medeſime AB, BC; ſarà il doppio rettangolo
delle due AB, BC, [d] incommenſurabile al quadrato di BC. Fù dimo- d 14.del 10.
ſtrato l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, eſſere commenſura-
bile al quadrato di BC; ſarà l'aggregato de i quadrati delle due AB,

BC,

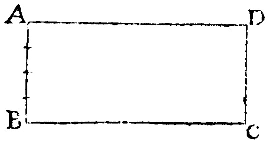
e 14.del 10. BC, [e] incommensurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle due AB,
f 4.del 2. BC. E perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo,
contenuto dalle medesime AB, BC, [f]
è vguale al quadrato della retta AC; es-
sendo l'aggregato de i quadrati di AB,
BC, incommensurabile al doppio rettan-
golo delle due AB, BC; sarà il quadra-

g 17.del 10. to di AC [g] incommensurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle due
AB, BC: ma il doppio rettangolo delle due è commensurabile al sem-
h 8. defin. del 10. plice rettangolo delle medesime AB, BC; sarà il quadrato di AC [h] in-
commensurabile al rettangolo, contenuto dalle due AB, BC: fù suppo-
sto il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, Rationale; sarà il qua-
K 10 defin. del 10. drato di AC [K] Irrationale; ed in conseguenza il suo lato AC [l] sarà irra-
l 11. defin. del 10. tionale. La retta AC, composta delle due Medie AB, BC, commensu-
rabili solamente in potenza, che contengono vno spatio Rationale, si
chiamerà Prima Bimediale; il che era da dimostrarsi.

L E M M A.

Il Rettangolo, contenuto da vna retta Rationale, e da vn altra Irrationale, è Irrationale.

Sia il rettangolo ABCD, contenuto dalla Rationale AB, e dall'Irrationale BC. Dico che il rettangolo BD è Irrationale. Se non è Irrationale, sarà, in conseguenza, Rationale: applicato dunque il Rationale
a 21.del 10. *BD alla Rationale AB, [a] produrrà il lato BC Rationale, ch'è contro all'ipotesi, mentre il lato BC è supposto Irrationale. Non dunque il rettangolo ABCD è Rationale, ma sarà Irrationale, ch'era da dimostrarsi.*



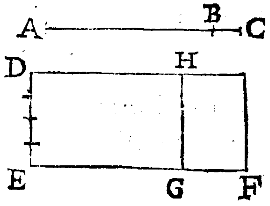
THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXIX.

Se due Medie, commensurabili solamente in potenza, contengono vn' spatio Medio; e quelle si compongano in modo, che costituiscano vna sola retta linea; la composta sarà Irrationale, e si chiamerà Seconda Bimediale.

a 29. del 10. Si compongano le due Medie AB,BC, [a] commensurabili solamente in
potenza, che contengano quel rettangolo, che si chiama Medio, in mo-
do, che facciano la sola retta linea AC. Dico che la retta AC è Irra-
b 45.del 1. tionale. Si esponga la Rationale DE, alla quale si applichi il rettango-
lo DF, [b] vguale al quadrato di tutta la retta AC; ed alla medesima Ra-

tio-

tionale DE si applichi il rettangolo DG, vguale all'aggregato de i qua-
drati di AB, BC. Perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio ret-
tangolo, contenuto dalle due AB, BC, [c] c 4.del 2.
è vguale al quadrato di AC, cioè vguale
al rettangolo DF; detrattone l'aggregato
de i quadrati di AB, BC, cioè il rettan-
golo DG, resta il rettangolo HF vguale al
doppio rettangolo, contenuto dalle due
AB, BC; e perche il rettangolo, contenu-
to dalle due AB, BC, per ipotesi, è Me-
dio; ed il rettangolo delle due AB, B
C, è commensurabile al suo doppio,



cioè al doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AB, BC; sa-
rà il doppio rettangolo delle due AB,BC per il Coroll. alla 24. proposi-
tione di questo, Medio: per la qual cosa il rettangolo HF, ch'è vguale
al doppio rettangolo delle due AB, BC, sarà Medio. In oltre perche le
due rette AB, BC, per ipotesi sono Medie, i loro quadrati, cioè i qua-
drati di AB, BC, saranno Medij; ed essendo le rette AB,BC, commensu-
rabili in potenza, sarà il quadrato di AB commensurabile al quadrato di
BC; e l'aggregato de i quadrati di AB,BC, [d] sarà commensurabile à cia- d 16.del 10.
scuno di essi quadrati di AB, ouero BC, e, per il Coroll. alla 24. propos.
di questo, l'aggregato de i quadrati di AB, BC, sarà Medio: ma il ret-
tangolo DG è vguale all'aggregato de i quadrati di AB, BC, sarà il ret-
tangolo DG Medio. Nel parallelogrammo DEGH, il lato DE [e] è v- e 34. del 1.
guale all'opposto HG: ma DE, per costruttione, è Rationale, sarà HG
ancora Rationale; alle quali sono applicati i Medij DG, HF, saranno i
lati EG, GF, [f] Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Ratio- f 23. del 10.
nale DE. Prese le rette AB, BC, come basi di due rettangoli, e l'altez-
za commune sia BC; sarà il rettangolo delle due AB, BC al quadrato di
BC, [g] come AB à BC: ma AB, per ipotesi, è incommensurabile in lun- g 1.del 6.
ghezza à BC, sarà il rettangolo delle due AB, BC, [h] incommensurabile h 10.del 10.
al quadrato di BC. E perche il rettangolo delle due AB, BC, è com-
mensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AB,BC;
sarà il doppio rettangolo delle due AB, BC, cioè il rettangolo HF, [K] in- K 14.del 10.
commensurabile al quadrato di BC. Similmente, essendosi dimostrato
l'aggregato de i due quadrati AB, BC, commensurabile al quadrato
di BC; ed il quadrato di BC è dimostrato incommensurabile ad HF;
sarà l'aggregato de i due quadrati di AB, BC, [l] cioè il rettangolo DG, l 14.del 10.
incommensurabile al rettangolo HF. Finalmente perche i rettangoli
DG, HF, hanno vna medesima altezza, il rettangolo DG al rettangolo
HF, [m] sarà come la base EG alla base GF; ma il rettangolo DG è di- m 1. del 6.
mostrato incommensurabile al rettangolo HF; sarà la retta EG [n] incom- n 10.del 10.
mensurabile alla retta GF: dal che le rette EG, GF sono incommensu-
rabili in lunghezza: ma le medesime rette EG, GF, furono dimostrate
Rationali; saranno le Rationali EG, GF, commensurabili solamente in
potenza; e per la 37. propos. di questo, il loro composto, cioè la retta EF,
sarà Irrationale; e per l'antecedente Lemma, il rettangolo DF, contenuto

dalla

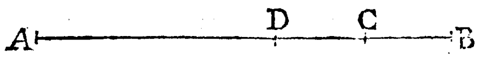
dalla Rationale DE, e dalla Irrationale EF, è Irrationale. Per la qual coſa il quadrato di AC, ch'è vguale al rettangolo DF, ſarà Irrationale; ed il ſuo lato EF è Irrationale, ch'era da dimoſtrarſi. Si chiamerà la retta AC, compoſta delle due AB, BC, ſeconda Bimediale.

CONSETTARIO.

Dalle due antecedenti propoſitioni ſi caua, che, quando due Medie ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ſe quelle contengono vn' ſpatio Rationale, il loro compoſto è irrationale, e ſi chiama prima Bimediale: ma ſe contengono vn' ſpatio Medio, il loro compoſto è irrationale, e ſi chiama ſeconda Bimediale.

LEMMA.

Se vna retta linea ſarà diuiſa in due parti ineguali, ſarà l'aggregato de i quadrati delle parti maggiore del doppio rettangolo, contenuto dalle parti, per quanto è il quadrato della differenza delle medeſime parti.



Sia la retta AB, diuiſa in due parti ineguali, come AC, CB; da AC ſe ne tagli la parte CD,[a] vguale à CB; ſarà AD la differenza di quanto la maggior parte AC ſupera la minore CB. Dico che l'aggregato de i quadrati delle parti ineguali AC, CB, ſupera il doppio rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, per quanto è il quadrato di AD. Perche la retta AC è diuiſa in qualunque modo in D, i quadrati delle due AC, CD,[b] ſono vguali al doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, CD, col quadrato del reſtante AD: ma DC è fatta vguale à CB; perciò i quadrati delle due AC, CB ſono vguali al doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CD, ouero dalle due AC, CB, col quadrato di AD. Hor ſe al doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, biſogna aggiungere il quadrato di AD, acciòche ſia vguale à i quadrati delle due AC, CB; ſaranno i quadrati delle due AC, CB, maggiori del doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, per quanto e il quadrato della differenza AD, come fù propoſto dimoſtrare.

a 3. del 1.
b 7. del 2.

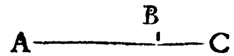
Appare

COROLLARIO.

Appare dunque, che ſe vna retta linea è diuiſa in due parti ineguali, i quadrati delle parti ineguali ſono maggiori del doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime parti ineguali.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XL.

Se due rette linee ſono incommenſurabili in potenza, ed i loro quadrati, giunti inſieme, compongano vno ſpatio Rationale, ed il rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Medio; il compoſto di queſte due rette linee ſarà Irrationale, e ſi chiamerà Maggiore.



Siano le due rette AB, BC,[a] incommenſurabili in potenza, che i loro quadrati, giunti inſieme, compongano vno ſpatio Rationale, ed il rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Medio, e queſti ſi aggiungano inſieme, in modo, che facciano la ſola retta AC. Dico che la compoſta AC è Irrationale.

Perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, è commenſurabile al doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime AB, BC; ed il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, per ipoteſi, è Medio; il doppio rettangolo delle due AB, BC, che gli è commenſurabile, per il Corollario primo alla 24. propoſitione, ſarà ancora Medio, & perciò ſarà Irrationale; ma l'aggregato de i quadrati delle due AB, BC, per ipoteſi, è Rationale; ſarà il doppio rettangolo delle due AB, BC,[b] incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AB, BC. E perche i quadrati delle due AB, BC, col doppio rettangolo delle medeſime AB, BC,[c] è vguale al quadrato di AC; ſarà il quadrato di AC,[d] compoſto di quelle due grandezze incommenſurabili, incommenſurabile all' aggregato de i quadrati di AB, BC: ma l'aggregato de i quadrati di AB, BC, per ipoteſi, è Rationale; ſarà il quadrato di AC,[e] che gli è incommenſurabile, Irrationale. Per la qual coſa la retta AC[f] è Irrationale, ch'era da dimoſtrarſi. E queſta ſi chiamerà Maggiore, ſtante che l'aggregato de i quadrati AB, BC, ch'è Rationale, per l'antecedente Lemma, ſupera il doppio rettangolo delle due AB, BC, ch'è ſtato dimoſtrato Medio, per il quadrato della loro differenza; pigliando Euclide la denominatione dalla maggioranza del Rationale ſopra il Medio.

a 34. del 10.
b 10. defin. del 10.
c 4. del 2.
d 17. del 10.
e 10. defin. del 10.
f 11. defin. del 10.

THEO-

THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XLI.

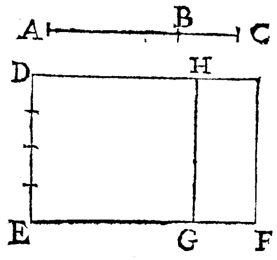
Se due rette linee ſono incommenſurabili in potenza, i di cui quadrati giunti inſieme, compongano vno ſpatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da eſſe, ſia Rationale; il compoſto di queſte due rette linee ſarà Irrationale; e ſi chiamerà linea potente per lo ſpatio Rationale, e Medio.

a 35.del 10. Siano le due rette AB, BC, [a]
incommenſurabili in potenza,
che i loro quadrati compongano
vno ſpatio Medio, ed il rettan-
golo, contenuto dalle medeſime
AB, BC, ſia Rationale, e queſte
giunte inſieme, compongano la
retta AC. Dico che la retta AC è Irrationale. Perche il rettangolo,
contenuto dalle due AB, BC, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al
doppio rettangolo delle medeſime AB, BC; eſſendo il rettangolo delle
due AB,BC, per ipoteſi, Rationale, ſarà il doppio rettangolo delle me-
b 9. defin. del 10. deſime AB,BC, [b] Rationale: ma l'aggregato de i quadrati di AB, BC,
per ipoteſi, è Medio, e perciò Irrationale; il doppio rettangolo dunque
c 10. defin. del 10. delle due AB, BC, [c] ſarà incommenſurabile all'aggregato de i quadrati
delle medeſime AB, BC. E perche il quadrato di AC ſi compone de i
d 4.del 2. due incommenſurabili; cioè del doppio rettangolo delle due AB, BC, [d]
e dell'aggregato de i quadrati delle medeſime AB,BC; ſarà il quadrato
e 17. del 10. di AC [e] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due AB, BC: ma,
per quel, che ſi è dimoſtrato, il doppio rettangolo delle due AB, BC,
f 10.defin. del 10. è Rationale; perciò il quadrato di AC, che gli è incommenſurabile, [f] ſa-
g 11. defin. del 10. rà irrationale; ed il ſuo lato, cioè la retta AC, [g] ſarà Irrationale, che
era da dimoſtrarſi. E queſta retta linea AC ſi chiamerà linea potente,
per lo ſpatio Rationale, e Medio, cioè, che la potenza, ò quadrato,
della linea AC, ſi compone del Rationale, ch'è il doppio rettangolo,
contenuto dalle due AB, BC; e del Medio, ch'è l'aggregato de i qua-
drati delle medeſime AB, BC.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XLII.

Se due rette linee ſono incommenſurabili in potenza, i di cui quadrati, giunti inſieme, compongano vno ſpatio Medio; ed il rettangolo, contenuto da loro ſia Medio, incommenſurabile al compoſto de i loro quadrati; quelle rette linee, giunte inſieme, coſtituiſcono vna retta linea

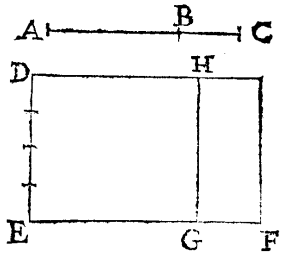
Irrationale; E ſi chiamerà linea potente, per due ſpatij Medij.



Siano le due rette AB,BC,[a] incommen- a 36.del 10.
ſurabili in potenza, ed i due quadrati di
AB, BC, giunti inſieme, compongano vno
ſpatio Medio; come anco il rettangolo,
contenuto dalle medeſime AB, BC, ſia
Medio, il quale ſia incommenſurabile all'
aggregato de i quadrati di AB, BC. Dico
che, compoſte le rette AB, BC, in modo,
che facciano la ſola retta linea AC, la retta
linea AC ſarà Irrationale. Si eſponga la
Rationale DE, alla quale ſi applichi il rettangolo DF, [b] vguale al qua- b 45.del 1.
drato della retta AC; ed alla medeſima Rationale DE s'applichi il ret-
tangolo DG, vguale all'aggregato de i quadrati delle rette AB,BC. Per-
che il quadrato della retta AC, cioè il rettangolo DF, [c] è vguale à i c 4. del 2.
quadrati delle parti AB, BC, col doppio rettangolo, contenuto dalle
medeſime parti AB, BC, ed i quadrati delle parti AB, BC, giunti inſie-
me, ſono vguali al rettangolo DG; ſarà il rimanente rettangolo HF
vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle parti AB, BC. In oltre,
perche il rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, è commenſurabile al
ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle medeſime AB,BC; ed il ret-
tangolo delle due AB,BC, per ipoteſi, è Medio; ſarà il doppio rettango-
lo delle due AB,BC, che gli è commenſurabile, per il Coroll. alla 24. pro-
poſitione di queſto, Medio: mà il doppio rettangolo delle due AB, BC, è
dimoſtrato vguale al rettangolo HF; ſarà il rettangolo HF Medio. Si-
milmente l'aggregato de i quadrati di AB, BC, per ipoteſi, è Medio; il
rettangolo DG è fatto vguale all'aggregato de i quadrati di AB, BC;
ſarà il rettangolo DG Medio. Nel parallelogrammo DEGH [d] i lati op- d 34.del 1.
poſti DE,HG ſono frà di loro vguali: ma DE, per coſtruttione, è Ratio-
nale, ſarà ancora HG Rationale; alle quali, applicati i medij DG, HF,
ne riſultano le rette EG, GF, [e] Rationali, & incommenſurabili in lun- e 23. del 10.
ghezza alla Rationale DE. Di nuouo, l'aggregato de i quadrati di AB,
BC, per ipoteſi, è incommenſurabile al rettangolo delle medeſime AB,
BC; ed il rettangolo delle due AB, BC, è commenſurabile al doppio
rettangolo delle medeſime AB, BC; ſarà l'aggregato de i quadrati delle
due AB, BC, [f] cioè il rettangolo DG, incommenſurabile al doppio ret- f 13. e 14. del 10.
tangolo delle due AB, BC, cioè al rettangolo HF; ma il rettangolo DG
al rettangolo HF, [g] è come EG à GF; eſſendo il rettangolo DG incom- g 1.del 6.
menſurabile al rettangolo HF, ſarà EG [h] incommenſurabile à GF; per il h 10.del 10.
che le due rette EG, GF ſono incommenſurabili in lunghezza. E perche
le rette EG, GF ſono ſtate dimoſtrate Rationali; perciò ſono commen-
ſurabili ſolamente in potenza: per la qual coſa tutta la retta EF, [K] com- K 37.del 10.
poſta di quelle due, ſarà irrationale; ed il rettangolo, contenuto dalla
irrationale EF, e dalla Rationale DE, per il Lemma dopo la 38. propo-

ſitione di queſto, ſarà irrationale; ma il rettangolo DF, per coſtruttione, è vguale al quadrato di AC; ſarà il quadrato di AC irrationale, ed il lato AC [l] ſarà irrationale. E perche il quadrato di AC, cioè il rettangolo DF, è composto de i due medij; cioè del medio DG, ch'è vguale à i quadrati delle due AB, BC, e del medio HF, ch'è vguale del doppio rettangolo, contenuto dalle due AB, BC, perciò la retta AC ſi chiama linea potente per due ſpatij Medij, il che era da dimoſtrarſi.

l 11. defin. del 10.



LEMMA I.

Se vna retta linea è diuiſa in due parti ineguali, e di nuouo ſia diuiſa in due altre parti ineguali; i quadrati delle parti più ineguali, ſono maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali.

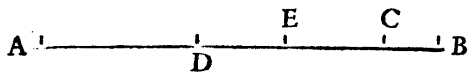
Sia la retta linea AB diuiſa prima in due parti ineguali in C, e di nuouo la medeſima AB ſia diuiſa in due altre parti ineguali, come in D; e ſiano le due AC, CB più ineguali delle due AD, DB. Dico che i quadrati delle parti più ineguali AC, CB ſono maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB. Si diuida la retta AB [a] in due parti vguali in E; ò il punto D cade frà i punti E, & C, ouero cade frà i punti A, ed E; cada prima frà i punti E, & C. Perche la retta AB è diuiſa in due parti vguali in E, ed in due ineguali in C, ſarà il rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AC, CB, col quadrato di EC, [b] vguale al quadrato di EB; e per l'iſteſſa ragione, il rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato di ED, è vguale al medeſimo quadrato di EB; e perciò il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, col quadrato di EC, è vguale al rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB, col quadrato di ED: ſe ne leuino gl'ineguali quadrati di EC, & ED, reſta il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, minore del rettangolo, contenuto dalle parti AD, DB; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, ſarà minore del doppio rettangolo, contenuto dalle due AD, DB. In oltre, perche la retta AB è diuiſa in C, i quadrati delle parti AC, CB,

a 10. del 1.

b 5. del 2.

col doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime parti AC, CB, [c] è vguale al quadrato di AB. Similmente, eſſendo AB diuiſa in D, i quadrati delle parti AD, DB, col doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime parti, è vguale al medeſimo quadrato di AB. Per la qual coſa i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo delle parti AC, CB, ſarà vguale à i quadrati delle parti AD, DB, col doppio rettangolo delle medeſime parti AD, DB. Da vna di queſte vgualità ſe ne leui il doppio rettangolo delle parti AC, CB; e dall'altra ſe ne leui il doppio rettangolo delle parti AD, DB; eſſendoſi dimoſtrato il doppio rettangolo delle due AC, CB, minore del doppio rettangolo delle due AD, DB, reſtano i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

c 4. del 2.



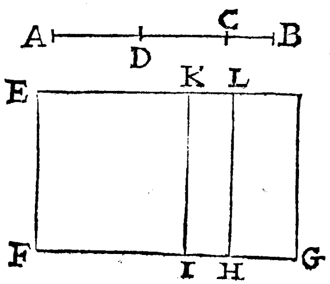
Cada il punto D frà i punti A, ed E. Perche AE è vguale ad EB, ſarà AD minore di DB; e, per l'iſteſſa ragione, CB ſarà minore di AC. E perche le parti AC, CB, ſi ſuppongono più ineguali delle due AD, DB, ſarà AD maggiore di CB: ma EB è vguale ad EA, il reſtante EC ſarà maggiore di ED. Hor perche la retta AB è diuiſa in due parti vguali in E, ed in due ineguali in C, il rettangolo delle parti ineguali AC, CB, col quadrato di EC, [d] ſarà vguale al quadrato di EB. Similmente la retta AB è diuiſa in due parti ineguali in D, il rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato di DE, è vguale al quadrato di AE, cioè al quadrato di EB; per la qual coſa il rettangolo delle parti ineguali AC, CB, col quadrato di EC, ſarà vguale al rettangolo, contenuto dalle parti ineguali AD, DB, col quadrato di DE: ſe ne leuino gl'ineguali quadrati di EC, e di DE, reſta il rettangolo delle parti AC, CB, minore del rettangolo delle parti AD, DB; e, procedendoſi, come prima ſi fece, ſi dimoſtrerà, che i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, ſono maggiori de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB, come fù propoſto dimoſtrare.

d 5. del 2.

LEMMA II.

Suppoſte le medeſime coſe. Dico che i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, ſuperano i quadrati delle parti meno ineguali, AD, DB, per quanto il doppio rettangolo delle parti meno ineguali AD, DB, ſupera il doppio rettangolo delle parti più ineguali AC, CB.

a 45. del 1. *A qualunque retta EF, [a] si applichi il rettangolo EG, vguale al quadrato di AB; ed alla medesima retta EF si applichi il rettangolo EH, vguale all'aggregato de i quadrati delle parti più ineguali AC, CB; e similmente ad EF si applichi il rettangolo EI, vguale all'aggregato de i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB. Perche i quadrati delle parti più ineguali AC, CB, per l'antecedente Lemma, superano i quadrati delle parti meno ineguali AD, DB, perciò il rettangolo EH sarà maggiore del rettãgolo EI, la loro differenza sia, per esempio, il rettangolo KH. Dico che*



il rettangolo KH è ancora la differenza di quanto il doppio rettangolo delle parti AD, DB, supera il doppio rettangolo delle parti AC, CB. Perche i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo delle medesime parti AC, CB, [b] è vguale al quadrato di AB, cioè al rettangolo b 4. del 2.
EG; e l'aggregato de i quadrati delle parti AC, CB, per costruttione, è vguale al rettangolo EH; sarà il rettangolo LG vguale al doppio rettangolo delle parti AC, CB. Similmente, perche i quadrati delle parti AD, DB, col doppio rettangolo delle medesime parti AD, DB, [c] è c 4. del 2.
vguale al quadrato di AB, cioè al rettangolo EG; e l'aggregato de i quadrati delle parti AD, DB, per costruttione, è vguale al rettangolo EI; sarà il rettangolo KG vguale al doppio rettangolo delle parti meno ineguali AD, DB; per la qual cosa il rettangolo KH sarà la differenza di quanto il rettangolo KG supera il rettangolo LG: ma il rettangolo KG è vguale al doppio rettangolo delle parti meno ineguali AD, DB; ed il rettangolo LG è vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle parti più ineguali AC, CB; sarà KH la differenza di quanto il doppio rettangolo delle parti meno ineguali supera il doppio rettangolo delle parti più ineguali; ma fù dimostrato, che il medesimo rettangolo KH è la differenza di quanto i quadrati delle parti più ineguali superano i quadrati delle parti meno ineguali; la differenza dunque di quanto i quadrati delle parti più ineguali superano i quadrati delle parti meno ineguali, è vguale alla differenza, di quanto il doppio rettangolo delle parti meno ineguali supera il doppio rettangolo delle parti più ineguali, ch'era da dimostrarsi.

COROL-

COROLLARIO.

Da quel, che si è detto, è manifesto, che il doppio rettangolo delle parti AC, CB, non è vguale al doppio rettangolo delle parti AD, DB.

THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XLIII.

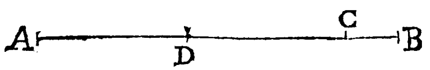
La retta di due nomi, che si dice Binomio, si diuide ne i suoi nomi in vn sol punto.

Sia la retta composta di due nomi AB, diuisa ne i suoi nomi, nel punto C; cioè, che le parti AC, CB, siano Rationali, e commensurabili solamente in potenza, come appare nella 37. propositione di questo. Dico che la retta AB non si può diuidere in due altre Rationali, commensurabili solamente in potenza, in altro punto, fuori del punto C. Diuidasi, s'è possibile, in altri nomi ineguali à i due AC, CB, in qualche punto D, in modo, che le parti AD, DB siano Rationali, e commensurabili solamente in potenza: è manifesto che la retta AB non è diuisa in C in due parti vguali; perche, se fosse diuisa in due parti vguali in C, le rette AC, CB sarebbero commensurabili in lunghezza, ch'è contro

all'ipotesi, mentre si è supposto, che le rette AC, CB sono commensurabili solamente in potenza. Per l'istessa ragione la retta AB non è diuisa in D, in due parti vguali. In oltre, per ipotesi, i nomi BD, DA non sono i medesimi, che i nomi AC, CB, cioè le parti BD, DA, non sono vguali alle parti AC, CB; cioè la maggior parte BD non è vguale alla maggior parte AC; ne la minore AD è vguale alla minore CB; saranno le parti AC, CB, ò più ineguali, ò meno ineguali delle parti BD, DA; e per il primo de gli antecedenti Lemma, i quadrati delle parti AC, CB, ò sono maggiori, ò minori de i quadrati delle parti AD, DB. Di più, perche le rette AC, CB, per ipotesi, sono Rationali, i loro quadrati, cioè i quadrati delle rette AC, CB [a] sono Rationali, ed il composto a 8. defin. del 10.
de i quadrati delle rette AC, CB, per lo Scolio alla 34. propositione, sarà Rationale. E perche le rette AD, DB, per la fatta suppositione, sono Rationali, l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sarà Rationale: mà il Rationale supera il Rationale (per lo Scolio alla vigesimasettima di questo) per vn Rationale; essendo l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ch'è Rationale, ineguale all'aggregato de i quadrati di AD, DB, ch'è Rationale, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sarà Rationale: mà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de quadrati di AD, DB (per il secondo de gli antecedenti Lemma) è vguale alla differenza, ch'è frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettan-

golo

golo delle parti AD, DB; ſarà la differenza frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti di AD, DB Rationale. Finalmente, perche il rettangolo delle due AC, CB, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il rettangolo delle due Rationali AC, CB, commenſurabili ſolamente in potenza, [b] è Medio; il doppio rettangolo delle due AC, CB, che gli è commenſurabile, [c] ſarà medio. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Medio. Di più, per l'antecedente Corollario, il doppio rettangolo delle parti AC, CB, che ſi diſſe eſſer Medio, non è vguale al doppio rettangolo delle parti AD, DB, che ſimilmente è Medio, e perciò l'vno ſupera l'altro di qualche quantità: e perche il medio non ſupera il medio per ſpatio Rationale, [d] mà lo ſupera per vno ſpatio Medio; la differenza frà il doppio rettangolo delle parti AC,CB, ed il doppio rettangolo delle parti AD,DB ſarà Medio; fù antecedentemente dimoſtrata Rationale, ſarebbe medio, e ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque la retta AB, compoſta di due nomi, ſi diuide ne i ſuoi nomi in altro punto, che nel ſolo punto C, come fù propoſto dimoſtrare.



b 22. del 10.

c Corol. alla 24. del 10.

d 27. del 10.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XLIV.

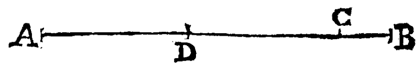
La retta, che ſi chiama prima Bimediale, ſi diuide ne i ſuoi nomi in vn ſol punto.

Sia AB la prima Bimediale, diuiſa in C in due Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale, come richiede la propoſitione 38. di queſto. Dico che AB non ſi diuide in due altre Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, che contengano vno ſpatio Rationale, in altro punto, fuori del punto C. Diuidaſi, s'è poſſibile, in due altre medie, ineguali alle due AC, CB, in qualche punto D, in modo, che le Medie AD, DB ſiano commenſurabili ſolamente in potenza, e contengano vn rettangolo Rationale; ſi dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che le parti AC, CB, ò ſono più ineguali, ò meno ineguali, delle parti AD, DB, e che l'aggregato de i quadrati delle parti AC, CB, è maggiore, ò minore dell'aggregato de i quadrati di AD, DB. In oltre, perche il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, è commenſurabile al ſuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il rettangolo delle medeſime parti AC, CB, per ipoteſi, è Rationale; il doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, che gli è commenſurabile, [a] ſarà Rationale. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale: mà vn Rationale ſupera vn Rationale, [b] per vno ſpatio Rationale, la differenza frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti AD, DB ſarà Rationale: mà, per il ſecondo Lemma dopo la 42. propoſitione, la differenza frà il doppio rettan-

a 9. defin. del 10.

b Scol. alla prop. 27. del 10.

rettangolo delle due AC,CB, ed il doppio rettangolo delle due AD,DB, è vguale alla differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB; e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, per la qual coſa la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB; e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, ſarà ſpatio Rationale. Di nuouo, perche le parti AC, CB, per ipoteſi, ſono Medie commenſurabili ſolamente in potenza; ſaranno i quadrati delle rette AC, CB Medij, frà di loro commenſurabili, e l'aggregato de i quadrati di AC, CB [c] ſarà commenſurabile all'vno, ed all'altro quadrato: mà l'vno, e l'altro quadrato è Medio; ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per il Corollario alla 24. propoſitione di queſto, Medio. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è ancora Medio: e perche il Medio non ſupera il Medio [d] per vno ſpatio Rationale, non ſarà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD,DB ſpatio Rationale: mà fù dimoſtrato antecedentemente, che queſta differenza è ſpatio Rationale, ſarebbe, e non ſarebbe ſpatio Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque la Bimediale AB ſi diuide ne i ſuoi nomi in altro punto, che nel punto C, come fù propoſto dimoſtrare.



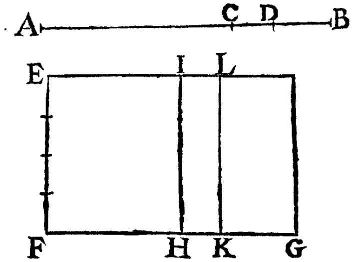
c 16. del 10.

d 27. del 10.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XLV.

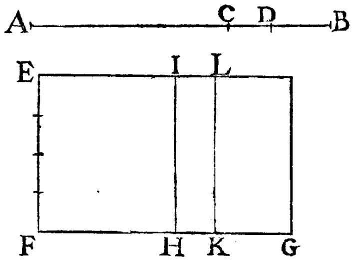
La ſeconda delle due Medie, cioè la Bimediale ſeconda, ſi diuide nelle ſue Medie in vn ſol punto.

Sia AB la ſeconda Bimediale, diuiſa in C, nelle due Medie AC, CB, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Medio, come ricerca la 39. propoſitione di queſto. Dico che AB non ſi diuide in due altre medie, commenſurabili ſolamente in potenza, che contengano vno ſpatio Medio, in altro punto, fuor che nel punto C. Diuidaſi, s'è poſſibile, in due Medie, diuerſe dalle due AC, CB, cioè ineguali alle due AC, CB nel punto D, in modo, che le medie AD, DB ſiano cõmenſurabili ſolamente in potenza, e contengano vno ſpatio Medio. Si dimoſtri, come ſi fece nella 43. propoſitione, che i quadrati delle rette AC, CD, ò ſono maggiori, ouero minori de i quadrati delle rette AD, DB; ſi eſponga la Rationale EF, alla quale ſi applichi il rettangolo EG, [a] vguale al quadrato di AB; ed alla medeſima Rationale EF ſi applichi il rettangolo EH, vguale all'ag-



a 45. del 1.

gregato de i quadrati delle rette AC, CB; essendo i quadrati delle parti AC, CB, col doppio rettangolo delle medesime AC, CB, [b] vguali al quadrato di AB, cioè vguali al rettangolo EG; ed i quadrati di AC, CB sono vguali al rettangolo EH, sarà il doppio rettangolo delle due AC, CB vguale al rettangolo IG. Nell'istesso modo, se si applica alla Rationale EF [c] il rettangolo EK, vguale all'aggregato de i quadrati di AD, DB; sarà il rettangolo LG vguale al doppio rettangolo delle due AD, DB. E perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, è ineguale all'aggregato de i quadrati di AD, DB; perciò il rettangolo EK sarà ineguale al rettangolo EH; dal che le rette FK, FH [d] sono ineguali. In oltre, perche i quadrati di AC, CB, per il Lemma alla 39. propositione di questo, sono maggiori del doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà EH maggiore di IG: per la qual cosa EH [e] sarà maggiore della metà di EG; ed il lato FH sarà maggiore della metà di FG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che FK è maggiore della metà di FG, ed in conseguenza le parti FH, HG sono ò più ineguali, ò meno ineguali, delle parti FK, KG. Di nuouo, perche le parti AC, CB, per ipotesi, sono Medie, commensurabili in potenza; i quadrati di AC, CB saranno Medij frà di loro commensurabili, ed il composto de i quadrati di AC, CB [f] sarà commensurabile tanto al quadrato di AC, quanto al quadrato DC: si disse, che i quadrati di AC, & CB, sono Medij; l'aggregato de quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo EH, ch'è commensurabile ad ogn'vno di loro, per il Corollario alla 24. propositione di questo, sarà ancora Medio. Nell'istessa maniera si prouerà, che il rettangolo EK è Medio; e perche i Medij EH, EK sono applicati alla Rationale EF, i lati FH, FK [g] saranno Rationali, incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF. Similmente, perche il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, per ipotesi, è Medio, il doppio rettangolo delle medesime parti AC, CB, che gli è commensurabile, cioè il rettangolo IG, [h] sarà ancora Medio. E nell'istesso modo si dimostrerà, che LG è medio; applicati dunque i due rettangoli IG, LG alla rationale LK, cioè IH, ouero EF, gli altri lati HG, KG [K] saranno Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF. Si prendano le rette AC, CB, come basi di due rettangoli, ed AC sia altezza commune; sarà il quadrato di AC al rettangolo delle parti AC, CB, [l] come AC à CB: mà AC, per ipotesi, è incommensurabile in lunghezza à CB; sarà il quadrato di AC [m] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. Hor essendo le due AC, CB, per ipotesi, commensurabili solamente in potenza, sarà il quadrato di AC commensurabile al quadrato di CB; e l'aggregato de i due quadrati di AC, CB [n] sarà commensurabile al quadrato di AC: mà il quadrato di AC è incommensura-



b 4. del 2.
c 45. del 1
d 1. del 6. & Scol. alla 16 del 5.
e 1. del 6. & Scol. alla 16. del 5.
f 16. del 10.
g 23. del 10.
h Coroll. alla 24. del 16.
K 23. del 10.
l 1. del 6.
m 10. del 10
n 16. del 10.

bile

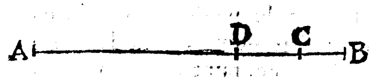
bile al rettangolo delle due AC, CB, sarà l'aggregato de i quadrati AC, CB [o] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà l'aggregato de i quadrati AC, CB, cioè EH, [p] incommensurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo IG. Et essendo EH ad IG, [q] come la base FH alla base HG; sarà FH [r] incommensurabile ad HG; dal che le due FH, HG sono incommensurabili in lunghezza: mà le rette FH, HG furono dimostrate Rationali, in conseguenza sarà FH commensurabile solamente in potenza ad HG. Per la qual cosa tutta la retta FG [t] sarà irrationale, & sarà quella linea, chiamata Binomio, diuisa ne i suoi nomi nel punto H. Tutto quel, che si è fatto, considerando le parti AC, CB, ed i rettangoli EH, IG; si faccia considerando le parti AD, DB, ed i rettangoli EK, LG; e si dimostrerà, che tutta FG è quella retta, che chiamiamo Binomio, diuisa ne i suoi nomi nel punto K. Per la qual cosa il medesimo binomio sarà diuiso ne i suoi nomi nel punto H, ed ancora nel punto K, [u] ch'è contro alla 43. propositione. Non dunque la Bimediale seconda AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, fuori del punto C, ch'era da dimostrarsi.

o Scol. alla 14. del 10.
p 14. del 10.
q 1. del 6.
r 10. del 10.
t 37. del 10.
u 43. del 10

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XLVI.

La Maggiore si diuide ne i suoi nomi in vn solo punto.

Sia la Maggiore AB, diuisa ne i suoi nomi nel punto C, in modo, che le parti AC, CB, siano incommensurabili in potenza; e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, sia Rationale; ed il rettangolo delle medesime sia Medio, come richiede la 40. propositione di questo.



Dico che AB non si diuide in altro punto ne i nomi, che ritengano le medesime conditioni. Si diuida, se è possibile, nel punto D, in modo, che le due AD, DB, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sia Rationale; ed il rettangolo, contenuto dalle due AD, DB, sia Medio. Si dimostrerà, come si fece nella 43, che le parti AC, CB, ò sono più ineguali, ò meno ineguali, delle parti AD, DB; e per il 2. Lemma dopo la propos. 42. di questo, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB; e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è l'istessa, ò vguale alla differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CD, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB. In oltre, essendo, per ipotesi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, Rationale; e l'aggregato de i quadrati AD, DB, similmente Rationale; sarà [a] la loro differenza Rationale: mà si disse, che questa differenza è vguale alla differenza, che è frà il doppio rettangolo delle parti AC, CB, ed il doppio rettangolo delle parti AD, DB: la differenza dunque frà il doppio rettan-

a Scol. alla 27. del 10.

 golo

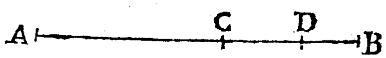
golo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, sarà Rationale. Di nuouo, perche il rettangolo delle due AC, CB, è Medio, il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, che gli è commensurabile, per il Corollario alla 24. propositione, sarà Medio. E nell'istesso modo si prouerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Medio. E per-

b 27. del 10. che il Medio non supera il Medio [b] per vno spatio Rationale, la differenza del doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, non sarà Rationale: ma antecedentemente tal differenza fù mostrata Rationale; sarà, e non sarà Rationale, ch'è impossibile. Non dunque la Maggiore AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, fuori del punto C, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XLVII.

La linea Potente per il Rationale, e Medio, si diuide ne i suoi nomi in vn sol punto.

Sia AB la linea Potente per il Rationale, e Medio, diuisa ne i suoi nomi nel punto C; cioè, che le rette AC, CB, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati delle medesime AC, CB, sia Medio; ed il Rettangolo, contenuto da esse, sia Rationale, come ricerca la 41. propos. di questo. Dico che AB non si diuide in altri nomi, che habbiano le medesime conditioni, in altro punto. Diuidasi, s'è possibile, nel punto D, in modo, che le rette AD, DB, siano incommensurabili in potenza; che

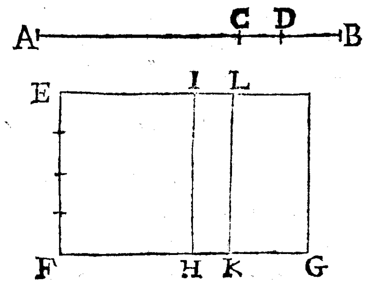


l'aggregato de i loro quadrati sia Medio; e che il rettangolo, contenuto dalle due AD, DB, sia Rationale. Si dimostri, come si fece nella 43. propos. di questo, che le due AD, DB sono più, ò meno ineguali, delle due AC, CB; e per il 2. Lemma dopo la 42. di questo, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è l'istessa, ò vguale alla differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB: ma la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, per lo Scolio alla 27. propos. è Rationale (stante che ogn'vno di quei rettangoli, per ipotesi, è Rationale) sarà la differenza frà l'aggregato de i quadrati AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, Rationale. E perche gli aggregati di quei quadrati, per
a 27. del 10. ipotesi, sono Medij, ed il Medio non supera il Medio [a] per spatio Rationale; sarebbe tal differenza Rationale, e non sarebbe Rationale, ch'è impossibile. Non dunque la retta AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, fuor che nel punto C, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIONE XLVIII.

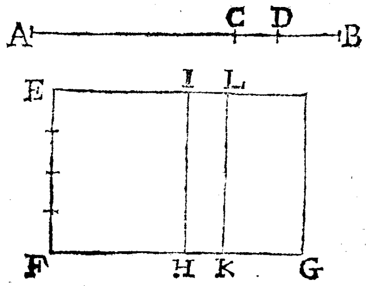
La linea potente per due Medij, si diuide ne i suoi nomi in vn sol punto.

Sia la linea potente per due Medij AB, diuisa ne i suoi nomi nel punto C, in modo, che le rette AC, CB, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i loro quadrati sia Medio; e che il rettangolo, contenuto dalle medesime, sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, come ricerca la propos. 42. di questo. Dico che AB non si diuide in altri nomi, delle medesime conditioni, in altro punto, fuori del punto C. Si diuida, s'è possibile nel punto D, in altri nomi, in modo, che le parti AD, DB, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati di AD, DB sia Medio; e che il rettangolo, contenuto dalle medesime parti AD, DB, sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati. Si faccia la medesima costruttione della 45. propos. e si dimostri, come iui si fece, che le parti FH, HG, ò sono



più ineguali, ò meno ineguali, delle parti FK, KG. Perche il rettangolo delle due AC, CB, per ipotesi, è Medio, il suo doppio, cioè il doppio rettangolo delle due AC, CB, che gli è commensurabile, per il Corollario alla 24. di questo, sarà Medio: ma, per costruttione, il rettangolo IG è vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà il rettangolo IG Medio. Nell'istesso modo si prouerà, che il rettangolo LG è Medio. In oltre, perche l'aggregato de i quadrati AC, CB, per ipotesi, è Medio, il rettangolo EH, che, per costruttione, è vguale all'aggregato di quei quadrati, sarà Medio. E nell'istesso modo si dimostrerà, che il rettangolo EK è Medio. E perche i medij EH, IG, sono applicati alla Rationale EF; i lati FH, HG, [a] saranno Rationali, e saranno incom- a 23. del 10.
mensurabili in lunghezza alla Rationale EF. E per simile ragione le rette FK, KG sono Rationali, ed incommensurabili in lunghezza alla Rationale EF. Di più, essendo, per ipotesi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo EH, incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB, [b] sarà ancora incommensurabile al doppio rettangolo del- b Corol. alla
le medesime AC, CB, cioè al rettangolo IG: ma il rettangolo EH al ret- 24. del 10.
tangolo IG [c] è come FH ad HG; ed EH è dimostrato incommensurabile c 1. del 6.
ad IG; sarà FH [d] incommensurabile ad HG. Dal che le due FH, HG so- d 10. del 10.
no incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali; e 10. defin.
saranno le due FH, HG, [e] commensurabili solamente in potenza. Per la del 10.

f 37. del 10. qual cosa tutta la retta FG [f] sarà irrationale, e sarà quella, che fù chiamata Binomio; la quale è diuisa ne i suoi nomi nel punto H. Tutto
quello, che si è fatto, considerando le parti AC, CB, ed i rettangoli EH, IG, si farà ancora, col considerare le parti AD, DB, ed i rettangoli EK, LG; ed in tal mo-
g 37. del 10. do si dimostrerà, che FG [g] è quella retta, che si chiama Binomio, e che si diuide ne i suoi nomi nel punto K. Per la qual cosa il Binomio FG si diuide ne i suoi nomi nel punto H, e si diuide ancora nel punto K, ch'è contro alla 43. propositione di questo. Non dunque la retta AB si diuide ne i suoi nomi in altro punto, fuor che nel punto D, come fù proposto dimostrare.



DEFINITIONI SECONDE.

Proposte due rette linee, vna Rationale, e l'altra sia Binomio, diuisa ne i suoi nomi, in modo, che il quadrato del maggior nome superi il quadrato del minor nome d'vna retta linea, commensurabile in lunghezza al maggior nome.

I.

Se il maggior nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, la composta del maggiore, è minor nome, si chiamerà Primo Binomio.

I I.

Se il minor nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, si chiamerà Secondo Binomio.

I I I.

Se nissuno di quei nomi è commensurabile in lunghezza alla Rationale, il composto di quei due nomi si dirà Terzo Binomio.

Di nuouo, se il quadrato del maggior nome è maggiore del quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile al maggior nome.

I V.

Se il maggior nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, il composto di quei due nomi si chiamerà Quarto Binomio.

V.

Se il minor nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, si dirà Quinto Binomio.

V I.

E se nissuno di quei nomi è commensurabile in lunghezza all'esposta Rationale, si chiamerà Sesto Binomio.

Procedendo Euclide col suo impareggiabil ordine, dalle cose semplici alle composte, e da queste alle più composte; dopo dimostrata la commensurabilità, ed incommensurabilità delle semplici grandezze frà di loro; fatta la comparatione di queste alla Rationale, e spiegato il nascimento, e natura delle Medie; passa alla generatione delle composte, e dimostra, che sono tutte Irrationali, disponendo sempre le cose con ordine accomodato alla nostra intelligenza; cioè, dal Rationale fà passaggio al Medio, e dal Medio all'Irrationale. E perche le rette Irrationali sono innumerabili, ne sceglie le più elementari, e le distribuisce in tredici classe; cioè, vna semplice, sei per compositione, e sei per sottrattione. Quelle per compositione sono le sei seguenti, cioè. Quelle rette, che separatamente sono composte di due Rationali, commensurabili solamente in potenza, costituiscono il primo genere d'irrationali; ed ogn'vna si chiama Binomio, come apparisce nella 37. propos. di questo. Quelle, che separatamente sono composte di due Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengano vno spatio Rationale, costituiscono il secondo genere; ed ogn'vna si chiama prima Bimediale, come nella propositione 38. Similmente quelle, che si compongono di due Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono vno spatio Medio, formano il terzo genere; ed ogn'vna si chiama seconda Bimediale, come nella 39. propositione. Le rette linee poi, che separatamente sono composte da due linee rette, incommensurabili in potenza, i di cui quadrati, insieme giunti, compongano vn Rationale, ed il rettangolo, contenuto da loro, è Medio; costituiscono il quarto genere, ed ogn'vna si chiama Maggiore, come nella 40. propositione. Oltre à ciò, quelle rette linee, che separatamente sono composte di due linee rette, incommensurabili in potenza, che i loro quadrati compongano vn Medio, ed il rettangolo, contenuto da esse, è Medio; costituiscono il quinto genere; ed ogn'vna si chiama Potente per vn Rationale, ed vn Medio, come nella 41. propositione. E finalmente quelle rette linee, che separatamente sono composte di due rette, incommensurabili in potenza, che i loro quadrati compongano vn Medio, ed il rettangolo, contenuto da esse, è Medio incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, costituiscono il sesto genere, ed ogn'vna si chiama

Potente di due Medie, come nella 42.propositione. Spiegata la generatione di queste sei linee, e douendole comparare alla Rationale, diuide prima il genere de' Binomij in sei linee di due nomi, cioè in sei Binomij, con quest' ordine.

Perche ogni Binomio è composto di due rette Rationali, commensurabili solamente in potenza, queste due rette, che compongono il Binomio, non possono essere ambedue commensurabili in lunghezza alla Rationale; perche se ciò fosse, sarebbero frà di loro commensurabili in lunghezza, ed il loro aggregato sarebbe vna linea Rationale, ch'è contro à quel, che si dimostrò nella generatione del Binomio alla propositione 37: perilche ò vna di quelle, ò l'altra, ò nissuna, sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale. E di questi due nomi, che compongono il Binomio, vno sarà maggiore dell'altro: perche, se fossero vguali, sarebbero commensurabili frà di loro in lunghezza, ch'è contro all'ipotesi, mentre si suppongono commensurabili solamente in potenza. Hor essendo ineguali i nomi, che compongono il Binomio, il quadrato del maggior nome superarà il quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, ò commensurabile, ouero incommensurabile in lunghezza ad esso maggior nome; Se il quadrato del maggior nome supera il quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad esso maggior nome, ne nascono trè Binomij in questa forma. Se il maggior nome è commensurabile in lunghezza alla Rationale, quello si chiama primo Binomio. Se alla Rationale sarà commensurabile in lunghezza il minor nome, si dirà secondo Binomio. E se nissuno de' nomi è commensurabile in lunghezza alla Rationale, si chiamerà terzo Binomio. In oltre quando il quadrato del maggior nome supera il quadrato del minor nome, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza al maggior nome, ne nascono tre altri Binomij, in questo modo. Se il maggior nome sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale, quello si chiamerà quarto Binomio. Se poi alla Rationale sarà commensurabile in lunghezza il minor nome, si chiamerà quinto Binomio. E se nissuno de i due nomi sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale, quello si chiamerà sesto Binomio. E di questi conseguentemente se ne dimostra la loro generatione.

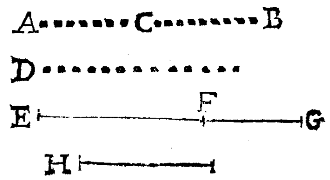
Quanto poi à gli altri cinque generi di linee sopra nominati, come la prima Bimediale, la seconda Bimediale, la Maggiore &c. non si diuidono in altri generi di linee, come si è fatto del Binomio; stante che tutti i nomi, che compongono queste linee, sono incommensurabili in lunghezza alla Rationale.

PROBLEMA XIII. PROPOSITIONE XLIX.

Ritrouare il Primo Binomio.

Per la seconda parte del Corollario alla 29. propositione di questo, si trouino due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC non sia numero quadrato: sarà la proportione di AB, à BC, come numero quadrato à numero quadrato; e la proportione di BA ad AC non sara come numero quadrato à numero quadrato. Si esponga poi qualche Rationale D, e si prenda EF, commensurabile in lunghezza alla Rationale D, sarà EF Rationale. Si faccia poi, per il Corollario alla 6. propo-

sitione di questo, si come il numero AB al numero AC, così il quadrato di EF al quadrato di FG. Dico che la retta EG sarà vna di quelle linee, che chiamiamo Primo Binomio. Perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, saranno i quadrati delle due EF, FG, [a] frà di loro commensurabili; dalche le rette EF, FG sono almeno commensurabili in potenza; ma la retta EF fù dimostrata Rationale, sarà FG, [b] che gli è commensurabile in potenza, Rationale. E perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, ed il numero AB al numero AC, per costruttione, non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di EF al quadrato di FG è come numero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa le rette EF, FG, [c] sono incommensurabili in lunghezza: Ma le medesime EF, FG, furono dimostrate Rationali, commensurabili in potenza; il loro composto, cioè tutta la retta EG, [d] sarà irrationale, e sarà vna di quelle, che habbiamo chiamata Binomio. Dico che EG è primo Binomio. Perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, e, per costruttione, AB è maggiore di AC; sarà il quadrato di EF maggiore del quadrato di FG; dal quadrato di EF se ne detragga il quadrato di FG, per il Lemma alla propositione decima quarta, e quel, che resta, sia il quadrato della retta H; sarà il quadrato di H la differenza di quanto il quadrato di EF supera il quadrato di FG. In oltre, perche il numero AB al numero AC è come il quadrato di EF al quadrato di FG, per la conuersione della proportione, l'antecedente AB alla differenza frà l'antecedente AB, ed il conseguente AC, cioè à BC, [e] sarà come il quadrato di EF, ch'è antecedente, alla differenza frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG, ch'è conseguente, cioè al quadrato di H. Hor essendo AB à BC, come il quadrato di EF al quadrato di H; e la proportione di AB à BC, per costruttione, è come numero quadrato à numero quadrato; sarà il quadrato di EF al quadrato di H, come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette FE, & H, [f] sono commensurabili in lunghezza. Finalmente, perche il quadrato del maggior nome EF supera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza ad esso maggior nome EF; ed il maggior nome EF, per costruttione, è commensurabile in lunghezza alla Rationale D, per la prima delle antecedenti definitioni, sarà EG quella retta, che si chiama primo Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.



a 6. del 10.

b 6. defin. del 10.

c 9. del 10.

d 37. del 10.

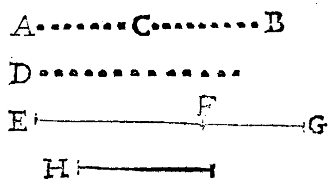
e Corol. al la 19. del 5.

f 9. del 10.

PROBLEMA XIV. PROPOSITIONE L.

Ritrouare il secondo Binomio.

Si trouino, come si disse nell'antecedente propositione, due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC, non sia numero quadrato. Sia esposta la Rationale D, e sia presa la retta FG, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; a 6. defin. del 10. sarà la retta GF [a] Rationale. Si faccia per il Corollario alla sesta propositione, sì come il numero AC al numero AB, così il quadrato di FG al quadrato di EF. Dico che la retta EG sarà il secondo Binomio, che si cerca. Perche il quadrato di GF al quadrato di FE è come il numero AC al numero AB, b 6. del 10. saranno i quadrati delle due GF, FE, [b] commensurabili; dal che le rette GF, FE sono commensurabili, almeno in potenza: c 6. defin. del 10. ma la retta GF è dimostrata Rationale, sarà la retta FE, [c] che gli è commensurabile in potenza, Rationale. Di nuouo, perche AC ad AB è come il quadrato di GF al quadrato di FE; ed il numero AC al numero AB non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di GF al quadrato di FE è come numero quadrato à numero quadrato; d 9. del 10. per la qual cosa le rette GF, FE, [d] sono incommensurabili in lunghezza: furono già dimostrate Rationali, in conseguenza le rette GF, FE, sono commensurabili solamente in potenza, ed il loro aggregato, cioè tutta e 37. del 10. la retta EG, [e] sarà irrationale, e sarà quella retta, che si chiama Binomio. Dico che la retta EG è quella, che chiamiamo secondo Binomio. Perche il numero AC al numero AB è come il quadrato di GF al quadrato di FE, inuertendo, AB ad AC sarà come il quadrato di EF al quadrato di FG: ma BA, per costruttione, è maggiore di AC; sarà il quadrato di EF maggiore del quadrato di FG. Dal quadrato di EF, per il Lem. alla 14. propos. di questo, se ne sottragga il quadrato di FG, e quel, che resta, sia il quadrato di H; sarà il quadrato di H la differenza di quanto il quadrato di EF supera il quadrato di FG. E procedendo come nell'antecedente propositione, si dimostrerà, che la retta H è commensurabile in lunghezza al maggior nome EF. E perche il quadrato del maggior nome EF supera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza al maggior nome EF; e, per costruttione, il minor nome FG è commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la seconda delle antecedenti definitioni, sarà EG quella retta, che si chiama secondo Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.

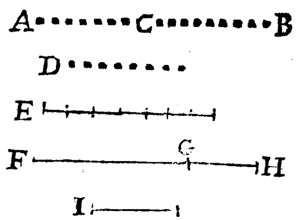


PROBLEMA XV. PROPOSITIONE LI.

Ritrouare il terzo Binomio.

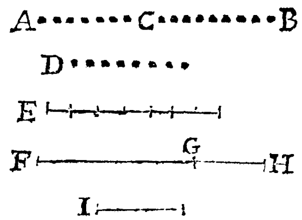
Per la seconda parte del Corollario alla 29. propositione di questo, si trouino due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC non sia numero quadrato; poi si prenda vn altro numero D non quadrato,

che non habbia ad AC la proportione di numero quadrato à numero quadrato, il che facilmente s'ottiene, se si fà il numero D maggiore di AC per vna vnità, ò due, al più; cioè se, facendosi D maggiore di AC d'vna vnità, fusse numero quadrato, all'hora s'aggiungerà à D vn'altra vnità; mà se con l'aggiunta d'vna sola vnità non fusse numero quadrato, non farà bisogno aggiungerui altra vnità, perche, in quel caso, il numero D non sarà piano, simile ad AC, e perciò non hauerà la proportione ad AC, come numero quadrato à numero quadrato; ed oltre à ciò, non essendo D numero quadrato, ne meno hauerà la proportione ad AB, come numero quadrato à numero quadrato. Si esponga poi qualunque Rationale E, e, per il Corollario alla sesta propositione, si faccia sì come il numero D al numero AB, così il quadrato della Rationale E al quadrato di FG. Essendo i quadrati di E, ed FG, come numero à numero, [a] saranno frà di loro commensurabili, e perciò le rette E, & FG, sono commensurabili, al meno in potenza: mà la retta E è posta Rationale, sarà FG, [b] che gli è commensurabile in potenza, Rationale. In oltre, perche il numero D al numero AB non è come numero quadrato à numero quadrato, ed il numero D al numero AB è come il quadrato di E al quadrato di FG; il quadrato di E al quadrato di FG non sarà come numero quadrato à numero quadrato, e perciò le rette E, & FG [c] sono incommensurabili in lunghezza. Di nuouo, per il Corollario alla sesta propositione, si faccia sì come AB ad AC, così il quadrato di FG al quadrato di GH. Hauendo i quadrati di FG, & GH, la proportione del numero AB al numero AC, [d] saranno frà di loro commensurabili, e le rette FG, GH saranno commensurabili al meno in potenza: mà la retta FG è dimostrata Rationale, sarà la retta GH [e] ancora Rationale. E perche AB ad AC non è come numero quadrato à numero quadrato, ed il quadrato di FG al quadrato di GH è come AB ad AC, il quadrato di FG al quadrato di GH non sarà come numero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa le rette [f] FG, GH sono incommensurabili in lunghezza: mà furono dimostrate Rationali, in conseguenza sono commensurabili solamente in potenza; e per la 37. propositione di questo, tutta la retta FH è irrationale, ed è quella, che si chiama Binomio. Dico che la retta FH è quella linea, che si chiama terzo Binomio. Perche D ad AB, per costruttione, è come il quadrato della retta E al quadrato di FG, e la proportione di AB ad AC è come quella del quadrato di FG al quadrato di GH; per l'vgualità, sarà D ad AC, [g] come il quadrato di E al quadrato di GH; mà D ad AC non hà la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato; ne meno il quadrato di E al quadrato di GH è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa le rette E, & GH, [h] sono incommensurabili in lunghezza. Di più essendo AB ad AC come il quadrato di FG al quadrato di GH, ed il numero AB,



a 6. del 10.
b 6. defin. del 10.
c 9. del 10.
d 6. del 10.
e 6. defin. del 10.
f 9. del 10.
g 22. del 5.
h 9. del 10.

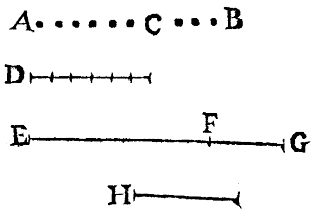
per coſtruttione, è maggiore di AC; ſarà il quadrato di FG maggiore del quadrato di GH. Sia il quadrato di I la differenza di quanto il quadrato di FG ſupera il quadrato di GH. Perche AB ad AC è come il quadrato di FG al quadrato di GH, per la conuerſione della proportione,
K Corol. al la 19. del 5. ſarà AB à BC [K] come il quadrato di FG alla differenza frà il quadrato di FG, ed il quadrato di GH; cioè al quadrato di I: mà AB à BC è come numero quadrato à numero quadrato; ſarà il quadrato di FG al quadrato di I come numero quadrato à numero quadrato; e perciò le rette
19. del 10. FG, ed I [l] ſono commenſurabili in lunghezza. Hor perche il quadrato del maggior nome FG, ſupera il quadrato del minor nome GH, per il quadrato della retta I, commenſurabile in lunghezza ad eſſo maggior nome FG, e niſſuna delle due FG, GH, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale E; ſarà, per la terza delle antecedenti definitioni, la retta FH quella, che ſi chiama terzo Binomio ch'era da dimoſtrarſi.



PROBLEMA XVI. PROPOSITIONE LII.

Ritrouare il quarto Binomio.

Per lo Scolio alla propoſitione 29. ſi trouino due numeri, come AC, CB in modo, che il loro aggregato AB à niſſuno di loro ſia come numero quadrato à numero quadrato. Si eſponga qualche Rationale D, e ſi prenda la retta EF, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; ſarà la retta EF Rationale, e, procedendoſi nel rimanente, come ſi fece alla 49 propoſitione di queſto, ſi prouerà, che tutta la retta EG è Binomio. Dico che EG è quella retta, che ſi chiama quarto Binomio. Sia il quadrato di H la differenza frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG, e ſi proui, come ſi fece nella 49. propoſitione, che, per la conuerſione della proportione, AB à BC è come il quadrato di EF al quadrato di H: mà, per coſtruttione, AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di EF al quadrato di H è come numero quadrato à numero quadrato: dal
a 9. del 10. che [a] le rette EF, ed H, ſono incommenſurabili in lunghezza. Hor perche il quadrato del maggior nome EF ſupera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, incommenſurabile in lunghezza al maggior nome EF; ed il maggior nome EF è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per la

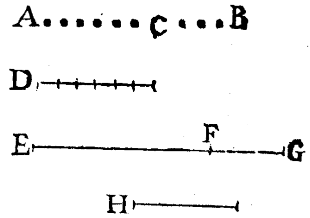


quarta delle antecedenti definitioni, la retta EG ſarà quella, che ſi chiama quarto Binomio, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

PROBLEMA XVII. PROPOSITIONE LIII.

Ritrouare il quinto Binomio.

Si trouino i numeri AC, CB, come ſi diſſe nell'antecedente propoſitione, e del rimanente ſi faccia quanto ſi diſſe nella 50. propoſitione, ponendo FG commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; e come iui ſi fece, ſi dimoſtri la retta EG eſſere Binomio. Dico che EG è quella linea, che ſi chiama quinto Binomio. Si dimoſtri ſimilmente, come ſi fece nella 50. propoſitione, che il quadrato di EF è maggiore del quadrato di FG; ſia il quadrato di H la differenza di quanto il quadrato di EF ſupera il quadrato di FG; e procedendoſi, come nella 49. propoſitione, ſi proui, per la conuerſione della proportione, AB à BC eſſere come il quadrato di EF al quadrato di H.

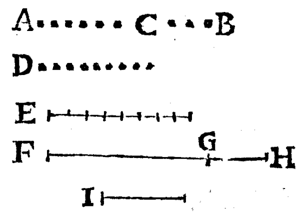


E perche AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di EF al quadrato di H è come numero quadrato à numero quadrato; dal che le rette EF, ed H, [a] ſono incommenſurabili in a 9. del 10.
lunghezza: per la qual coſa il quadrato del maggior EF ſupera il quadrato del minor nome FG, per il quadrato della retta H, incommenſurabile in lunghezza al maggior nome EF; ed il minor nome EF è commenſurabile il lunghezza alla Rationale D, e per la quinta delle antecedenti definitioni, ſarà EG il quinto Binomio, che ſi cerca, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

PROBLEMA XVIII. PROPOSITIONE LIV.

Ritrouare il ſeſto Binomio.

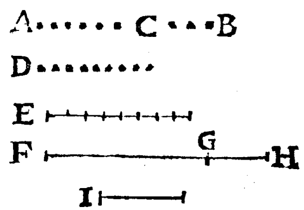
Si trouino due numeri, come AC, CB, che non ſiano piani ſimili, e niſſuno ſia numero quadrato; ed il loro compoſto, cioè AB, non ſia numero quadrato, ne ſia à ciaſcuno di loro, come numero quadrato à numero quadrato, cioè che AB à BC, ne meno AB ad AC, ſia come numero quadrato à numero quadrato; il che ſi farà per il Corollario 2. all'vltima propoſitione del 9. Si prenda poi qualunque numero quadrato, per eſſempio D, il quale non hauerà ad AC, ne meno ad AB, la proportione,



che hà il numero quadrato al numero quadrato: ciò fatto, si esponga qualunque Rationale E, e si faccia si come il numero D al numero AB, [a] così il quadrato di E al quadrato di FG. Il rimanente si faccia come nella propositione 51, e si dimostri, come iui si fece, che le rette E, ed FG sono incommensurabili in lunghezza; e che tutta la retta FH è Binomio. Dico che FH è quella, che si chiama sesto Binomio. Si dimostri similmente, come si fece nella 51. propositione, che le rette E, & GH sono incommensurabili in lunghezza; e che il quadrato di FG è maggiore del quadrato di GH: sia dunque la differenza di quanto il quadrato di FG supera il quadrato di GH, il quadrato di I. Perche AB ad AC è come il quadrato di FG al quadrato di GH, per la conuersione della proportione, sarà AB à BC, come il quadrato di FG al quadrato di I: ma AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di FG al quadrato di I è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa le rette FG, ed I, [b] sono incommensurabili in lunghezza. E perche il maggior nome FG supera il minor nome GH, per il quadrato della retta I, incommensurabile in lunghezza al maggior nome FG; e nissuno de i nomi FG, GH, è commensurabile in lunghezza alla Rationale E, per la 6. definitione, la retta FG sarà quella, che si chiama sesto Binomio, come fù proposto fare, e dimostrare.

a Coroll. alla 6. del 10.

b 9. del 10.



THEOREMA XXXVII. PROPOSITIONE LV.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal primo Binomio, è Irrationale; ed è quella, che chiamiamo Binomio.

Sia esposto il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal primo Binomio AD. Dico che la retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è Irrationale, ed è quella, che chiamiamo Binomio. S'intenda diuiso il primo Binomio AD ne i suoi nomi, e sia il maggior nome AE; per la prima delle antecedenti definitioni, le rette AE, ED sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad AE: ed oltre à ciò la retta AE sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED [a] in due parti vguali in F, sarà il quadrato di EF [b] la quarta parte del quadrato di ED. Perche il quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad AE; se alla retta AE, per il primo, ò secondo Lemma, dopo la 17. propositione di questo, si applichi il rettangolo GX, vguale al quadrato di EF, cioè

a 10. del 1.

b Scol. alla 4. del 2.

vguale al quadrato EV, ch'è la quarta parte del quadrato di ED, in modo, che manchi à compire la retta AE d'vna figura quadrata; per la 18. propos. di questo, la retta AE sarà diuisa in qualche punto G, e le parti AG, GE, saranno frà di loro commensurabili in lunghezza, e per il Lemma 2. dopo la 17. propos. il rettangolo, contenuto dalle parti AG, GE, sarà vguale al quadrato di EF. Per li punti G, E, F, [c] si tirino le rette GH, EI, FK, parallele ad AB, ouero CD: poi si faccia il quadrato LM [d] vguale al rettangolo AH, e si faccia il quadrato MN vguale al rettangolo GI, e si dispongano questi due quadrati in modo, che i lati OM, MP, facciano vna sola retta linea, come OP. Perche gli angoli OMQ, RMP sono retti, vgualmente s'aggiunga l'angolo QMP, i due angoli OMQ, QMP, saranno vguali à i due angoli QMP, PMR: ma gli angoli OMQ, QMP, [e] sono vguali à due angoli retti; saranno i due angoli QMP, PMR, vguali à due angoli retti; e perciò le rette QM, MR, [f] costituiscono vna sola retta linea. Si prolunghino le rette NP, NR, fino che concorrano con le rette LO, LQ, continuate come in T, ed S. In oltre, perche OM, come lato del quadrato, è vguale ad MQ, ed il lato RM è vguale ad MP; sarà tutta OP vguale ad RQ: ma OP è vguale ad SN, e la retta RQ è vguale ad NT; sarà SN vguale ad NT, per la qual cosa il rettangolo ST sarà quadrato.

c 31. del 1.

d 14. del 2.

e 13. del 1.

f 14. del 1.

Perche il rettangolo, contenuto dalle parti AG, GE, per costruttione, è vguale al quadrato di EF; sarà AG ad EF, [g] come EF ad EG: ma AG ad EF è come il rettangolo AH [h] al rettangolo EK; e la proportione di FE ad EG [K] è come il rettangolo EK al rettangolo GI; sarà il rettangolo AH al rettangolo EK, [l] come il medesimo rettangolo EK al rettangolo GI; per la qual cosa il rettangolo EK sarà Medio proportionale frà i due rettangoli AH, GI, cioè frà i due quadrati LM, MN: ma frà i due quadrati LM, MN, per il Theor. 5. nello Scolio dopo la prima del 6. libro, è Medio proportionale il rettangolo MT; sarà il rettangolo MT vguale al rettangolo EK; e perche il rettangolo MT [m] è vguale al rettangolo MS, ed il rettangolo EK [n] è vguale al rettangolo FC, sarà il rettangolo MS vguale al rettangolo FC. Hor essendo il rettangolo AH vguale al quadrato ML, il rettangolo GI vguale al quadrato RP, ed i rettangoli EK, FC, vguali à i rettangoli TM, MS, sarà tutto il quadrato ST vguale à tutto il rettangolo AC.

g 17. del 6.

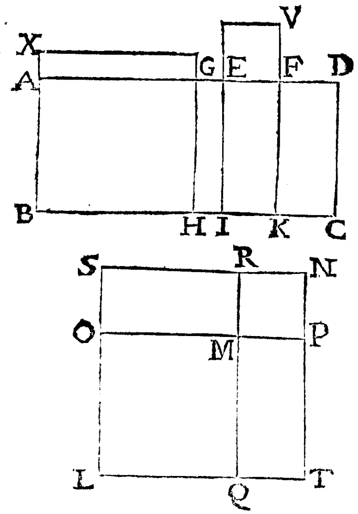
h 1. del 6.

K 1. del 6.

l 11. del 5.

m 43. del 1.

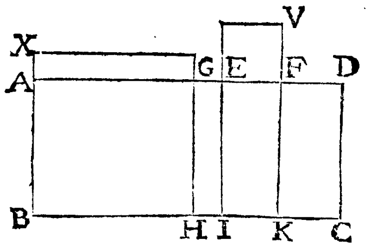
n 36. del 1.

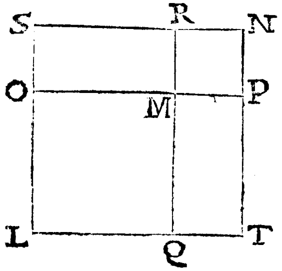


Essendosi dimostrato, che le due AG, GE sono commensurabili in lunghezza, sarà tutta AE [o] commensurabile in lunghezza tanto ad AG,

o 16. del 10.

quanto ad EG : ma nel primo Binomio AD il maggior nome AE è com-
p Scol. alla 12. del 10. mensurabile in lunghezza alla Rationale AB; saranno le due AG, GE, p
commensurabili in lunghezza alla medesima Rationale AB : per la qual
q 6. defin. del 10. cosa le due AG, GE, q sono Rationali, ed i rettangoli AH, GI, contenu-
ti dalle Rationali GA, AB, & EG,
GH, per la 20. propositione di que-
sto, sono Rationali; dal che i qua-
drati LM, MN, che gli sono vgua-
li, sono ancora Rationali, e perciò
i loro lati OM, MP sono Rationali.
In oltre, perche le due AE, AG so-
no commensurabili in lunghezza, e
la retta AE è incommensurabile
r 14. del 10. in lunghezza ad ED; sarà AG r in-
commensurabile in lunghezza ad
ED : ma la retta ED è commensu-
rabile in lunghezza alla sua metà
t 14. del 11. EF; sarà AG t incommensurabile in
lunghezza ad EF. Finalmente, per-
che il rettangolo AH al rettangolo
u 1. del 6. EK, u è come la base AG alla ba-
se EF; essendo le due AG, EF, in-
commensurabili in lunghezza, sa-
x 10. del 10. rà il rettangolo AH x incommensu-
rabile al rettangolo EK : ma AH è
vguale al quadrato LM, ed il rettangolo EK è vguale ad MT, i rettango-
li LM, MT, saranno frà di loro incommensurabili. E perche LM ad
y 1. del 6. MT y è come OM ad MP, le due OM, MP, z saranno incommensurabili
z 10. del 10. in lunghezza; furono dimostrate le due OM, MP, Rationali; in conseguen-
za le due OM, MP, saranno commensurabili solamente in potenza. Per la
a 37. del 10. qual cosa tutta la retta OP, ouero SN, a sarà Irrationale, e sarà quella ret-
ta, che chiamiamo Binomio. E perche il quadrato di SN, cioè ST; è
vguale al rettangolo AC; la retta dunque SN, il di cui quadrato è vgua-
le al rettangolo AC, contenuto dal primo Binomio AD, e dalla Ratio-
nale AB, è Irrationale, ed è quella, che si chiama Binomio, come fù pro-
posto dimostrare.





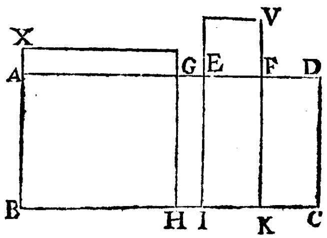
THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIONE LVI.

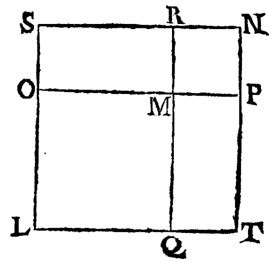
La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettango-
lo, contenuto dalla Rationale, e dal secondo Binomio,
è Irrationale; ed è quella, che si chiama prima Bime-
diale.

Sia il rettangolo AC contenuto dalla Rationale AB, e dal secondo
Binomio AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettan-

golo AC, è Irrationale; ed è quella, che si chiama prima Bimediale. S'in-
tenda diuiso il secondo Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, e sia AE il
maggior nome, e per la seconda delle antecedenti definitioni, le rette
AE, ED sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, ed il
quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta,
commensurabile in lunghezza al maggior nome AE; ed, oltre à ciò, il
maggior nome AE è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB.
Si diuida ED a in due parti vguali in F, ed il rimanente si costruisca, co- a 10. del 1.
me nell'antecedente propositione, e si dimostri, come iui si fece, che la
retta OP, ouero SN, è quella, il di cui quadrato LN è vguale al rettan-
golo AC. Dico che OP, ouero SN, è irrationale, ed è quella, che si
chiama prima Bimediale.

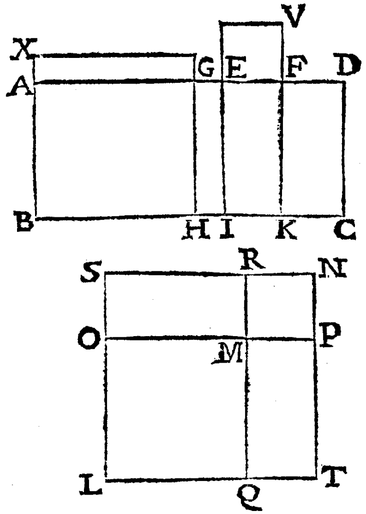
Perche il maggior nome AE è
incommensurabile in lunghezza ad
ED, ed il minor nome ED è com-
mensurabile in lunghezza alla Ra-
tionale AB; sarà AE b incommen- b 13. del 10.
surabile in lunghezza alla Rationa-
le AB. Si dimostri, come si fece
nell'antecedente propositione, che
le due AG, GE sono commensura-
bili in lunghezza; dal che tutta A
E c sarà cõmensurabile in lunghez-
za tanto ad AG, quanto à GE. c 16. del 10.
E perche il maggior nome AE è la
Rationale del secondo Binomio A
D, le due AG, GE, d che le sono d 6. defin. del 10.
commensurabili, saranno Ratio-
nali. Hor essendo le due AG,
GE, commensurabili in lunghez-
za ad AE, e la retta AE, per ipote-
si, è incommensurabile in lunghez-
za alla Rationale AB; le due AG, GE e saranno incommensurabili in e 14. del 10.
lunghezza alla medesima Rationale AB; per la qual cosa, tanto le due
AB, AG, quanto le due AB, GE sono Rationali, e commensurabili so-
lamente in potenza, e perciò i rettangoli AH, GI f sono Medij : Mà il f 22. del 10.
quadrato LM è vguale al rettangolo AH, ed il quadrato MN è vguale al
rettangolo GI; saranno i quadrati LM, MN Medij, ed i loro lati OM,
MP g sono Medie. g 22. del 10.





Di nuouo, perche il rettangolo AH al rettangolo GI h è come la base h 1. del 6.
AG alla base GE, e le basi AG, GE sono commensurabili in lunghezza,
saranno i rettangoli AH, GI K frà di loro commensurabili, ed i quadrati K 10. del 10.
LM, MN, che gli sono vguali, saranno ancora frà di loro commensura-
bili; per la qual cosa i loro lati OM, MP sono commensurabili, al meno
in potenza. In oltre, essendo AE commensurabile in lunghezza ad AG,
e la medesima AE è incommensurabile in lunghezza al minor nome ED,
sarà AG l incommensurabile in lunghezza ad ED : mà ED è commensu- l 14. del 10.

m 14.del 10. rabile in lunghezza alla sua metà EF, sarà AG [m] incommensurabile ad
n 1.del 6. EF. E perche il rettangolo AH al rettangolo EK [n] è come le base AG
alla base EF, essendo AG incommesurabile in lunghezza ad EF, sarà il
o 10.del 10. rettangolo AH [o] incommensurabile
al rettangolo EK: mà EK, per quel,
che si disse nell'antecedente propo-
sitione, è vguale ad MT, & AH è
vguale ad LM; sarà LM incommen-
surabile ad MT; e perche la pro-
p 1.del 6. portione di LM ad MT è come [p] O
q 10.del 10. M ad MP, in conseguenza OM [q] sa-
rà incommensurabile in lunghezza
ad MP; furono dimostrate le due
OM, MP, Medie, frà di loro com-
mensurabili in potenza; saranno
dunque le due OM, MP, Medie
commensurabili solamente in po-
tenza. Finalmente; essendo ED il
minor nome del secondo Binomio
AD, sarà ED per la seconda delle
antecedenti definitioni, commen-
surabile in lunghezza alla Rationa-
le AB, ouero EI, che gli è vguale:



r 12.del 10. mà ED è commensurabile in lunghezza alla sua metà EF, sarà EF [r] com-
mensurabile in lunghezza alla retta EI. E perche la retta EI è Rationale
t 6. defin. del 10. (stante che è vguale alla Rationale AB) perciò EF [t] sarà Rationale; ed
il rettangolo EK, contenuto da due Rationali, sarà [u] Rationale: fù di-
u 20.del 10. mostrato il rettangolo MT vguale al rettangolo EK, in conseguenza il
rettangolo MT sarà Rationale. Di più, essendo OM vguale ad MQ, il
rettangolo contenuto dalle due QM, MP sarà vguale al rettangolo con-
tenuto dalle due OM, MP: mà il rettangolo contenuto dalle due QM,
MP, cioè il rettangolo MT, è Rationale; sarà il rettangolo, contenuto
dalle due OM, MP Rationale. Per la qual cosa le Medie OM, MP, com-
mensurabili solamente in potenza, contengono vn rettangolo Rationa-
le, e per la 38. di questo, tutta la retta OP, ouero SN, è irrationale, ed
è quella, che si chiama prima Bimediale; come fù proposto dimostrare.

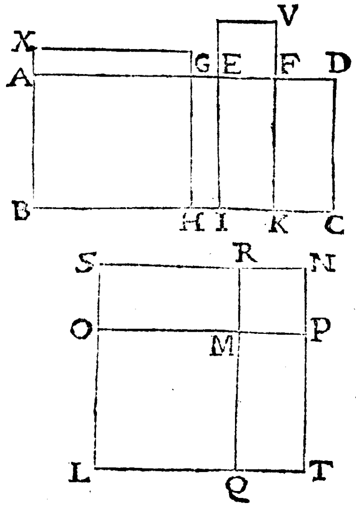
THEOREMA XXXIX. PROPOSITIONE LVII.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal terzo Binomio, è irrationale; ed è quella, che si chiama seconda Bimediale.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal terzo Binomio AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che si chiama seconda Bimediale. S'intenda diuiso il terzo Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, e sia AE

il

il maggior nome, per la terza delle antecedenti definitioni, le due AE, ED saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato del maggior nome AE sarà maggiore del quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabili in lunghezza al maggior nome AE; ed, oltre à ciò, nissuna delle due AE, ED sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED in due parti vguali in F, e tutto il rimanente della costruttione si faccia come nella 55. propositione di questo, e si dimostri come iui si fece, che il quadrato di OP, ouero SN, è vguale al rettangolo AC; e, procedendosi come nell'antecedente propositione, si dimostrerà, che le rette OM, MP sono Medie, commensurabili solamente in potenza. In oltre, perche ED è commensurabile in lunghezza alla sua metà EF, e, per ipotesi, la medesima ED è incommensurabile in lunghezza alla Ra-



tionale AB, ouero EI, sarà EF [a] incommensurabile in lunghezza ad AB, a 14. del 10.
ouero EI: mà EF, per essere commensurabile alla Rationale ED, è Ra-
tionale; le due dunque EF, EI saranno Rationali, e perciò so-
no commensurabili solamente in potenza; ed il rettangolo EK, con-
tenuto dalle medesime EF, EI [b] sarà Medio, e perciò MT, ch'è vguale b 22. del 10.
ad EK, sarà ancora Medio. E perche il rettangolo MT è contenuto dalle Medie OM, MP (per essere OM vguale ad MQ) il rettangolo dunque contenuto dalle medie OM, MP sarà Medio. Hor, essendo le due OM, MP Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Medio, sarà tutta OP, per la 39. di questo, irrationale; e sarà quella, che si chiama seconda Bimediale, ch'era da dimostrarsi.

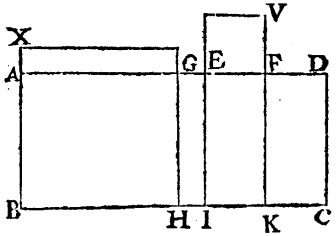
THEOREMA XL. PROPOSITIONE LVIII.

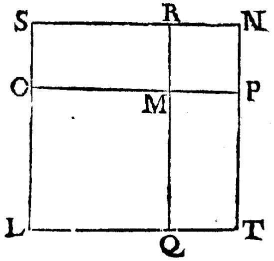
La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dal quarto Binomio, è Irrationale; ed è quella, che si chiama Maggiore.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal quarto Binomio AD. Dico che quella retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che si chiama Maggiore. Sia diuiso il quarto Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, de'quali AE sia il mag-

 giore,

giore, e per la quarta delle antecedenti definitioni, le due AE, ED, ſaranno Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, ed il quadrato del maggior nome AE ſarà maggiore del quadrato del minor nome ED, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza ad eſſo maggior nome AE; ed oltre à ciò, il maggior nome AE ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED in due parti vguali in F, e ſi faccia tutto il reſtante della coſtruttione, come nella 55. propoſitione di queſto, e per la 19. di queſto, ſaranno le due AG, GE, incommenſurabili in lunghezza. Si dimoſtri, come nella citata 55. propoſitione ſi fece, che il quadrato di OP, ouero SN, è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta OP è irrationale, ed è quella, che ſi chiama Maggiore.





a 1. del 6. Perche il rettangolo AH al rettangolo GI [a] è come AG à GE, eſſendo AG incommenſurabile in lunghezza ad EG,
b 10. del 10. ſarà AH [b] incommenſurabile à GI, e perciò i due quadrati LM, MN, che ſono vguali à i rettangoli AH, GI, ſono ancora incommenſurabili; dal che i loro lati OM, MP ſono incommenſurabili in potenza. E perche il maggior nome AE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; ſarà
c 6. defin. del 10. dunque AE [c] Rationale, ed il rettangolo AI, contenuto dalle Rationali
d 20. del 10. AE, AB, [d] ſarà ancora Rationale: ma il rettangolo AI è vguale all'aggregato de i quadrati LM, MN; ſarà l'aggregato de i quadrati delle rette OM, MP, Rationale.

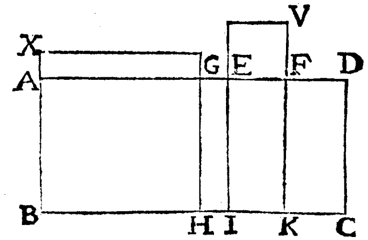
In oltre, perche AD, per ipoteſi, è quarto Binomio, il minor nome ED ſarà incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB: ma ED è
e 14. del 10. commenſurabile in lunghezza alla ſua metà EF; ſarà EF [e] incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB. E perche EF, per eſſere com-
f 6. defin. del 10. menſurabile alla Rationale ED, [f] è Rationale, ſarà EF commenſurabile ſolamente in potenza alla Rationale AB, ouero EI: per la qual coſa il
g 22. del 10. rettangolo EK [g] è Medio; fù dimoſtrato, nella 55. propoſitione, il rettangolo MT vguale ad EK, in conſeguenza MT; ch'è contenuto dalle due OM, MP, è medio. Le due dunque OM, MP, ſono incommenſurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati è Rationale; ed il rettangolo, contenuto da eſſe, è Medio; e per la 40. propoſitione di queſto, tutta la retta OP è Irrationale, ed è quella, che ſi chiama Maggiore, il che era da dimoſtrarſi.

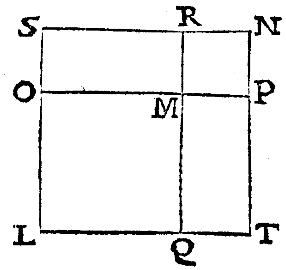
THEO-

THEOREMA XLI. PROPOSITIONE LIX.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal quinto Binomio, è Irrationale; ed è quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal quinto Binomio AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio. S'intenda diuiſo il quinto Binomio AD ne i ſuoi nomi AE, ED, de'quali AE ſia il maggiore, e per la 5. delle antecedenti definitioni, le rette AE, ED ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza, ed il quadrato del maggior nome AE ſupera il quadrato del minor nome ED, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza ad AE; ed, oltre à ciò, il minor nome ED è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED in due parti vguali in F, ed il reſtante della coſtruttione ſi faccia come nella 55. propoſitione di queſto; per la 19. di queſto, ſaranno le due AE, GE incommenſurabili in lunghezza. Si dimoſtri, come nella citata 55. propoſitione ſi fece, che il quadrato di OP è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta OP è irrationale, ed è quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che le rette OM, MP ſono incommenſurabili in potenza; e perche il maggior nome AE è incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, e la medeſima AE è Rationale, per eſſere vno de i nomi del quinto Binomio AD; perciò le due AE, AB ſono commenſurabili ſolamente in potenza, ed il rettangolo AI, contenuto dalle due AE, AB, [a]





commenſurabili ſolamente in potenza, è Medio. Ma il rettangolo AI, a 22. del 10.
per coſtruttione, è vguale all'aggregato de i quadrati LM, MN; ſarà l'aggregato de i quadrati delle due OM, MP, Medio. In oltre, perche ED è il minor nome del quinto Binomio, perciò è commenſurabile alla Rationale AB, ed in conſeguenza è Rationale; ſarà la ſua metà EF, [b] che
gli è commenſurabile, Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla b 6. defin. del 10.
Rationale AB: per la qual coſa il rettangolo EK, ch'è contenuto dalle

Ratio-

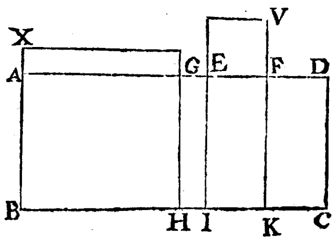
Rationali EF, EI, [c] commensurabili in lunghezza, sarà Rationale. Ma EK è vguale al rettangolo MT, contenuto dalle due OM, MP; sarà il rettangolo contenuto dalle due OM, MP, Rationale. Saranno dunque le rette OM, MP, incommensurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati LM, NN, è Medio; ed il rettangolo, contenuto da esse, è Rationale; e per la 41. propositione di questo, tutta la retta OP, ouero SN, è irrationale, ed è quella, che si chiama Potente per il Rationale, e Medio, ch'era da dimostrarsi. c 10.del 10.

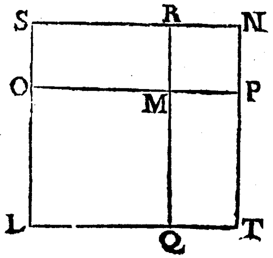
THEOREMA XLII. PROPOSITIONE LX.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dal sesto Binomio, è Irrationale; ed è quella, che si chiama potente di due Medij.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dal sesto Binomio AD. Dico che quella retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è irrationale, ed è quella, che si chiama Potente di due Medij. S'intenda diuiso il sesto Binomio AD ne i suoi nomi AE, ED, e sia AE il maggior nome, per la sesta delle antecedenti definitioni, le due AE, ED, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato del maggior nome AE supera il quadrato del minor nome ED, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza al maggior nome AE; ed, oltre à ciò, niuna delle due AE, ED, è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB. Si diuida ED [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente della costruttione si faccia come nella 55. propositione di questo, e per la 19. propositione di questo, le due AG, GE sono incommensurabili in lunghezza. Si dimostri poi, come nella citata 55. propositione, che il quadrato di OP è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta OP è irrationale, ed è quella, che si chiama potente per due Medij. Si dimostri, come si fece nella 58. propositione, che le rette OM, MP sono incommensurabili in potenza; e si dimostri, come nell'antecedente propositione, che l'aggregato de i quadrati LM, MN, è Medio: similmente si dimostri, come nella 58. propositione, che il rettangolo MT, contenuto dalle due OM, MP, è Medio: Finalmente perche ED è commensurabile in lunghezza alla sua metà EF,

a 10.del 1.





e la medesima ED è incommensurabile in lunghezza ad AE; sarà EF [b] incommensurabile in lunghezza ad AE. E perche il rettangolo AI al rettangolo EK [c] è come AE ad EF, essendo le due AE, EF, incommensurabili in lunghezza, sarà AI [d] incommensurabile ad EK; ma il rettangolo AI è vguale all'aggregato de i quadrati LM, MN, ed il rettangolo EK è vguale al rettangolo MT; sarà l'aggregato de i quadrati di OM, MP, incommensurabile al rettangolo MT, ch'è contenuto dalle medesime OM, MP. Le rette dunque OM, MP sono commensurabili solamente in potenza; l'aggregato de i loro quadrati LM, MN, è Medio; ed il rettangolo MT, contenuto dalle medesime rette OM, MP, è Medio, incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati LM, MN; e per la 42. propositione di questo, la retta OP è irrationale, ed è quella, che si chiama potente per due Medij, come fù proposto dimostrare.

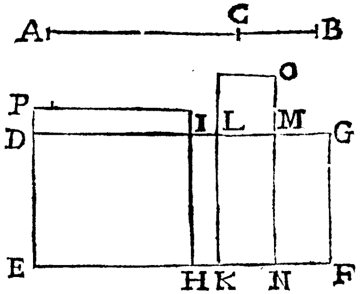
b 13.del 10. c 1.del 6. d 10.del 10.

THEOREMA XLIII. PROPOSITIONE LXI.

Applicando il quadrato del Binomio alla Rationale, l'altro lato, che ne risulta, è primo Binomio.

Sia il Binomio AB, diuiso ne i suoi nomi AC, CB, e sia AC il maggior nome: sia esposta la rationale DE, alla quale sia applicato il rettangolo DF, [a] vguale al quadrato del Binomio AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama primo Binomio. Si applichi di nuouo alla Rationale DE [b] il rettangolo DH, vguale al quadrato del maggior nome AC; & alla retta HI si applichi il rettangolo IK, vguale al quadrato del minor nome CB: e perche il quadrato di AB [c] è vguale à i quadrati delle due AC, CB, col doppio rettangolo delle medesime AC, CB, essendo DK vguale à i quadrati delle due AC, CB, sarà il rimanente LF vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB. Si diuida LG [d] in due parti vguali in M, dal punto M [e] si tiri la retta MN, parallela ad ED, ouero GF; i due rettangoli LN, MF, [f] saranno frà di loro vguali, ed ogn'vno sarà vguale al rettangolo, contenuto dalle due AC, CB. Perche AB, per ipotesi, è binomio, le parti AC, CB, [g] saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza: per il che i quadrati di AC, CB, sono Rationali, e frà loro commensurabili; e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [h] sarà commensurabile, tanto al quadrato di AC, quanto al quadrato di CB: ma i quadrati di AC, & CB, sono Rationali, sarà il loro composto, cioè l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [K] Rationale: ma l'aggregato de i detti quadrati è vguale al rettangolo DK; sarà il rettangolo DK Rationale; il quale, applicato alla Rationale DE, [l] produce

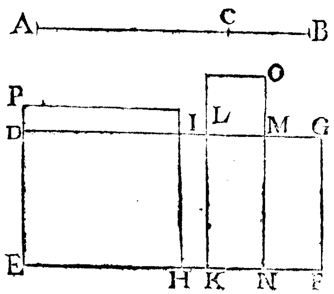
a 45. del 1. b 45. del 1. c 4. del 2. d 10.del 1. e 31. del 1. f 36.del 1. g 37. del 10 h 16.del 10. K 9. defin. del 10. l 21. del 10.



l'altro lato DL Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche le due AC, CB, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, sarà il rettangolo, contenuto da AC, CB, m Medio; ma questo è commensurabile al suo doppio, il doppio rettangolo dunque, contenuto dalle due AC, CB, cioè il rettangolo LF, n sarà Medio; e perciò, applicato il Medio LF alla Rationale DE, ouero LK, fà l'altro lato LG o Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE: fù dimostrata DL commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, le due DL, LG, p saranno incommensurabili in lunghezza; ed haueremo le due DL, LG, Rationali, commensurabili solamente in potenza, e per la 37. di questo, tutta la retta DG sarà Binomio. Dico che DG è primo Binomio.

m 22. del 10
n Corol. alla 24. del 10.
o 23. del 10.
p 13. del 10.

Perche il rettangolo, contenuto dalle parti AC, CB, per l'vltimo Coroll. alla 1. del sesto, è Medio proportionale frà i quadrati delle due AC, CB; ed i quadrati delle medesime AC, CB, sono vguali, per costruttione, à i rettangoli DH, IK; sarà il rettangolo delle due AC, CB, cioè il rettangolo LN, medio proportionale frà i due rettangoli DH, IK; dal che i rettangoli DH, LN, IK sono continui proportionali: Ma i rettangoli DH, LN, IK q sono come le basi DI, LM, IL; saranno le rette DI, LM, IL, continue proportionali; e la retta LM sarà media proportionale frà le due DI, IL: per la qual cosa il rettangolo, contenuto dalle due DI, IL, r è vguale al quadrato della media LM. In oltre, perche le rette AC, CB, sono commensurabili in potenza, il quadrato di AC sarà commensurabile al quadrato di CB; ed i rettangoli DH, IK, che sono vguali à quei quadrati, sono ancora frà di loro commensurabili: ma i rettangoli DH, IK t sono frà loro come le basi DI, IL; saranno le rette DI, IL, u commensurabili in lunghezza. Di nuouo, perche i quadrati delle due AC, CB, per il Lemma dopo la 39. propositione di questo, sono maggiori del doppio rettangolo, cõtenuto dalle medesime AC, CB, ed i quadrati delle due AC, CB, sono vguali al rettangolo DK, e similmente il doppio rettangolo delle due AC, CB, è vguale al rettangolo LF; in conseguenza il rettangolo DK sarà maggiore del rettangolo LF: Ma i rettangoli DK, LF, x sono come le basi DL, LG; sarà la base DL maggiore della base LG. Hor essendo DL maggiore di LG, ed il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, per quel, che si è dimostrato, è vguale al quadrato di LM, cioè è vguale alla quarta parte del quadrato della minore LG; sarà applicato alla maggiore LD il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, vguale al quadrato di LM, cioè alla quarta parte del quadrato di LG, e manca à compire la linea DL per vna figura quadrata, e la retta DL da tale applicatione è diuisa in I, nelle parti DI, IL, le quali, per quel, che si è dimostrato, sono commensura-



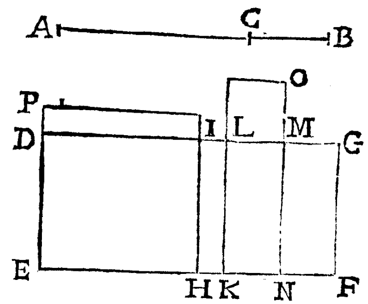
q 1. del 6.
r 17. del 6.
t 1. del 6.
u 10. del 10.
x 1. del 6.

bili in lunghezza; per la 18. di questo, il quadrato della maggiore DL supera il quadrato della minore LG, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla maggiore DL: e perche la maggiore DL, per quel, che si è dimostrato nella prima parte, è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la prima delle antecedenti definitioni, la retta DG sarà primo Binomio, comè fù proposto dimostrare.

THEOREMA XLIV. PROPOSITIONE LXII.

Applicando il quadrato della prima bimediale alla Rationale, il lato, che ne risulta, è secondo Binomio.

Sia la prima Bimediale AB, diuisa ne i suoi nomi, ed il maggior nome sia AC; si applichi alla Rationale DE a il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che DG è secondo binomio. Si prosegu isca la costruttione dell'antecedente propositione, in modo, che i due rettangoli DH, IK siano vguali à i quadrati delle rette AC, CB, ed ogn'vno de i rettangoli LN, MF, vguale al rettangolo, contenuto dalle due AC, CB. Perche le due AC, CB, sono i nomi della prima bimediale AB, per la 38. di questo, le rette AC, CB, sono Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Medio; saranno i quadrati delle due AC, CB, cioè i rettangoli DH, IK, che gli sono vguali, frà loro commensurabili, e Medij; e tutto il rettangolo DK sarà commensurabile à ciascuno de i Medij DH, IK, e per il Corollario alla 24. propositione di questo, sarà DK Medio; il quale, essendo applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL, b sarà Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche il rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, per ipotesi, è Rationale, il suo doppio, che gli è commensurabile, cioè il rettangolo LF, c sarà Rationale; il quale, essendo applicato alla Rationale DE, cioè ad LK, che gli è vguale, ne risulta il lato LG d Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE. Hor perche DL è incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE, e la retta LG è commensurabile in lunghezza alla medesima DE, sarà DL e incommensurabile in lunghezza ad LG: ma le due DL, LG sono state dimostrate Rationali, saranno dunque le due DL, LG Rationali, e commensurabili solamente in potenza: per la qual cosa tutta la retta DG f sarà quella, che chiamiamo Binomio. Dico che la retta DG è secondo Binomio. Si dimostri, come si fece nella seconda parte dell'antecedente propositione, che DL è il maggior nome, il di cui quadrato è maggiore del quadrato del minor nome LG, per il quadrato di



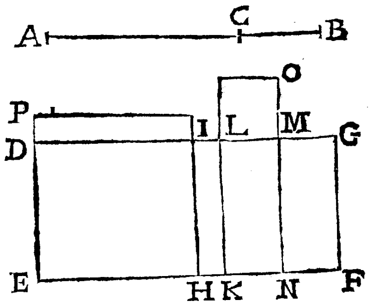
a 45. del 1.
b 23. del 10.
c 9. defin. del 10.
d 21. del 10.
e 13. del 10.
f 37. del 10.

vna retta, commensurabile in lunghezza al maggior nome DL. Hor se il quadrato del maggior nome DL supera il quadrato del minor nome LG, per il quadrato d'vna retta, cõmensurabile in lunghezza al maggior nome DL, e si è dimostrato, che il minor nome LG è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la seconda delle antecedenti definitioni, sarà la retta DG quella, che si chiama secondo Binomio; il che era da dimostrarsi.

THEOREMA XLV. PROPOSITIONE LXIII.

Applicando il quadrato della seconda Bimediale alla Rationale, il lato, che ne risulta, è terzo Binomio.

Sia la seconda Bimediale AB, il di cui maggior nome AC, ed il minore CB; ed alla Rationale DE [a] sia applicato il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama terzo Binomio. Sia fatta tutta la costruttione, come nella 61. propos. Perche i nomi AC, CB, [b] che compongono la seconda Bimediale, sono Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono vn rettangolo Medio, saranno i quadrati delle rette AC, CB, cioè i rettangoli DH, IK, che gli sono vguali, commensurabili, e Medij; e tutto il rettangolo DK [c] sarà commensurabile al medio DH, ed ancora al medio IK: per la qual cosa il rettangolo DK [d] sarà Medio, il quale, essendo applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL [e] sarà Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, per ipotesi, è Medio, il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, [f] che gli è commensurabile, sarà Medio: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, è vguale al rettangolo LF; sarà il rettangolo LF Medio; il quale, applicato alla Rationale LK, cioè DE, sà il lato LG [g] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE. Prese AC, CB, come basi di due rettangoli, e sia AC altezza commune, sarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle parti AC, CB, [h] come AC à CB: ma AC è incommensurabile in lunghezza à CB, sarà il quadrato di AC [K] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. Similmente perche i quadrati delle due AC, CB sono commensurabili, il loro aggregato [l] sarà commensurabile al quadrato di AC: ma il quadrato di AC è incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB, sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [m] incommensurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, è commensurabile al suo doppio, sarà l'aggregato de i qua-



a 45. del 1.
b 39. del 10.
c 16. del 10.
d Coroll. al la 24. del 10.
e 23. del 10.
f Coroll. alla 24. del 10.
g 23. del 10.
h 1. del 6.
K 10. del 10.
l 16. del 10.
m 13. del 10

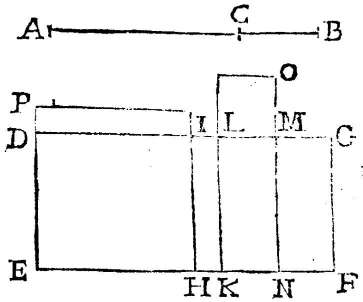
quadrati delle rette AC, CB, [n] incommensurabile al doppio rettangolo delle medesime AC, CB; fù fatto, per costruttione, il rettangolo DK vguale all'aggregato de i quadrati di AC, CB, ed il rettãgolo LF è vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB; sarà il rettangolo DK incommensurabile al rettangolo LF; mà i rettangoli DK, LF [o] sono come le basi DL, LG; le rette dunque DL, LG [p] saranno incommensurabili in lunghezza; le quali essendo state dimostrate Rationali, saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e per la 37. propositione di questo, tutta la retta DG sarà quella, che si chiama Binomio. Dico che è il terzo Binomio. Si dimostri, come si fece nella propositione 61. di questo, che DL è il maggior nome, il di cui quadtato è maggiore del quadrato di LG, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad esso maggior nome DL. Hor se il quadrato del maggior nome DL supera il quadrato del minore LG, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza al maggior nome DL, e nissuna di loro, per quel, che si è dimostrato, è commensurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la terza delle antecedenti definitioni, la retta DG sarà quella, che si chiama terzo Binomio, come fù proposto dimostrare.

n 13. del 10.
o 1. del 16.
p 10. del 10.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIONE LXIV.

Applicando il quadrato della Maggiore alla Rationale, il lato, che ne risulta, è quarto Binomio.

Sia quella retta, che si chiama Maggiore, AB, il di cui maggior nome sia AC, ed alla Rationale DE [a] sia applicato il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama quarto Binomio. Sia fatta la medesima costruttione della propositione 61. di questo. Perche i nomi AC, CB, compongono la maggiore AB, per la 45. di questo, le rette AC, CB sono incommensurabili in potenza; e l'aggregato de i quadrati delle medesime AC, CB, è Rationale; ed il rettangolo delle due AC, CB, è Medio: ma il rettangolo DK, per costruttione, è vguale à i quadrati delle due AC, CB; sarà il rettangolo DK Rationale. E perche il rettangolo LN è vguale al rettangolo delle due AC, CB, sarà il rettangolo LN medio, & il doppio LF, ch'è commensurabile ad LN, [b] sarà ancora Medio. Hor essendo applicato il Rationale DK alla Rationale DE, l'altro lato DL [c] sarà Rationale, e sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale DE. Similmente, essendo il Medio LF applicato alla Rationale LK, ouero DE, l'altro lato LG [d] sarà Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale LK,



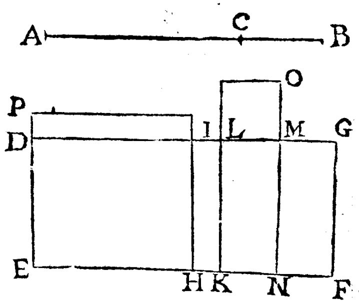
a 45. del 1.
b Corol. al la 24. del 10.
c 21. del 10.
d 23. del 10.

ouero DE. Et essendo DL commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, e la retta LG è incommensurabile in lunghezza alla medesima DE, le due DL, LG [e] saranno incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali, in conseguenza sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e perciò tutta la retta DG [f] sarà Binomio. Dico che è il quarto Binomio. Si dimostri, come si fece nella 61. propos. di questo, che DL è maggiore di LG; e che il rettangolo contenuto dalle parti DI, IL, è vguale al quadrato di LM, cioè alla quarta parte del quadrato di LG. Si considerino i nomi AC, CB, i quali sono incommensurabili in potenza, e perciò i loro quadrati sono incommensurabili frà di loro; ed i rettangoli DH, IK, che sono vguali à quei quadrati, saranno frà di loro incommensurabili: ma i rettangoli DH, IK, [g] sono come le basi DI, IL, saranno le rette DI, IL, [h] incommensurabili in lunghezza. Hor essendo il rettangolo delle due DI, IL, vguale al quadrato di LM, sarà applicato ad LD il rettangolo delle due DI, IL, vguale alla quarta parte del quadrato di LG, e manca à compire la retta DL, per vna figura quadrata, risultandone per tale applicatione le parti DI, IL, per quel, che si è dimostrato, incommensurabili in lunghezza, e per la 19. di questo, il quadrato di DL supera il quadrato di LG, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza al maggior nome DL. E perche il maggior nome DL è stato dimostrato commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la 4. delle antecedenti definitioni, tutta la retta DG sarà quella, che si chiama quarto Binomio, come fù proposto dimostrare.

e 13. del 10.
f 37. del 10.
g 1. del 6.
h 10. del 10.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIONE LXV.

Applicando il quadrato della potente d'vn Rationale, e Medio, alla Rationale, il lato, che ne risulta, è il quinto Binomio.



Sia la retta potente d'vn Rationale, e Medio, la notata AB, ed il maggior nome sia AC, ed alla Rationale DE [a] sia applicato il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama quinto Binomio. Sia fatta la medesima costruttione della propos. 61. Perche AB è supposta la linea potente per il Rationale, e Medio, per la 41. di questo, le rette AC, CB sono incommensurabili in potenza; e l'aggregato de i quadrati delle rette AC, CB, è Medio; ed il rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB, è Rationale: ma, per costruttione, il rettangolo DK è vguale all'aggregato de i quadrati di AC, CB; sarà il

a 45. del 1.

rettan-

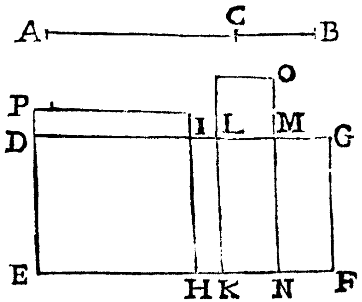
rettangolo DK Medio. E perche il rettangolo LN è vguale al rettangolo delle medesime AC, CB; sarà il rettangolo LN Rationale, il di cui doppio LF sarà Rationale. Hor essendo il medio DK applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL [b] sarà Rationale, e sarà incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE. Similmente, essendo il Rationale LF applicato alla Rationale LK, cioè DE, l'altro lato LG [c] sarà Rationale, commensurabile in lunghezza alla Rationale LK, ouero DE; e perche DL è incommensurabile in lunghezza alla Rationale DE, e la retta LG è commensurabile in lunghezza alla medesima DE; le due DL, IG [d] saranno incommensurabili in lunghezza: ma le habbiamo dimostrate Rationali, saranno dunque le due DL, LG Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 37. di questo, la retta DG è Binomio. Dico che è quinto Binomio. Si dimostri, come si fece nella 61. propositione, che il rettangolo, contenuto dalle due DI, IL, è vguale alla quarta parte del quadrato di LG; e si mostri, come si fece nell'antecedente propositione, che DL è il maggior nome, il di cui quadrato è maggiore del quadrato del minor nome LG, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile al maggior nome DL: e perche il minor nome LG è dimostrato commensurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la quinta delle antecedenti definitioni, la retta DG sarà quella, che si chiama quinto Binomio, come fù proposto dimostrare.

b 23. del 10.
c 21. del 10.
d 13. del 10.

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIONE LXVI.

Applicando alla Rationale la potente per due Medij, il lato, che ne risulta, è il sesto Binomio.

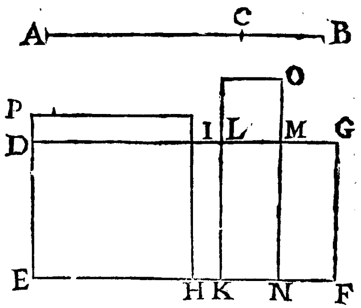
Sia AB la potente per due Medij, il di cui maggior nome sia AC; alla Rationale DE [a] si applichi il rettangolo DF vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che la retta DG è quella, che si chiama sesto Binomio. Sia fatta la costruttione della 61. propositione di questo. Perche AB è la potente per due Medij, per la 42. di questo, le rette AC, CB sono incommensurabili in potenza, e l'aggregato de i quadrati delle rette AC, CB, è Medio; ed il rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, è Medio, incommensurabile all'aggregato de i detti quadrati: e perche il rettangolo DK è vguale all'aggregato de i quadrati di AC, CB, sarà il rettangolo DK Medio. Similmente essendo il rettangolo LN vguale al rettangolo delle due AC, CB, sarà il rettangolo LN Medio, ed il suo doppio LF [b] sarà ancora Medio. Hor essendo i Medij DK, LF applicati alla Rationale DE, ouero LK, i lati DL, LG [c] saranno Rationali, e saranno in-



a 45. del 1.
b Coroll. alla 24. del 10
c 23. del 10

com-

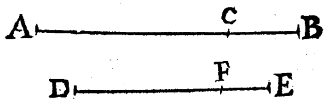
commensurabili alla Rationale DE, ouero LK. In oltre, perche l'aggre-
gato de i quadrati di AC, CB, per ipotesi, è incommensurabile al rettan-
golo delle medesime AC, CB, ed il rettangolo delle due AC, CB, è com-
mensurabile al suo doppio; sarà l'
aggregato de i quadrati di AC, CB,
d 13. del 10. cioè il rettangolo DK, [d] incommen-
surabile al doppio rettangolo delle
due AC, CB, cioè al rettangolo LF:
e 1. del 6. mà i rettangoli DK, LF [e] sono come
le basi DL, LG; le rette dunque DL,
f 10. del 10. LG [f] saranno incommensurabili in
lunghezza: furono le medesime rette
DL, LG mostrate Rationali, in con-
seguenza le rette DL, LG saranno
Rationali, e commensurabili sola-
mente in potenza; e, per la 37. di
questo, la retta DG sarà quella, che
si chiama Binomio. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione
che il maggior nome è DL, e che il quadrato di DL è maggiore del qua-
drato del minor nome LG, per il quadrato della retta incommensurabile
in lunghezza al maggior nome DL. E perche nissuna delle rette DL, LG,
per quel, che si è dimostrato, è commensurabile in lunghezza alla Ratio-
nale DE, per la sesta delle antecedenti definitioni, la retta DG è quella,
che si chiama sesto Binomio, il che era da dimostrarsi.



THEOREMA XLIX. PROPOSITIONE LXVII.

La retta linea, ch'è commensurabile in lunghezza al Binomio, ancor essa è Binomio del medesimo ordine.

Sia qualunque Binomio AB, diuiso ne i suoi nomi AC, CB, e sia AC
il maggior nome, ed il minore CB, e la retta DE sia commensurabile al
Binomio AB. Dico che DE è Binomio del medesimo ordine; cioè se AB
è primo Binomio, ancora D
E sarà primo; se AB è se-
condo Binomio, sarà anco-
ra DE secondo, &c. Si fac-
a 12. del 6. cia [a] si come tutta AB à tut-
ta DE, così la parte AC alla
b 19. del 5. parte DF; sarà l'auanzo CB [b] all'auanzo FE come tutta AB à tutta DE.
c Coroll. alla 4. del 5. Hor essendo AB à DE come AC à DF, inuertendo, DE ad AB [c] sarà co-
d 19. del 5. me DF ad AC, ed il restante FE al rimanente CB [d] sarà come tutta DE
à tutta AB; fù supposta DE commensurabile in lunghezza ad AB, sarà
e 10. del 10. DF [e] commensurabile in lunghezza ad AC, e sarà FE commensurabile
f 37. del 10. in lunghezza à CB: e perche i nomi AC, CB del Binomio AB, [f] sono
g 6. defin. del 10. Rationali, le rette ancora DF, FE, [g] che gli sono commensurabili, sono
Rationali. Di nuouo perche AC à DF è come AB à DE, ed è AB à DE



come CB ad FE, sarà [h] AC à DF come CB ad FE; e permutando, AC h 11. del 5.
à CB [K] sarà come DF ad FE: mà le due AC, CB sono commensurabili K 16. del 5.
solamente in potenza, le due DF, FE [l] saranno ancora commensurabili l 10. del 10.
solamente in potenza. Per la qual cosa le due DF, FE [m] sono Rationa- m 6. defin. del 10.
li, e commensurabili solamente in potenza, e per la 37. propositione di
questo, la retta DE sarà Binomio. Dico che DE è Binomio del mede-
simo ordine del Binomio AB.

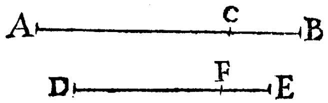
Perche AC è il maggior nome del Binomio AB, il quadrato di AC
superarà il quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta, la quale ò sarà
commensurabile, ò incommensurabile in lunghezza ad AC. Sia nel pri-
mo luogo commensurabile ad AC. Perche AC à CB è come DF ad FE,
ed il quadrato di AC supera il quadrato di CB, per il quadrato d'vna ret-
ta cōmensurabile in lunghezza ad AC, per la 15. propositione di questo,
il quadrato di DF superarà il quadrato di FE, per il quadrato d'vna ret-
ta commensurabile in lunghezza alla retta DF: e perche le rette AC, DF
sono commensurabili in lunghezza, se AC sarà commensurabile in lun-
ghezza à qualche esposta Rationale, in modo, che AB sia primo Bino- n 12. del 10.
mio, sarà ancora DF [n] commensurabile in lunghezza alla medesima Ra-
tionale, e per la prima delle seconde definitioni di questo, la retta DE
sarà primo Binomio, e perciò del medesimo ordine del Binomio AB. Sia
poi CB commensurabile in lunghezza all'esposta Rationale, in modo,
che AB sia secondo Binomio. Perche FE è commensurabile in lunghez- o 12. del 10.
za à CB, sarà FE [o] commensurabile in lunghezza alla medesima Rationa-
le, e per la definitione del secondo Binomio, sarà la retta DE secondo
Binomio, cioè del medesimo ordine del Binomio AB. Se finalmente ne
AC, ne meno CB, è commensurabile in lunghezza all'esposta Rationale,
in modo, che AB sia terzo Binomio, essendo le due DF, FE commen- p 12. del 10.
surabili in lunghezza alle due AC, CB, nessuna delle due DF, FE [p] sarà
commensurabile in lunghezza all'esposta Rationale, e per la terza delle
antecedenti definitioni, la retta DE sarà terzo Binomio, cioè sarà del
medesimo ordine del Binomio AB.

In oltre se il quadrato di AC supera il quadrato di CB, per il quadra-
to d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla retta AC, il quadra-
to di DF superarà il quadrato di FE, [q] per il quadrato d'vna retta incom- q 15. del 10.
mensurabile in lunghezza alla retta DF; e, procedendosi nel medesimo
modo di prima, si prouerà, che DE è Binomio quarto, ò quinto, ò sesto,
secondo che AB sarà quarto, ò quinto, ò sesto Binomio. Per la qual co-
sa la retta, commensurabile in lunghezza al Binomio, è Binomio del me-
desimo ordine, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA L. PROPOSITIONE LXVIII.

Quella retta, ch'è commensurabile in lunghezza alla bimediale, è ancor essa Bimediale, & è del medesimo ordine.

Sia AB qualunque delle Bimediali, diuisa ne i suoi nomi AC, CB, ed il maggior nome sia AC; e sia DE commensurabile in lunghezza ad AB. Dico che la retta DE è ancora Bimediale, ed è del medesimo ordine della Bimediale AB. Si faccia si come tutta AB à tutta DE, [a] così la parte AC alla parte DF, ed, inuertendo, sarà tutta DE à tutta AB [b] come la parte DF alla parte AC; dal che il restante FE al rimanente CB [c] sarà come tutta DE à tutta AB, cioè come DF ad AC: ma DE è posta commensurabile in lunghezza ad AB; sarà FE [d] commensurabile in in lunghezza à CB: ed ancora DF sarà commensurabile in lunghezza ad AC; ma le due AC, CB, sono medie, saranno le due DF, FE, [e] che gli sono commensurabili, ancora Medie. In oltre perche AC à DF è come CB ad FE, permutando, AC à CB [f] sarà come DF ad FE: ma le due AC, CB [g] sono commensurabili solamente in potenza, saranno ancora le due DF, FE, [h] commensurabili solamente in potenza. Per la qual cosa le rette DF, FE, sono Medie, commensurabili solamente in potenza, e per la 38. propositione di questo, la retta DE è quella, che si chiama Bimediale. Dico che la Bimediale DE è del medesimo ordine della Bimediale AB. Prese le due AC, CB, come basi di due rettangoli, de'quali AC sia altezza commune, sarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC,CB, [K] come la base AC alla base CB. E nell'istesso modo si prouerà, che il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE, [l] è come DF ad FE; ma AC à CB è come DF ad FE, sarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [m] come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE; e, permutando, il quadrato di AC al quadrato di DF [n] è come il rettangolo delle due AC,CB, al rettangolo delle due DF, FE; ma il quadrato di AC [o] è commensurabile al quadrato di DF (stante che le rette AC, DF sono commensurabili in lunghezza) sarà il rettangolo delle due AC, CB, [p] commensurabile al rettangolo delle due DF, FE. Se dunque il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, è Rationale, in modo, che AB sia prima Bimediale; sarà il rettangolo delle due DF, FE, [q] Rationale, e la retta DE [r] sarà prima Bimediale, cioè del medesimo ordine della Bimediale AB. Se poi il rettangolo delle due AC,CB, sarà Medio, in modo, che la retta AB sia seconda Bimediale, sarà il rettangolo delle due DF, FE, [t] Medio, e la retta DE [u] sarà seconda Bimediale, cioè del medesimo ordine della Bimediale AB, ch'era da dimostrarsi.



a 12.del 6.
b Coroll. alla 4. del 5.
c 19.del 5.
d 10.del 10.
e 24.del 10.
f 16.del 5.
g 38.del 10.
h 10.del 10.
K 1.del 6.
l 1.del 6.
m 11.del 5.
n 16.del 10.
o 9.del 10.
p 10.del 10.
q Lem. dopo la 19.del 10.
r 18.del 10.
t 24.del 10.
u 39.del 10.

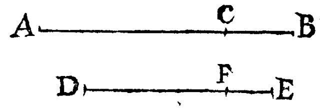
THEOREMA LI. PROPOSITIONE LXIX.

La retta, commensurabile alla Maggiore, è Maggiore.

Sia quella retta, che chiamiamo Maggiore, AB, diuisa ne i suoi nomi AC, CB; e sia la retta DE commensurabile ab AB, ò in lunghezza, e

poten-

potenza, ouero in potenza solamente. Dico che DE ancor essa è Maggiore. Si faccia la medesima costruttione dell'antecedente propositione, e si dimostri, come iui si fece, che AC à DF, e che CB ad FE, è come AB à DE. Perche DE è commensurabile ò in lunghezza, e potenza, ò in potenza solamente, ad AB, [a] saràDF commensurabile nell'istesso modo ad AC, come ancora la retta FE à CB. In oltre perche AC à DF è come CB ad FE, il quadrato di AC [b] al quadrato di DF sarà come il quadrato di CB al quadrato di FE, e per la 12.del 5. l'aggregato de i quadrati di AC, CB, all'aggregato de i quadrati di DF,FE, è come il quadrato di CB al quadrato di FE: ma il quadrato di CB è commensurabile al quadrato di FE; sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [c] commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF,FE; ma l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [d] è Rationale (stante che le rette AC, CB sono i nomi, che compongono la maggiore AB) in conseguenza l'aggregato de i quadrati di DF, FE [e] sarà Rationale.



Prese AC, CB come basi di due rettangoli, de'quali AC sia l'altezza commune, sarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [f] come la base AC alla base CB. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE, è come DF ad FE: ma DF ad FE è come AC à CB, sarà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [g] come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF,FE: e permutando, il quadrato di AC al quadrato di DF [h] sarà come il rettangolo delle due AC, CB, al rettangolo delle due DF, FE: ma il quadrato di AC è commensurabile al quadrato di DF [K] (stante che AC, & DF sono state dimostrate commensurabili in lunghezza, e potenza, ò al meno in potenza) sarà il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, [l] commensurabile al rettangolo delle due DF, FE. E perche il rettangolo delle due AC, CB, [m] per la natura della maggiore AB, è Medio; sarà il rettangolo delle due DF, FE, [n] che gli è commensurabile, Medio. Di nuouo, perche AC à CB è come DF ad FE, e le due AC, CB sono incommensurabili in potenza [o] (stante che compongono la maggiore AB) saranno le due DF, FE, [p] incommensurabili in potenza. Hor essendo le due DF,FE, incommensurabili in potenza, e l'aggregato de i loro quadrati, per quel che si è dimostrato, è Rationale, il rettangolo ancora, contenuto dalle medesime DF, FE, è Medio; per la 40.di questo, tutta la retta DE sarà quella, che si chiama Maggiore, come fù proposto dimostrare.

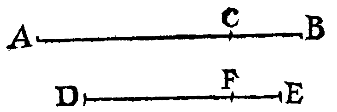
a 10.del 10.
b 22.del 6.
c 10.del 10.
d 40.del 10.
e 9. defin. del 10.
f 1.del 6.
g 11.del 5.
h 16.del 5.
K 9.del 10.
l 10.del 10.
m 40.del 10
n 24.del 10.
o 40.del 10.
p 10.del 10.

THEOREMA LII. PROPOSITIONE LXX.

La retta, commensurabile alla potente per il Rationale, e Medio, è ancor essa potente per il Rationale, e Medio.

Sia AB la retta potente per il Rationale, e Medio, la quale ſia diuiſa ne i ſuoi nomi AC,CB, e ſia DE commenſurabile ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza ſolamente, ad AB. Dico che DE ſarà quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio.

Si faccia la medeſima coſtruttione dell'altre antecedenti, e ſi dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che l'aggregato de i quadrati delle due AC,CB, è commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE: ma l'aggregato

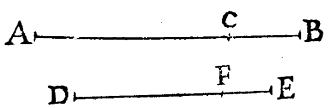


a 41.del 10. b 24.del 10. de i quadrati di AC,CB, [a] per la natura della propoſta AB, è Medio; ſarà l'aggregato de i quadrati di DF,FE, [b] che gli è commenſurabile, Medio. Similmente ſi dimoſtri, come nell'antecedente propoſitione, che il rettangolo delle due AC, CB, è commenſurabile al rettangolo contenuto dalle due DF, FE: ma il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, è c lem. dopo la 19.del 10. Rationale, ſarà il rettangolo delle due DF, FE, [c] che gli è commenſurabile, Rationale. Finalmente ſi dimoſtri, come nell'antecedente, che le rette DF, FE ſono incommenſurabili in potenza; ed haueremo le due DF, FE, incommenſurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati è Medio; e contengono vn rettangolo Rationale, e per la 41. propoſ. di queſto, ſarà la retta DE potente per il Rationale, e Medio, il che era da dimoſtrarſi.

THEOREMA LIII. PROPOSITIONE LXXI.

La retta, commenſurabile alla potente per due Medij, è ancor eſſa potente per due Medij.

Sia la potente per due Medij AB, diuiſa ne i ſuoi nomi AC, CB, e ſia DE commenſurabile ò in lunghezza, e potenza, ò in potenza ſolamente ad AB. Dico che DE è potente per due Medij. Si dimoſtri come nella 69. propoſitione, che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, è commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE, e che il rettangolo, contenuto dalle medeſime AC, CB, è commenſurabile al rettangolo delle due DF, FE. E perche



a 42.del 10. tanto l'aggregato de i quadrati di AC, CB, quanto il rettangolo delle rette AC, CB, [a] (per la natura della linea AB) è Medio; ſarà tanto l'aggregato de i quadrati di DF, FE, quanto il rettangolo, contenuto dalle b 24.del 10. medeſime DF, FE, [b] Medio; e ſarà, come nell'antecedente propoſitione fù dimoſtrato, DF incommenſurabile in potenza. Finalmente, eſſendo AB, per ipoteſi, la retta potente per due Medij, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ſarà [c] incommenſurabile al rettangolo, contenuto dalle c 42.del 10. rette AC, CB: ma l'aggregato de i quadrati di AC, CB, è dimoſtrato

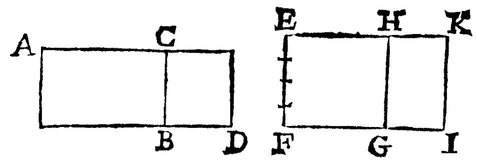
commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE; ſarà l'aggregato de i quadrati di DF,FE, [d] incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il rettangolo di AC, CB, è dimoſtrato commenſurabile al rettangolo delle due DF, FE; ſarà l'aggregato de i quadrati delle due DF,FE, [e] incommenſurabile al rettangolo delle medeſime DF, FE. Per la qual coſa le rette DF, FE ſono incommenſurabili in potenza; l'aggregato de i quadrati di DF,FE, per quel che ſi è dimoſtrato, è Medio; come ancora il rettangolo, contenuto dalle medeſime DF, FE, è Medio, ed è incommenſurabile all'aggregato de i quadrati DF,FE; e, per la 42. propoſitione di queſto, la retta DE ſarà quella, che ſi chiama potente per due Medij, ch'era da dimoſtrarſi.

d 13.del 10.
e 13.del 10.

THEOREMA LIV. PROPOSITIONE LXXII.

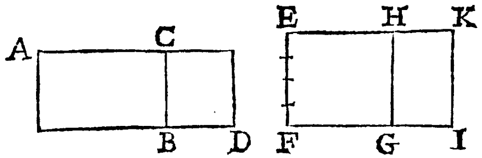
La retta, il di cui quadrato è vguale all'aggregato dello ſpatio Rationale, col Medio; ò è Binomio, ò è prima Bimediale, ò è Maggiore, ouero è la potente per il Rationale, e Medio.

Sia il rettangolo Rationale AB, al quale ſia aggiunto il Medio CD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale allo ſpatio AD, ò è Binomio, ò prima Bimediale, ò



Maggiore, ouero è la potente per il Rationale, e Medio. Perche AB è Rationale, e lo ſpatio CD è Medio, ſarà AB, ò maggiore, ò minore di CD; perche ſe foſſero vguali ſarebbero commenſurabili, ed in tal caſo ò ambidue ſarebbero Rationali, ò pure ambidue Medij, ch'è contro all'ipoteſi; non dunque AB è vguale à CD. Suppoſto prima che AB ſia maggiore di CD. Si eſponga qualunque Rationale EF, alla quale [a] ſi applichi il rettangolo EG, vguale al Rationale AB; ſarà HG vguale ad EF, e a 45.del 10. perciò HG ſarà Rationale. Si applichi ad HG [b] il rettangolo HI, vguale al Medio CD; ſarà HI Medio, ed il rettangolo EG, ch'è vguale al Ra- b 45.del 1. tionale AB, ſarà Rationale: per la qual coſa i due EG, HI, ſaranno incommenſurabili; perche ſe foſſero commenſurabili, ſarebbero ò tutti due Rationali, ò tutti due Medij. In oltre, eſſendo alla Rationale EF applicato il Rationale EG, l'altro lato EH [c] ſarà Rationale, e ſarà commen- c 21.del 10. ſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Similmente eſſendo alla Rationale HG applicato il Medio HI, l'altro lato HK ſarà Rationale, [d] ed in- d 23.del 10. commenſurabile in lunghezza alla Rationale HG, ouero EF; fù dimoſtrata EH commenſurabile in lunghezza alla medeſima EF, ſaranno le due EH, HK, [e] incommenſurabili in lunghezza: ma, per quel che ſi è di- e 13.del 10. moſtrato, ſono Rationali, in conſeguenza le rette EH,HK ſono Rationali, è commenſurabili ſolamente in potenza; per la qual coſa tutta la

f 37. del 1. g 1. del 6. retta EK f ſarà Binomio. E perche lo ſpatio AB è ſuppoſto maggiore di CD, cioè EG maggiore di GK, & EG à GK g è come EH ad HK, ſarà EH maggiore di HK, e perciò il quadrato del maggior nome EH ſuperarà il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, ò commenſurabile, ò incommenſurabile in lunghezza al maggior nome EH. Se il quadrato di EH ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta commenſurabile in lunghezza ad EH, per la prima delle proſſime antecedenti definitioni, ſarà EK primo Binomio; e per la 55. propoſitione, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal primo Binomio EK, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama Binomio: ma il rettangolo EI, per coſtruttione, è vguale ad AD, perciò la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AD, è irrationale, ed è quella, che ſi chiama Binomio. Ma ſe il quadrato di EH ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza ad EH; eſſendo EH, per quel che ſi è dimoſtrato, commenſurabile in lũghezza ad EF; ſarà EK quarto Binomio, e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal quarto Binomio EK,
h 28. del 10. cioè al rettangolo AD, h ſarà irrationale, e ſarà quella, che ſi chiama Maggiore.



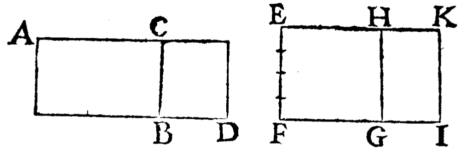
Di nuouo, ſuppoſto che AB ſia minore di CD, ſi faccia la coſtruttione di prima, e ſi dimoſtri nell'iſteſſo modo, che EK è Binomio, e che EH è commenſurabile in lunghezza ad EF. E perche AB è minore di CD, cioè EG minore di HI; ſarà EH minore di HK: per la qual coſa il quadrato di HK ſarà maggiore del quadrato di EH, per il quadrato d'vna retta ò commenſurabile, ouero incommenſurabile in lunghezza ad HK. Se il quadrato del maggior nome HK ſupera il quadrato di EH, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad HK, ſarà EK, per la ſeconda delle precedenti definitioni, ſecondo Binomio; e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal ſecondo Binomio EK, ouero vguale ad AD, ſarà k irrationale, e ſarà quella, che ſi
K 56. del 10. chiama prima Bimediale.

Finalmente ſe il quadrato di HK ſupera il quadrato di EH, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza al maggior nome HK, eſſendo il minor nome EH commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, ſarà EK quinto Binomio, e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal quinto Binomio EK,
l 59. del 10. cioè vguale ad AD, ſarà irrationale; e ſarà l quella, che ſi chiama potente per il Rationale, e Medio. Per la qual coſa la retta, il di cui quadrato è vguale al compoſto dello ſpatio Rationale, e Medio, ò è Binomio, ò è prima Bimediale, ò è maggiore, ouero la potente per il Rationale, e Medio, ch'era da dimoſtrarſi.

THEO-

THEOREMA LV. PROPOSITIONE LXXIII.

La retta, il di cui quadrato è vguale all'aggregato di due Medij incommenſurabili; ò è ſeconda Bimediale, ouero è la potente di due Medij.



Siano compoſti li due Medij incommenſurabili AB, CD in modo, che facciano il ſolo piano AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale ad AD, ò è ſeconda Bimediale, ouero è la potente per due Medij. Sia eſpoſta la Rationale EF. O il medio AB è maggiore, ouero è minore del Medio CD, non potendo eſſere vguale, ſtante che ſarebbero commenſurabili, ch'è contro all'ipoteſi. Sia nel primo luogo AB maggiore di CD. Si faccia la coſtruttione dell'antecedente propoſitione, ſarà EG maggiore di HI, e la retta EH maggiore di HK: e perche i Medij AB, CD, per ipoteſi, ſono incommenſurabili, ſarà EG incommenſurabile ad HI; mà EG ad HI a è come a 1. del 6.
EH ad HK; ſarà EH b incommenſurabile in lunghezza ad HK. In oltre b 10. del 10.
perche i due AB, CD ſono Medij, ſaranno i due EG, HI, che gli ſono vguali, ancora Medij. Hor eſſendo i Medij EG, HI applicati alle Rationali EF, HG, gli altri lati EH, HK ſono c Rationali, ed incommenſurabi- c 23. del 10.
li in lunghezza alla Rationale EF. Eſſendo dunque le due EH, HK Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza, ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 37. propoſitione di queſto, la retta EK ſarà Binomio. Di più eſſendoſi dimoſtrata EH maggiore di HK, il quadrato di EH ſarà maggiore del quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta ò commenſurabile, ouero incommenſurabile in lunghezza alla maggiore EH. Se il quadrato di EH è maggiore del quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad EH, eſſendo per quel che ſi è dimoſtrato, ambidue i nomi EH, HK incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF; ſarà EK, per la terza delle precedenti definitioni, terzo Binomio; e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF; e dal terzo Binomio EK, cioè vguale al rettangolo AD, d ſarà irrationale, e ſarà quella, che ſi chiama d 57. del 10.
ſeconda Bimediale. Se poi il quadrato di EH ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile al maggior nome EH; per che i due EH, HK ſono incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF, per la ſeſta delle precedenti definitioni, ſarà EK ſeſto Binomio; e la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EI, contenuto dalla Rationale EF, e dal ſeſto Binomio EK, cioè vguale ad AD, ſarà e irrationa- e 60. del 10.
le, e ſarà quella che ſi chiama potente per due Medij.

Finalmente ſe il Medio AB ſarà minore del Medio CD, procedendoſi nell'iſteſſo modo, ſi prouerà ſimilmente, che la retta EK ò è ſecon-

da

da Bimediale, ouero è la potente per due Medij, il che era da dimostrarsi.

SCOLIO.

Sette sono i Senarij, de' quali ha trattato fin quì Euclide.

Nel primo dimostra la generatione di sei linee Irrationali, che sono. Il Binomio; la Prima Bimediale; la Seconda Bimediale; la Maggiore; la Potente per il Rationale, e Medio; e la Potente per due Medij.

Nel secondo tratta della diuisione de i loro nomi, dimostrando che ciascuna si diuide ne i loro nomi in vn sol punto.

Nel terzo spiega il modo da ritrouare il primo, secondo, terzo, quarto, quinto, e sesto Binomio.

Nel quarto dimostra qual differenza sia frà le linee irrationali del primo Senario frà di loro.

Nel quinto, applicando i quadrati delle irrationali del primo Senario alla Rationale, dimostra l'altro lato, che nasce da tale applicatione, quale linea irrationale sia.

Nel sesto dimostra, che ogni retta, commensurabile à ciascuna delle irrationali del primo Senario, è irrationale della medesima specie di quella, alla quale è commensurabile.

E nel settimo, in due sole propositioni, spiega manifestamente la differenza delle sopradette irrationali.

Essendosi dimostrato nel sesto Senario, che ogni retta, commensurabile in lunghezza à qualunque delle irrationali del primo Senario, è irrationale della medesima specie di quella, alla quale è commensurabile; e perche ogni retta è commensurabile alla sua parte Aliquota, sarà manifesto, che non solo la metà, mà qualunque parte aliquota dell'irrationale, essendo commensurabile al tutto, sarà irrationale, e della medesima specie del suo tutto.

Dopo ch'Euclide hà dimostrato le passioni delle sudette sei linee irrationali generate per compositione, spiega susseguentemente le medesime cose in sei altre linee irrationali, che si generano per sottrattione; il che dimostra in sette altri Senarij, come successiuamente si può vedere.

PRINCIPIO DE' SENARII
PER DETRATTIONE.

THEOREMA LVI. PROPOSITIONE LXXIV.

Se da vna linea Rationale se ne detragga vna Rationale, commensurabile solamente in potenza à tutta, la rimanente sarà Irrationale, e chiamasi Apotome.

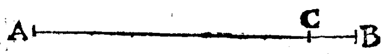
Dalla Rationale AB se ne detragga la Rationale AC, che sia commensurabile solamente in potenza ad AB. Dico che il restante CB è irrationale. Prese le rette AB, AC, come basi di due rettangoli, de' quali AB sia altezza commune; sarà il quadrato di AB al rettangolo contenuto dalle due AB, AC, come AB ad AC: ma AB è incommensurabile in lunghezza ad AC (stante che sono commensurabili solamente in potenza) sarà il quadrato di AB [a] incommensurabile al rettangolo contenuto dalle due BA, AC. In oltre perche AB è commensurabile solamente in potenza ad AC, sarà il quadrato di AB commensurabile al quadrato di AC, e l'aggregato de i quadrati di AB, AC,[b] sarà commensurabile al quadrato di AB: ma il quadrato di AB è dimostrato incommensurabile al rettangolo delle due BA, AC; sarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [c] incommensurabile al rettangolo contenuto dalle due BA, AC. E perche il rettangolo delle due BA, AC, è commensurabile al suo doppio, cioè al doppio rettangolo delle due BA, AC; sarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [d] incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC. Di più, perche i quadrati delle due BA, AC, [e] sono vguali al doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC; e si è dimostrato, che i due quadrati di AB, AC, sono incommensurabili al doppio rettangolo delle due BA, AC, i quadrati delle medesime BA, AC, per il Corollario alla 17. propositione di questo, saranno incommensurabili al quadrato di CB: ma l'aggregato de i quadrati di AB, AC, è Rationale (stante che è commensurabile al quadrato della Rationale AB) essendo incommensurabile al quadrato di CB, sarà il quadrato di CB [f] irrationale, ed il suo lato BC [g] sarà irrationale. Si chiami la retta BC Apotome. Se dunque dalla Rationale se ne detrae vna lunghezza Rationale, commensurabile in potenza à tutta, quel che resta è Irrationale, il che era da dimostrarsi.

a 10. del 10.
b 16. del 10.
c 13. del 10.
d 13. del 10.
e 7. del 2.
f 10. defin. del 10.
g 11. defin. del 10.

THEOREMA LVII. PROPOSITIONE LXXV.

Se da vna linea Media si detragga vna Media, commensurabile solamente in potenza à tutta, ed il rettangolo contenuto da tutta, e dalla detratta sia Rationale; la rimanente sarà Irrationale, e si chiama prima Apotome della Media.

Dalla Media AB ne sia detratta la Media AC, commensurabile solamente in potenza à tutta la Media AB; ed il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla Media detratta AC, sia Rationale. Dico che il rimanente CB è Irrationale. Perche le rette AB, AC sono commensurabili solamente in potenza, il quadrato di AB sarà commensurabile al quadrato di AC, e l'aggregato de i quadrati di AB,
a 16. del 10. AC, a sarà commensurabile al quadrato di AC. In oltre, perche le ret-
b 22. del 10. te AB, AC sono Medie, i loro quadrati b saranno ancora Medij, e perciò irrationali: ma l'aggregato de i quadrati di AB, AC, è dimostrato commensurabile al quadrato di AC, ch'è Medio, l'aggregato de i quadrati
c 24. del 10. delle due AB, AC, c sarà Medio, ed in cõseguenza irrationale: fù supposto il rettangolo delle due BA, AC, Rationale; l'aggregato de i quadra ti di AB, AC, ch'è Medio, sarà incommensurabile al rettangolo delle due BA, AC, ch'è Rationale. E perche il doppio rettangolo
d 9. defin. del 10. delle due BA, AC, d è Rationale per essere commensurabile alla sua metà, ch'è Rationale;



sarà l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC, incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC: ma l'aggregato de i
e 7. del 2. quadrati di AB, AC, e è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC; sarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, col
f 13. del 10. quadrato di BC, f incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC. Hor se l'aggregato del doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC, è incommensurabile alla parte, cioè al doppio rettan-
g 17. del 10. golo delle due BA, AC; sarà il quadrato di BC g incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC: ma il doppio rettangolo delle due BA, AC, è dimostrato Rationale, in conseguenza il quadrato di BC sarà irrationale, ed il suo lato BC sarà irrationale, ch'era da dimostrarsi. Si chiami la retta BC prima Apotome della Media.

THEOREMA LVIII. PROPOSITIONE LXXVI.

Se da vna linea Media se ne detragga vna Media, commensurabile solamente in potenza à tutta, ed il rettangolo, contenuto da tutta, e dalla media detratta, sia Medio; la rimanente sarà irrationale, e si chiama seconda Apotome della media.

Dalla Media AB ne sia detratta la media AC, commensurabile solamente in potenza à tutta AB, ed il rettangolo contenuto da tutta AB, e dalla Media detratta AC, sia Medio. Dico che la rimanente CB sarà irrationale.

rationale. Perche le rette AB, AC sono commensurabili in potenza, sarà il quadrato di AB commensurabile al quadrato di AC; e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, a sarà commẽsurabile al quadrato di AC, ed an- a 16. del 10.
cora al quadrato di AB: mà i quadrati di AB, AC sono Medij (stante che le rette AB, AC sono supposte Medie) sarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, b ch'è commensurabile ad ogn'vno di loro, Medio. In b 24. del 10.
oltre perche il rettangolo delle due BA, AC, per ipotesi, è Medio; sarà il suo doppio, cioè il doppio rettangolo di BA, AC, c che gli è commen- c 24. del 10.
surabile, Medio. E perche l'aggregato de i quadrati di AB, AC, è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC, d col quadrato di BC; d 7. del 2.
l'aggregato de i quadrati di AB, AC, ch'è Medio, superarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, ch'è dimostrato Medio, per il quadrato di BC: ma il Medio non supera il Medio e per spatio Rationale; non sarà e 27. del 10.
dunque il quadrato di BC Rationale. Per la qual cosa il quadrato di BC è irrationale, ed il lato BC è similmente irrationale, come fù proposto dimostrare. Si chiami la retta BC seconda Apotome della Media.

THEOREMA LIX. PROPOSITIONE LXXVII.

Se da vna retta linea se ne detragga vna retta linea, incommensurabile in potenza à tutta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e della detratta, sia Rationale; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime sia Medio; la rimanente sarà irrationale, e si chiamerà Minore.

Dalla retta AB sia detratta la retta AC, incommensurabile in potenza ad AB, in modo, che l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC sia Rationale; & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime BA, AC sia Medio.

Dico che la rimanente CB sarà irrationale. Perche il doppio rettangolo delle due BA, AC, a è irrationale, stante che, per ipotesi, è Medio; a 24. del 10.
e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, per ipotesi, è Rationale; l'aggregato dunque de i quadrati di AB, AC sarà incommensurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC. Di nuouo perche l'aggregato de i quadrati, AB, AC, è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC b col b 7. del 2.
quadrato di BC; essendo l'aggregato de i quadrati delle due AB, AC incommensurabile alla parte, cioè al doppio rettangolo delle due BA, AC; il medesimo aggregato de i quadrati di AB, AC, per il Corollario alla 17. propositione di questo, sarà incommensurabile al rimanente, cioè al quadrato di BC: mà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, per ipotesi, è Rationale; sarà il quadrato di BC c irrationale, e la retta BC c 10. defin. del 10.
sarà ancora irrationale, ch'era da dimostrarsi. La retta BC sarà quella, che si chiamerà Minore.

THEOREMA LX. PROPOSITIONE LXXVIII.

Se dalla retta linea ſe ne detrae vna retta linea, incommenſurabile in potenza à tutta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e della detratta, ſia Medio; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime, ſia Rationale; la rimanente ſarà irrationale, e ſi dirà eſſer quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Dalla retta AB ſe ne detragga la retta AC, incommenſurabile in potenza à tutta AB, in modo, che l'aggregato de i quadrati di AB, AC ſia Medio; ed il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime BA, AC ſia Rationale. Dico che la rimanente BC ſarà irrationale. Perche il doppio rettangolo, contenuto dalle due BA, AC, è rationale, e l'aggregato de i quadrati di AB, AC, per ipoteſi, è Medio, e perciò irrationale, ſarà l'aggregato de i quadrati di AB, AC [a] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due BA, AC: mà l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [b] è vguale al doppio rettangolo delle due BA, AC col quadrato di BC; ſarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, col quadrato di BC, incommenſurabile al rettangolo delle due BA, AC. Per la qual coſa il doppio rettangolo delle due BA, AC [c] ſarà incommenſurabile al quadrato di BC. E perche il doppio rettangolo delle due BA, AC, è dimoſtrato Rationale; il quadrato dunque di BC [d] ſarà irrationale, ed il lato BC ſarà parimente irrationale. E queſta retta BC ſi dirà eſſer quella, che col Rationale fà il tutto Medio, come fù propoſto dimoſtrare.

a 10. de fin. del 10.
b 7. del 2.
c 17. del 10.
d 10. defin. del 10.

THEOREMA LXI. PROPOSITIONE LXXIX.

Se dalla retta linea ſe ne detragga vna retta linea incommenſurabile in potenza à tutta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e della detratta ſia Medio; ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medeſime, ſia ancora Medio, incommenſurabile all'aggregato de i loro quadrati; la rimanente ſarà irrationale, e ſi dirà eſſer quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Dalla retta AB ſe ne detragga la retta AC, incommenſurabile in potenza à tutta AB, in modo, che il compoſto de i quadrati di AB, AC ſia Medio, ed il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime BA, AC ſia

Medio,

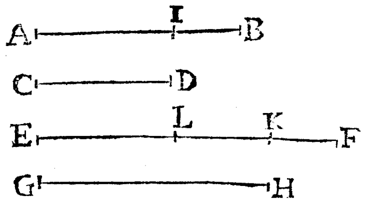
Medio, incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AB, AC. Dico che la rimanente CB ſarà irrationale.

Perche l'aggregato de i quadrati di AB, AC, [a] è vguale al doppio rettãgolo contenuto dalle due BA, AC, col quadrato di BC; il medeſimo aggregato de i quadrati di AB, AC, ch'è Medio, ſuperarà il doppio rettangolo delle due BA, AC, che ſimilmente è Medio, per la quantità del quadrato di BC: mà il Medio [b] non ſupera il Medio per lo ſpatio Rationale, in conſeguenza il quadrato di BC non è Rationale; mà ben ſi irrationale, ed il ſuo lato ſarà parimente irrationale, come fù propoſto dimoſtrare. La retta linea BC ſi chiamerà quella, che col Medio fà il tutto Medio.

a 7. del 2.
b 27. del 10

L E M M A.

Se ſaranno quattro quantità, e la differenza frà la prima, e ſeconda, è vguale alla differenza frà la terza, e quarta; ſarà ancora la differenza frà la prima, e terza, vguale alla differenza frà la ſeconda, e quarta.



Siano le quattro grandezze AB, CD, EF, GH; e ſia IB la differenza frà AB, & CD, e la differenza frà EF, & GH ſia KF. Dico che ſe IB è vguale à KF, la differenza ancora frà AB, & EF, ſarà vguale alla differenza frà CD, & GH. Si prenda la differenza frà EK, & AI, che ſia LK, ſarà EL vguale ad AI; alle vguali EL, AI, s'aggiungano le vguali KF, IB; ſarà tutta AB vguale ad EL, inſieme con KF; dal che la differenza frà EF, & AB ſarà LK: mà, per coſtruttione, LK è la differenza frà EK, & AI; la differenza dunque frà EF, & AB, è vguale alla differenza frà EK, & AI. In oltre perche IB è la differenza di quanto AB ſupera CD, ſarà AI vguale à CD. Similmente perche KF è la differenza di quanto EF ſupera GH, ſarà EK vguale à GH. Hor eſſendo AI vguale à CD, ed è ancora EK vguale à GH; la differenza frà EK, & AI ſarà vguale alla differenza frà GH, & CD; mà, per quel che ſi è dimoſtrato, la differenza frà EK, & AI, è vguale alla differenza frà EF, & AB; ſarà la differenza frà EF, & AB, vguale alla differenza frà GH, & CD, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA LXII. PROPOSITIONE LXXX.

All'Apotome si può aggiungere vna sola linea Rationale, che sia commensurabile solamente in potenza à tutta la composta.

Sia l'Apotome AB, alla quale sia aggionta la Rationale BC, commensurabile solamente in potenza à tutta la composta AC. Dico che non si può aggiungere

ad AB altra retta Rationale, come, per esempio BD, che sia commensurabile solamente in potenza ad AD. Sia aggiunta, s'è possibile, la Rationale BD, commensurabile solamente in potenza ad AD. Perche le due AC,CB, per ipotesi, sono commensurabili solamente in potenza, il quadrato di AC sarà commensurabile al quadrato di BC; dal che l'aggregato de i quadrati di AC, BC, [a] sarà commensurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di BC: ma il quadrato di BC è Rationale, stante che BC, per ipotesi, è Rationale; l'aggregato ancora de i quadrati di AC, BC, che gli è commensurabile, [b] sarà Rationale. Nell'istesso modo si prouerà, che l'aggregato de i quadrati di AD,DB, è Rationale, e per lo Scolio alla 27. propos. di questo, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sarà spatio Rationale. Oltre à ciò, perche AC è commensurabile in potenza à BC, essendo BC Rationale, [c] sarà ancora AC Rationale, e commensurabile solamente in potenza à BC. Nell'istessa maniera si prouerà, che AD è Rationale, e commensurabile solamente in potenza à BD.

Di nuouo, perche AC è diuisa in B, i quadrati delle due AC, CB, [d] sono vguali al doppio rettangolo delle due, AC,CB, col quadrato di AB; dal che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, supera il doppio rettangolo delle due AC, CB, per il quadrato di AB. Similmente la retta AD è diuisa in B, [e] i quadrati delle due AD,DB sono vguali al doppio rettangolo delle due AD,DB, col quadrato di AB, e perciò l'aggregato de i quadrati delle due AD, DB, supera il doppio rettangolo delle medesime AD,DB, per il quadrato di AB; per la qual cosa la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC,CB, & il doppio rettangolo delle due AC,CB, è vguale alla differenza frà l'aggregato de i quadrati delle due AD,DB, ed il doppio rettangolo delle medesime AD,DB. Si considerino quattro quantità, la prima sia l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB; la seconda sia il doppio rettangolo delle medesime AC, CB; la terza sia l'aggregato de i quadrati di AD, DB; e la quarta il doppio rettangolo delle due AD,DB. E perche si è dimostrato, che la differenza frà la prima, e seconda, cioè frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ed il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, è vguale alla differenza frà la terza, e quarta, cioè frà l'aggregato de i quadrati delle due AD,DB, ed il doppio rettangolo delle medesime AD, DB; per il Lemma antecedente, la differenza

a 16. del 10.
b 9. defin. del 10.
c 6. defin. del 10.
d 7. del 2.
e 7. del 2.

renza

renza frà la prima, e terza, cioè frà l'aggregato de i quadrati delle due AC,CB, e l'aggregato de i quadrati delle due AD,DB, sarà vguale alla differenza frà la seconda, e quarta, cioè frà il doppio rettangolo delle due AC,CB, ed il doppio rettangolo delle due AD,DB: ma la differenza frà l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD,& DB, per quel che si è dimostrato, è Rationale; la differenza dunque frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD,DB, sarà Rationale.

Finalmente, perche le due AC, CB, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, il rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, [f] sarà Medio,& il doppio rettãgolo delle due AC,CB, che gli è commensurabile, sarà ancora Medio. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il doppio rettangolo, contenuto dalle due AD, DB, è Medio. E perche il Medio non supera il Medio [g] per spatio Rationale, la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ch'è Medio, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, che parimente è Medio, non sarà Rationale: ma questa differenza fù dimostrata Rationale, sarebbe, e non sarebbe Rationale, ch'è impossibile. Non dunque all'Apotome AB si può aggiungere altra Rationale BD, commensurabile solamente in potenza alla composta AD, fuor che la sola Rationale BC, ch'era da dimostrarsi.

f 22. del 10.
g 27. del 10.

THEOREMA LXIII. PROPOSITIONE LXXXI.

Alla prima Apotome della Media vna sola linea Media si può aggiungere, che sia commensurabile solamente in potenza alla composta, e che contenga con la composta vn rettangolo Rationale.

Sia AB la prima Apotome della Media, alla quale sia aggiunta la Media BC, commensurabile solamente in potenza à tutta la composta AC, e che il

rettangolo contenuto da tutta AC, e dall'aggiunta BC, sia Rationale. Dico che non è possibile aggiungerui altra Media, come BD, commensurabile solamente in potenza à tutta AD; e che il rettangolo contenuto da tutta AD, e dall'aggiunta DB, sia Rationale. Sia aggiunta, s'è possibile, qualche Media BD, commensurabile solamente in potenza ad AD, e che il rettangolo delle due AD,DB, sia Rationale. Perche il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, per ipotesi, è Rationale, il doppio rettangolo delle medesime AC,CB, che gli è commensurabile, [a] sarà Rationale. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale: per la qual cosa la differenza frà il doppio rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB, [b] sarà Rationale. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che la differenza frà l'aggregato de i quadrati

a 9. defin. del 10.
b Scol. alla 27. del 10.

di AC,

di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è vguale alla differenza frà il doppio rettangolo contenuto dalle due AC,CB, ed il doppio rettangolo, contenuto dalle due AD, DB; e perche la differenza di queſti due doppij rettangoli è ſtata dimoſtrata Rationale, ſarà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, Rationale.

Di nuouo, perche BC, per ipoteſi, è Media; ſarà AC, [c] che gli è commenſurabile in potenza, Media; e perciò le due AC, BC ſono Medie commenſurabili ſolamente in potenza: per la qual coſa i loro quadrati ſono Medij frà di loro commenſurabili. Hor eſſendo il quadrato di AC commenſurabile al quadrato di BC, l'aggregato de i quadrati di AC,CB, [d] ſarà commenſurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di BC: ma il quadrato di BC è Medio, ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, BC, [e] Medio. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è Medio; e perche il Medio non ſupera il Medio [f] per ſpatio Rationale, la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, non ſarà Rationale: ma l'iſteſſa differenza fù dimoſtrata Rationale, ſarebbe, e non ſarebbe Rationale, ch'è impoſſibile. Non dunque alla Media AB ſi può aggiungere altra Media, fuor che la Media BC, che ſia commenſurabile ſolamente in potenza al tutto, e che il rettangolo contenuto da tutta, e dall'aggiunta ſia Rationale, come fù propoſto dimoſtrare.

c Corol. alla 24. del 10.
d 16. del 10.
e 24. del 10.
f 27. del 10.

THEOREMA LXIV. PROPOSITIONE LXXXII.

Alla ſeconda Apotome della Media vna ſola linea Media ſi può aggiungere, che ſia commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, e che contenga con la compoſta vn rettangolo Medio.

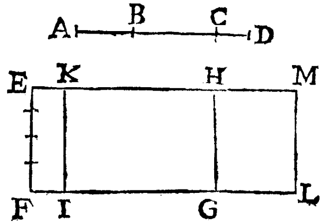
Sia AB la ſeconda Apotome della Media, alla quale ſia aggiunta la Media BC, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta AC, ed il rettangolo contenuto da tutta AC, e dall'aggiunta CB, ſia Medio. Dico che non è poſſibile aggiungere altra Media ad AB, commenſurabile ſolamente in potenza à tutta la compoſta, e che il rettangolo contenuto da tutta, e dall'aggiunta, ſia Medio. S'aggiunga, s'è poſſibile, ad AB qualche altra Media BD, commenſurabile ſolamente in potenza ad AD, e che il rettangolo contenuto da tutta AD, e dall'aggiunta DB, ſia Medio.

Si eſponga la Rationale EF, alla quale ſi applichi il rettangolo EG, [a] vguale all'aggregato de' quadrati di AC, CB; ed alla medeſima EF ſi applichi il rettangolo EI, vguale al quadrato di AB, e ſi applichi ancora il rettangolo EL [b] vguale all'aggregato de i quadrati delle due AD,

a 45. del 1.
b 45. del 1.

DB.

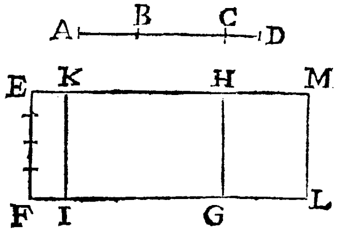
DB. Perche i quadrati delle due AC, BC ſono vguali al doppio rettangolo delle medeſime AC, BC, [c] col quadrato di AB, e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per coſtruttione, è vguale al rettangolo EG; ſarà il rettangolo EG vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB, col quadrato di AB; ſe ne leuino gli vguali, cioè il rettangolo EI, ed il quadrato di AB, reſta il rettangolo KG vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il rettangolo KL è vguale al doppio rettangolo delle due AD, DB. In oltre perche BC, per ipoteſi, è Media, ſarà AC, [d] che gli è commenſurabile in potenza, Media; e perciò le due AC, BC ſono medie commenſurabili ſolamente in potenza, per la qual coſa i loro quadrati ſaranno ancora Medij frà di loro commenſurabili. Hor eſſendo i quadrati di AC, CB, commenſurabili, il loro aggregato [e] ſarà commenſurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di BC: ma i quadrati di AC, BC ſono Medij, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, che à loro è commenſurabile, [f] ſarà ancora Medio; ed il rettangolo EG, ch'è vguale al detto aggregato, ſarà parimente Medio, il quale applicato alla Rationale EF farà l'altro lato EH [g] Rationale, & incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Similmente eſſendo il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, per ipoteſi, Medio, il doppio rettangolo delle medeſime AC, CB, che gli è commenſurabile, [h] ſarà ancora Medio: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, è dimoſtrato vguale al rettangolo KG; il rettangolo dunque KG ſarà Medio, che applicato alla Rationale KI, ouero EF farà il lato KH [k] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale KI; ouero EF. In oltre, perche il quadrato di AC, per ipoteſi, è commenſurabile al quadrato di CB, ſarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [l] commenſurabile al quadrato di AC, ed ancora al quadrato di CB. Si prendano le rette AC, CB, come baſi di due rettangoli, e ſia AC altezza commune, ſarà il quadrato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, [m] come la baſe AC alla baſe CB: ma AC, per ipoteſi, è incommenſurabile in lunghezza à CB ſarà il quadrato di AC [n] incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB: ma il quadrato di AC è dimoſtrato commenſurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB, l'aggregato dunque de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo EG, [o] ſarà incommenſurabile al rettangolo delle due AC, CB. E perche il doppio rettangolo delle due AC, CB, è commenſurabile al rettangolo delle medeſime AC, CB; ſarà il rettangolo EG [p] incommenſurabile al doppio rettangolo delle due AC, CB: fù dimoſtrato il doppio rettangolo delle due AC, CB vguale al rettangolo KG; ſarà il rettangolo EG incommenſurabile al rettangolo KG. Finalmente perche i rettangoli [q] EG, KG ſono come le baſi EH, KH; ed i rettangoli EG, KG ſono incommenſurabili; ſarà EH [r] incom-



c 7. del 2.
d 24. del 10.
e 16. del 10.
f Coroll. alla 24. del 10.
g 23. del 10.
h Coroll. alla 24. del 10.
K 23. del 10.
l 16. del 10.
m 1. del 6.
n 10. del 10.
o 13. del 10.
p 13. del 10.
q 1. del 6.
r 10. del 10.

men-

mensurabile in lunghezza à KH: mà furono mostrate Rationali, in conseguenza le rette EH, KH sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza. Se dunque dalla Rationale EH se ne detrae la Rationale KH, commensurabile solamente in potenza alla medesima EH, per la 74 propositione di questo, la rimanente EK sarà Apotome, alla quale è aggiunta la Rationale KH, commensurabile solamente in potenza à tutta EH, ne all'Apotome EK, per l'8o. propositione di questo, si può aggiungere altra Rationale, che sia commensurabile solamente in potenza à tutta la composta, fuor che KH. Nell'istesso modo si prouerà, che EK è Apotome, e che KM è Rationale, e commensurabile in potenza à tutta EM; che è contro à quel che si è dimostrato, mentre nessun' altra Rationale si può aggiungere ad EK, che sia commensurabile solamente in potenza à tutta la composta, fuor che la Rationale KH. Non dunque alla seconda Apotome della media, notata AB, si può aggiungere altra media, commensurabile solamente in potenza à tutta, e che il rettangolo di tutta dell'aggiunta sia Rationale, fuor che la media BC, ch'era da dimostrarsi.



THEOREMA LXV. PROPOSITIONE LXXXIII.

Alla minore vna sola retta linea si può aggiungere incommensurabile in potenza à tutta la composta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta la composta, e dell'aggiunta, sia Rationale; e che il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, sia Medio.

Sia la minore AB, alla quale sia aggiunta la retta BC, incommensurabile in potenza à tutta AC, in modo, che l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB sia Rationale, ed il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB sia Medio. Dico che nessun' altra retta si può aggiungere ad AB, secondo le proposte conditioni. Sia, se è possibile, aggiunta ad AB qualche altra retta BD, che sia incommensurabile in potenza ad AD, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB sia Rationale, e che il doppio rettangolo contenuto dalle medesime AD, DB sia Medio. Si dimostri, come si fece nella propositione 8o. di questo, che la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è vguale alla differenza frà il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB ed il doppio rettangolo

golo delle due AD, DB: mà la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è Rationale (stante che l'vno, e l'altro aggregato è Rationale) sarà la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB, Rationale. In oltre perche tanto il doppio rettangolo delle due AC, CB, quanto il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Medio, non potendo il Medio [a] superare il Medio per spatio Rationale; ne meno la differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, ed il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale: fù dimostrata la medesima differenza essere Rationale, sarebbe, e non sarebbe Rationale, ch'è impossibile. Non dunque alla minore AB si può aggiungere altra retta BD, incommensurabile in potenza à tutta AD, in modo, che l'aggregato de i loro quadrati sia Rationale, e che contengano vn rettangolo Medio, fuor che la retta BC, ch'era da dimostrarsi.

a 27. del 10.

THEOREMA LXVI. PROPOSITIONE LXXXIV.

A quella linea, che col Rationale fà il tutto Medio, vna sola retta linea si può aggiungere, commensurabile solamente in potenza à tutta la composta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e dell'aggiunta, sia Medio, & il doppio rettangolo contenuto da tutta, e dall'aggiunta sia Rationale.

Sia AB la retta linea, che col Rationale fà il tutto Medio, alla quale sia aggiunta la retta BC, incommensurabile in potenza à tutta la composta AC, in modo, che l'aggregato de i quadrati di AC, CB sia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB sia Rationale. Dico che non si può aggiungere ad AB altra retta, secondo le proposte conditioni. S'aggiunga, s'è possibile, ad AB vn'altra retta, come DB, incommensurabile in potenza ad AD, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB sia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medesime AD, DB sia Rationale. Si dimostri, come si fece nell'8o. propositione di questo, che la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, è vguale alla differenza frà il doppio rettangolo delle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB. Perche la differenza del doppio rettangolo delle due AC, CB, & il doppio rettangolo delle due AD, DB, è Rationale (stante che l'vno, e l'altro doppio rettangolo è supposto Rationale) sarà la differẽza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB, Rationale. In oltre perche tanto l'aggregato de i quadrati di AC, CB, quanto l'aggregato de i quadrati di AD, DB, per ipotesi, è Medio, ed il Medio non supera il Medio [a]

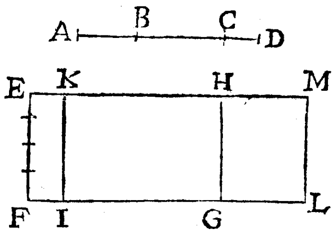
a 27. del 10.

per spatio Rationale, ne meno la differenza frà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, e l'aggregato de i quadrati di AD, DB sarà Rationale: mà la medesima differenza fù dimostrata Rationale, sarebbe, e non sarebbe Rationale, ch'è impossibile. Non dunque alla retta AB si può aggiungere altra retta, secondo le sopra poste conditioni, fuor che la retta BC, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LXVII. PROPOSITIONE LXXXV.

A quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, vna sola retta linea si può aggiungere incommensurabile in potenza à tutta la composta, in modo, che l'aggregato de i quadrati di tutta, e dell'aggiunta, sia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i detti quadrati.

Sia AB quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, alla quale sia aggiunta la retta BC, incommensurabile in potenza à tutta la composta AC, in modo, che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, sia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB, sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB. Dico che non si può aggiungere ad AB altra retta, secondo le medesime conditioni. Si aggiunga, s'è possibile, qualche altra retta BD, incommensurabile in potenza ad AD, che l'aggregato de i quadrati di AD, DB, sia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AD, DB, sia Medio, incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AD, DB. Sia fatta la medesima costruttione dell'82. propositione. Perche l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, è Medio, il rettangolo EG, che gli è vguale, sarà ancora Medio, il quale, applicato alla Rationale EF, fà l'altro lato EH [a] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale EF. Similmente perche il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, BC, per ipotesi, è Medio, ed è vguale, per quel che fù dimostrato nel 82. propositione, al rettangolo KG; sarà il rettangolo KG Medio, il quale applicato alla Rationale KI, ouero EF, fà l'altro lato KH [b] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale KI, ouero EF. E perche il doppio rettangolo delle due AC, CB, è supposto incommensurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB; sarà il rettangolo KG incommensurabile al rettangolo EG: ma il rettangolo KG al rettangolo EG [c] è come KH ad EH; essendo i rettangoli KG, EG, incommensurabili, sarà la retta KH [d] incommensurabile in lunghezza alla retta EH: furono mostrate le rette KH, EH, Rationali, in conseguenza saranno commensurabili solamente in potenza. Se dunque dalla Rationale EH se ne sottrae la Rationale KH, commensurabile solamente in potenza à tutta EH, l'auanzo EK [e] sarà Apotome, e la retta HK sarà quella Rationale, che, aggiunta all'Apotome EK, è commensurabile in potenza à tutta EH, ne altra Rationale si può aggiungere ad EK, che sia commensurabile in potenza à tutta la composta. Nell'istesso modo si dimostrerà, che EK è Apotome, e che MK è Rationale, commensurabile solamente in potenza à tutta la composta EM: dal che altra Rationale si può aggiungere ad EK, commensurabile solamente in potenza à tutta la composta, che è contro à quello che si è dimostrato. Non dunque alla retta AB si può aggiungere altra retta, secondo le conditioni della retta BC, ch'era da dimostrarsi.



a 23. del 10.

b 23. del 10.

c 1. del 6.

d 10. del 10.

e 74. del 10.

ANNOTATIONE.

Nelle cose seguenti la retta BC, aggiunta all'Apotome AB, secondo le conditioni esposte nelle sei antecedenti propositioni, la chiameremo linea congruente, in modo, che quando si dirà l'Apotome con la congruente, si douerà intendere tutta la retta AC.

DEFINITIONI TERZE.

Esposta la Rationale, e l'Apotome, se il quadrato dell'Apotome, con la congruente, supera il quadrato della congruente, per il quadrato d'vna retta linea commensurabile in lunghezza à tutta la composta dell'Apotome, e congruente.

I.

Se la composta dell'Apotome, e congruente sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome si chiamerà prima Apotome.

II.

Se la sola congruente sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome si dirà seconda Apotome.

III.

E se ne tutta la composta, ne la sola congruente, è commensurabile in lunghezza alla Rationale; si dirà terza Apotome.

Di nuouo se il quadrato di tutta la composta è maggiore del quadrato della congruente, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza à tutta la composta dell'Apotome, e congruente.

IV.

Se la composta dell'Apotome, e congruente, sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome si chiamerà quarta Apotome.

V.

Se la sola congruente è commensurabile in lunghezza alla Rationale; quell'Apotome si chiamerà quinta Apotome.

VI.

E se ne tutta la composta, ne la sola congruente è commensurabile in lunghezza alla Rationale; si dirà sesta Apotome.

SCOLIO.

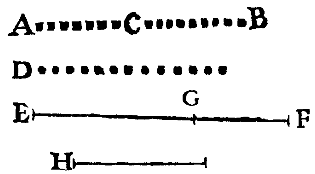
Queste sei linee, che si chiamano Apotome, prima, seconda, terza &c. sono sei linee irrationali, che restano dalle detrattioni fatte de i minori nomi da quelle sei linee, che furono chiamate Binomij; cioè il maggior nome d'ogni Binomio, leuatone il minor nome, si chiama Apotome.

PROBLEMA XIX. PROPOSITIONE LXXXVI.

Ritrouare la prima Apotome.

Per la seconda parte al Corollario della 29. propositione di questo, si trouino due numeri quadrati, come AB, BC, la di cui differenza AC non sia numero quadrato; sarà la proportione di AB à BC come numero quadrato

drato à numero quadrato; e la proportione di AB ad AC non sarà come numero quadrato à numero quadrato. Si esponga qualunque Rationale D, e si prenda la retta EF, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; sarà la retta EF [a] Rationale, e per il Corollario alla 6. propositione di questo, si faccia si come il numero AB al numero AC, così il quadrato di EF al quadrato di FG. Dico che la retta EG è quella, che chiamiamo prima Apotome. Perche la proportione del quadrato di EF al quadrato di FG, per costruttione, è come il numero AB al numero AC, i quadrati delle due EF, FG [b] saranno commensurabili, e le rette EF, FG, saranno commensurabili, almeno in potenza: ma la retta EF è dimostrata Rationale; sarà la retta FG, che gli è commensurabile in potenza, [c] parimente Rationale. E perche AB ad AC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di EF al quadrato di FG è come numero quadrato à numero quadrato; e perciò i loro lati EF, FG, [d] sono incommensurabili in lunghezza: furono dimostrate Rationali, e commensurabili in potenza; saranno dunque le rette EF, FG Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione di questo, il rimanente EG sarà quella, che si chiama Apotome, & FG sarà la sua congruente. Dico che EG è prima Apotome.



a 6. defin. del 10.

b 6. del 10.

c 6. defin. del 10.

d 9. del 10.

Dal quadrato di EF s'intenda detratto il quadrato di FG, ed il rimanente sia il quadrato della retta H; sarà il quadrato di H la differenza frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG. Perche AB ad AC è come il quadrato di EF al quadrato di FG; per la conuersione della proportione, sarà AB à BC, cioè l'antecedente alla differenza frà l'antecedente, e conseguente, come il quadrato di EF al quadrato di H, cioè come l'antecedente, ch'è il quadrato di EF, alla differenza, ch'è frà il quadrato di EF, ed il quadrato di FG. Hor essendo il quadrato di EF al quadrato di H come il numero quadrato AB al numero quadrato CB; le due EF, & H [e] sono commensurabili in lunghezza; si che il quadrato di EF, ch'è composta dell'Apotome, e della congruente, supera il quadrato della congruente FG, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza alla composta EF; ed è la composta EF commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la prima delle terze definitioni, la retta EG è quella, che si chiama prima Apotome, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

e 9. del 10.

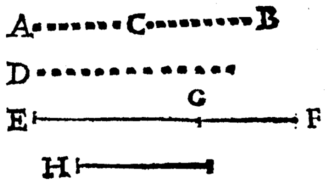
PROBLEMA XX. PROPOSITIONE LXXXVII.

Ritrouare la seconda Apotome.

Si ritrouino due numeri quadrati AB, AC, come si disse nell'antecedente propositione, cioè che la loro differenza AC non sia numero quadrato. Si esponga la Rationale D, e si prenda la retta GF, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; sarà la retta GF [a] Rationale: per il Corol-

a 6. defin. del 10.

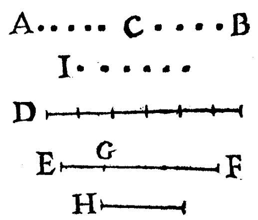
Corollario alla 6. propositione, si faccia si come AC ad AB, così il quadrato di FG al quadrato di EF. Dico che la retta EG è quella, che si chiama seconda Apotome. Perche il quadrato di FG al quadrato di EF è come il numero AC al numero AB, i quadrati delle b 6. del 10. le rette [b] GF, EF, saranno commensurabili, e le rette GF, EF saranno commensurabili, almeno in potenza; e perche GF è stata dimostrata Rationale, la retta c 6. defin. del 10. ancora EF, [c] che gli è commensurabile in potenza, sarà Rationale. Similmente perche il quadrato di GF al quadrato di EF è come il numero AC al numero AB, ed i numeri AC, AB, per costruttione, non sono come i numeri quadrati; ne meno il quadrato di FG al quadrato di EF sarà come nu- d 9. del 10. mero quadrato à numero quadrato; per la qual cosa le rette GF, EF [d] sono incommensurabili in lunghezza; ma furono dimostrate Rationali, in conseguenza le rette GF, EF, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione di questo, sarà la rimanente EG Apotome, la di cui congruente sarà FG. Dico che EG è quella, che si chiama seconda Apotome. Dal quadrato di EF s'intenda detratto il quadrato di GF, ed il restante sia il quadrato di H. Perche AC ad AB è come il e Corol. alla 4. del 5. quadrato di GF al quadrato di EF, inuertendo, AB ad AC [e] sarà come il quadrato di EF al quadrato di FG; e per la conuersione della propor- f tione, sarà il numero quadrato AB al numero quadrato BC, [f] come il g 9. del 10. quadrato di EF al quadrato di H: per la qual cosa le due EF, & H [g] sono commensurabili in lunghezza; e perciò il quadrato della composta EF supera il quadrato della congruente FG, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza alla composta EF; ed è, per costruttione, la congruente GF, commensurabile in lunghezza alla Rationale D; e per la seconda delle terze definitioni, la retta EG è quella, che si chiama seconda Apotome, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



PROBLEMA XXI. PROPOSITIONE LXXXVIII.

Ritrouare la terza Apotome.

Si trouino i due numeri AB, BC, come si disse nella propos. 86; poi si troui vn altro numero, per esempio I, il quale non sia al numero AB, ne meno al numero AC, come numero quadrato à numero quadrato; il che si farà col prendere il numero I vna, ò due vnità maggiore del numero AC, come si disse nella 51. propos. di questo. Oltre à ciò si esponga qualunque Rationale D, e si faccia, per il Corollario alla 6. propositione, si come il numero I al numero AB, così il quadrato della Rationale D al



qua-

quadrato di EF; saranno i quadrati di D, & EF, [a] commensurabili, e le a 6. del 10. rette D, & EF saranno commensurabili, almeno in potenza: ma la retta D è posta Rationale, sarà EF, [b] che gli è commensurabile in potenza, b 6. defin. del 10. Rationale. E perche il quadrato di D al quadrato di EF è come il numero I al numero AB; e, per costruttione il numero I al numero AB non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di D al quadrato di EF è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa le rette D, & EF, [c] sono incommensurabili in lunghezza. Di c 9. del 10. nuouo si faccia si come AB ad AC, così il quadrato di EF al quadrato di FG. Dico che EG è la terza Apotome. Perche il quadrato di EF al quadrato di FG è come il numero AB al numero AC, sarà il quadrato di EF commensurabile al quadrato di GF; [d] e perciò le rette EF, FG, sono d 24. del 10. commensurabili almeno in potenza: e perche EF fù dimostrata Rationale, ancora FG, che gli è commensurabile in potenza, [e] sarà Rationale. In e 6. de fin. del 10. oltre, essendo il quadrato di EF al quadrato di FG, come AB ad AC; ed i numeri AB, AC, per costruttione, non hanno la proportione de i numeri quadrati; ne meno i quadrati delle due EF, FG, hanno la proportione de i numeri quadrati; e perciò le rette EF, FG, [f] sono incommensu- f 9. del 10. rabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali, saranno dunque le due EF, FG Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propos. di questo, EG sarà Apotome, e la sua congruente sarà GF. Dico che EG è quella, che si chiama terza Apotome.

Perche il numero I al numero AB è come il quadrato di D al quadrato di EF; ed il numero AB al numero AC è come il quadrato di EF al quadrato di FG; per l'egualità, sarà il numero I al numero AC, [g] come g 22 del 5. il quadrato di D al quadrato di GF: ma il numero I al numero AC, per costruttione, non è come numero quadrato à numero quadrato; ne meno il quadrato di D al quadrato di GF è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual cosa i lati D, & GF, [h] sono incommensura- h 9. del 10. bili in lunghezza. Fù dimostrata EF incommensurabile in lunghezza alla medesima D, in conseguenza nessuna delle due EF, FG è commensurabile in lunghezza alla Rationale D. Dal quadrato di EF se ne detragga il quadrato di GF, ed il rimanente sia il quadrato di H. Si dimostri, come si fece nell'86. propositione di questo, che la retta H è commensurabile in lunghezza ad EF; e sarà il quadrato della composta EF maggiore del quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, commensurabile in lunghezza alla composta EF. E perche niuna delle due EF, GF, è commensurabile in lunghezza alla Rationale D; per la terza delle terze definitioni, la retta EG sarà quella, che si chiama terza Apotome, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

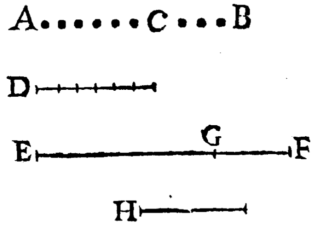
PROBLEMA XXII. PROPOSITIONE LXXXIX.

Ritrouare la quarta Apotome.

Per lo Scolio alla propositione 29. si trouino i due numeri, come AC, CB, in modo, che il loro aggregato AB non sia ad AC, ne meno à CB,

come

come numero quadrato à numero quadrato. Poi ſi eſponga la Rationale D, e ſi prenda EF, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per il che EF ſarà Rationale; e procedendoſi, come ſi fece nell'86. propoſitione, ſi prouerà, che EG è Apotome, la di cui congruente ſarà GF. Dico che EG è la quarta Apotome. Dal quadrato di EF[a] ſi detragga il quadrato di GF, ed il rimanente ſia il quadrato di H. Eſſendo AB ad AC come il quadrato di EF al quadrato di FG; per la conuerſione della proportione, ſarà AB à BC [b] come il quadrato di EF al quadrato di H: mà AB à BC non è come numero quadrato à numero quadrato, ne meno il quadrato di EF al quadrato di H è come numero quadrato à numero quadrato: per la qual coſa le rette EF, ed H [c] ſono incommenſurabili in lunghezza. Il quadrato dunque della compoſta EF ſupera il quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, incommenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; e la compoſta EF, per coſtruttione, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per la quarta delle terze definitioni, la retta EG ſarà quella, che ſi dice quarta Apotome, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



a Lem. dopo la prop. 14.

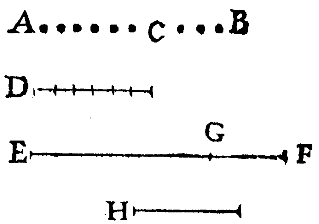
b Corol. alla 19. del 5.

c 9. del 10.

PROBLEMA XXIII. PROPOSITIONE XC.

Ritrouare la quinta Apotome.

Si trouino i due numeri AC, CB, come ſi fece nell'antecedente propoſitione; ſi eſponga la Rationale D, e ſi prenda FG, commenſurabile in lunghezza alla Rationale D. Nel reſto ſi proſeguiſca, come nell'87. propoſitione, e ſi dimoſtri, che EG è Apotome, la di cui congruente è GF. Dico che EG è quella, che ſi dice quinta Apotome. Dal quadrato di EF ſe ne detragga il quadrato di FG, ed il rimanente ſia il quadrato di H. Eſſendo AB ad AC come il quadrato di EF al quadrato di FG, per la conuerſione della proportione, ſarà AB à BC [a] come il quadrato di EF al quadrato di H: mà i numeri AB, BC non hanno la proportione de i numeri quadrati, ne meno i quadrati di EF, ed H, ſono come i numeri quadrati; e perciò le rette EF, ed H [b] ſono incommenſurabili in lunghezza. Per la qual coſa il quadrato della compoſta EF ſupera il quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, incommenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; e la congruente GF, per coſtruttione, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; e per la quinta delle terze definitioni, la retta EG è quella, che ſi chiama quinta Apotome, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.



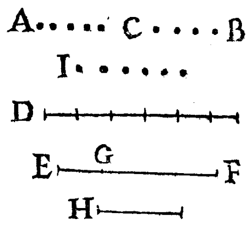
a Corol. alla 19. del 5.

b 9. del 10.

PROBLEMA XXIV. PROPOSITIONE XCI.

Ritrouare la ſeſta Apotome.

Per il Corollario ſecondo all'vltima propoſitione del nono Libro, ſi trouino due numeri come AC, CB, che non ſiano piani ſimili, e niuno ſia numero quadrato; ed il loro compoſto, cioè AB, non ſia numero quadrato, ne à ciaſcuno di loro habbia la proportione di numero quadrato à numero quadrato, cioè che AB non ſia ad AC, ne meno à BC, come numero quadrato à numero quadrato. Si prenda poi qualunque numero quadrato, per eſempio I, il quale non hauerà ad AC, ne meno ad AB, la proportione, che hà il numero quadrato al numero quadrato. Si eſponga poi qualunque Rationale D, ed il rimanente ſi faccia come nell'88. propoſitione di queſto; e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che le rette D, & EF, ſono incommenſurabili in lunghezza; e che EG è Apotome, la di cui congruente è GF. Dico che EG è quella, che ſi chiama ſeſta Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nella citata 88. propoſitione, che D è incommenſurabile in lunghezza alla retta GF; per la qual coſa neſſuna delle due EF, GF, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D: dal quadrato di EF ſe ne detragga il quadrato di GF, ed il rimanente ſia il quadrato di H; e ſi dimoſtri, come ſi fece nell'89. propoſitione, che H è incommenſurabile in lunghezza alla retta EF. Hor eſſendo il quadrato della compoſta EF maggiore del quadrato della congruente GF, per il quadrato della retta H, incommenſurabile in lunghezza alla compoſta EF; e niuna delle due EF, GF, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale D; per la ſeſta delle terze definitioni, la retta EG è ſeſto Binomio, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.



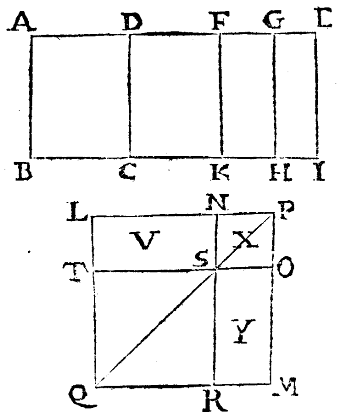
THEOREMA LXVIII. PROPOSITIONE XCII.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dalla prima Apotome, è Apotome.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla prima Apotome AD. Dico che la retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è Apotome. Sia DE la congruente dell'Apotome AD, per la definitione della prima Apotome, le due AE, DE, ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e tutta la compoſta AE ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato della compoſta AE ſupera il quadrato della congruente DE, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza alla medeſima AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F; ſarà il quadrato di DF, ouero di

a 10. del 1.

FE, [b] la quarta parte del quadrato di DE; sia poi per il primo Lemma dopo la propositione 17. di questo, applicato ad AE vn rettangolo vguale al quadrato di EF, che manchi à compire la linea per vna figura quadrata, e quel rettangolo sia quello, ch'è contenuto dalle due AG, GE, cioè sia diuisa AE, per il Lemma secondo dopo la citata 17. propositione, talmente in G, che il rettangolo contenuto dalle parti AG, GE sia vguale al quadrato di FE, cioè alla quarta parte del quadrato di DE. Perche il quadrato di AE supera il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza ad AE, per la 18. propositione di questo, le rette AG, GE, sono commensurabili in lunghezza; dal che tutto l'aggregato AE sarà tanto ad AG, come à GE, [c] cõmensurabile in lunghezza: mà AE è cõmensurabile in lunghezza alla Rationale AB; saranno le due AG, GE [d] commensurabili in lunghezza alla medesima Rationale AB; e perciò le due AG, GE, [e] sono Rationali. Da i punti F,G,E si tirino le rette FK, GH, EI [f] parallele ad AB, le quali cõcorreranno con la retta BC, continuata, come in K, H ed I; saranno le rette FK, GH, EI rationali; stante che ogn'vna è vguale alla Rationale AB: per la qual cosa i rettangoli AH, GI, che sono contenuti dalle rationali AG, AB, [g] & EG, GH, commensurabili in lunghezza, sono Rationali. In oltre perche DE è commensurabile solamente in potenza ad AE, le due DE, AE saranno incommensurabili in lunghezza: mà AE è commensurabile in lunghezza ad AB; sarà DE [h] incommensurabile in lunghezza alla medesima AB. E perche DE è commensurabile alla sua metà FE, ouero DF; sarà FE, ouero DF [K] incommensurabile in lunghezza ad AB: mà le due DF, FE sono rationali, stante che sono commensurabili alla Rationale DE; saranno le due DF, FE Rationali, ed ogn'vna sarà commensurabile solamente in potenza ad AB, ouero FK. Per la qual cosa i due rettangoli DK, FI, che sono contenuti da lati rationali, e commensurabili solamente in potenza, sono [l] Medij.



Si faccia il quadrato LM [m] vguale al rettangolo AH; e si faccia il quadrato NO vguale al rettangolo GI; i quadrati NO, LM, haueranno vn angolo commune, e perciò [n] sono intorno al medesimo diametro PQ. Si continui OS in T, ed il lato NS in R. Perche il rettangolo contenuto dalle due AG, GE, per costruttione, è vguale al quadrato di FE; sarà FE [o] media proportionale frà le due AG, GE; e sarà AG ad EF come EF ad EG: mà i rettangoli AH, IF, IG sono [p] come le basi AG, FE, EG; essendo le basi AG, FE, GE continue proportionali, saranno i rettangoli AH, FI, GI [q] continui proportionali, ed il rettangolo FI sarà Medio proportionale frà li due rettangoli AH, GI: furono fatti i quadrati LM,

b Scol. alla 4. del 2.
c 16. del 2.
d 12. del 10.
e 6. defin. del 10.
f 31. del 1.
g 20. del 10.
h 13. del 10.
K 13. del 10.
l 22 del 10.
m 14. del 2.
n 26. del 6.
o 17. del 6.
p 1. del 6.
q 11. del 5.

NO vguali à i rettangoli AH, GI; sarà il rettangolo FI Medio proportionale frà i quadrati LM, NO. E perche il rettangolo LO è Medio proportionale frà i medesimi quadrati LM,NO; in conseguenza il rettangolo LO sarà vguale al rettangolo FI: mà il rettãgolo FI è vguale al rettangolo DK, ed il rettangolo LO è vguale al rettangolo NM; sarà tutto il rettangolo DI vguale allo gnomone VXY, col quadrato di NO: leuatone vgualmente gli vguali, cioè il quadrato di NO, ed il rettangolo GI; resta il rettangolo DH vguale allo gnomone VXY; fù fatto, per costruttione, il rettangolo AH vguale al quadrato LM; sarà il rimanente rettangolo AC vguale al quadrato TR; e perciò il quadrato del lato TS sarà vguale al rettangolo AC. Dico che TS è quella retta, che chiamiamo Apotome.

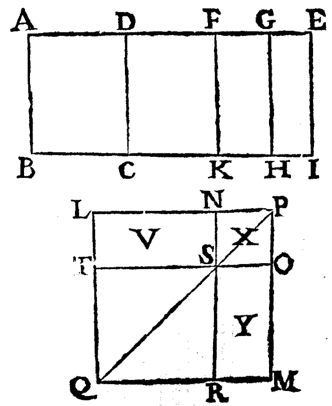
Perche i rettangoli AH,GI sono dimostrati Rationali, i quadrati LM, NO, che gli sono vguali, saranno Rationali, & i loro lati LP, NP, cioè TO, SO sono Rationali. In oltre perche il rettangolo FI è dimostrato Medio, il rettangolo LO, che gli è vguale, sarà ancora Medio, e perciò irrationale: ma il quadrato NO è Rationale; i rettangoli LO,NO saranno incommensurabili; e le rette TO, SO, [r] che sono come i rettangoli LO, NO, [f] saranno incommensurabili in lunghezza. Hor essendosi dimostrate le due TO, OS, Rationali, e incommensurabili in lunghezza, saranno le rette TO, SO, Rationali, e commensurabili solamente in potenza. Si che, detratta dalla Rationale TO la Rationale OS, commensurabile solamente in potenza à tutta OT, la rimanente TS, per la 74. di questo, sarà Apotome, ch'era da dimostrarsi.

r 1. del 6.
f 10. del 10.

THEOREMA LXIX. PROPOSITIONE XCIII.

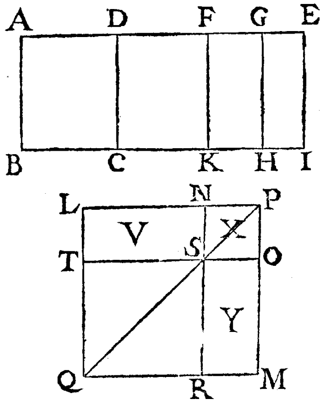
La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e dalla seconda Apotome, è la prima Apotome della Media.

Sia il rettangolo AC contenuto dalla Rationale AB, e dalla seconda Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che si chiama prima Apotome della Media. Sia DE la congruente della seconda Apotome AD; per la definitione della seconda Apotome, le rette AE,DE, saranno Rationali, commensurabili solamente in potenza; e la congruente DE sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato di AE supera il quadrato di ED, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla composta AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente della co-



a 10. del 1.

ſtruttione ſi faccia, come nell'antecedente propoſitione, e ſi dimoſtri, come iui ſi fece, che le parti AG, GE ſono commenſurabili in lunghezza; e che tutta AE è commenſurabile in lunghezza tanto ad AG, quanto à GE. Perche la congruente ED, per la natura dell'Apotome, è commenſurabile ſolamente in potenza alla compoſta AE, ſaranno le due AE, DE, incommenſurabili in lunghezza; ma DE è commenſurabile in lunghezza ad AB; ſarà AE [b] incommenſurabile in lunghezza alla medeſima AB; ma AE è dimoſtrata commenſurabile in lunghezza alle due AG, GE; ſaranno le due AG, GE, [c] incommenſurabili in lunghezza alla Rationale AB. E perche le due AG, GE ſono commẽſurabili ad AE, ch'è Rationale; ſaranno le due AG, GE [d] Rationali; ed in conſeguenza le due AG, GE ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza ad AB. Per la qual coſa i rettangoli AH, GI, contenuti dalle Rationali ſolamente in potenza, [e] ſono Medij. In oltre, perche DE è commenſurabile in lunghezza alla ſua metà DF, ouero FE, e la medeſima DE è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; le due DF, FE, [f] ſaranno commenſurabili in lunghezza alla Rationale AB, ouero FK, che gli è vguale; e perciò le due DF, FE, [g] ſono Rationali; ed i rettangoli DK, FI, che ſono contenuti da linee Rationali, e commenſurabili in lunghezza, ſono [h] Rationali. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è la prima Apotome della Media.



Perche le rette AG, GE, ſono commenſurabili in lunghezza, i rettangoli AH, GI, [K] che hanno la proportione di AG à GE, ſaranno [l] commenſurabili: ma i rettangoli AH, GI, ſono vguali à i quadrati LM, NO; i medeſimi quadrati LM, NO, ſaranno commenſurabili, ed i loro lati LP, NP, ouero TO, OS, ſono commenſurabili almeno in potenza. Di più perche i rettangoli AH, GI, ſono ſtati dimoſtrati Medij, i quadrati LM, NO, che gli ſono vguali, ſarannno Medij, ed i loro lati LP, PN, ouero TO, OS, ſono Medie, commenſurabili almeno in potenza. Oltre à ciò, eſſendoſi dimoſtrato il rettangolo FI Rationale, e, per quel che ſi diſſe nell'antecedente propoſitione, è vguale al rettangolo LO; ſarà il rettangolo LO Rationale: ma il quadrato NO è dimoſtrato Medio, ſarà il Rationale LO incommenſurabile all'irrationale NO; ed i lati TO, OS, [m] che ſono come i rettangoli LO, NO, ſaranno [n] incommenſurabili in lunghezza: furono dimoſtrati i lati TO, OS Medie, e commenſurabili in potenza; ſaranno dunque le rette TO, OS Medie, commenſurabili ſolamente in potenza, le quali contengono il Rationale LO (ſtante che PO è vguale ad OS) e per la 75. propoſitione, detratta dalla Media OT la

b 13. del 10.
c 13. del 10.
d 6. defin. del 10.
e 22. del 10.
f 12. del 10.
g 6. defini del 10.
h 20. del 10.
K 1. del 6.
l 10. del 10.
m 1. del 6.
n 10. del 10.

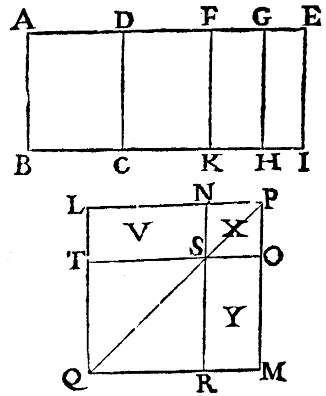
Media

Media OS, commenſurabile ſolamente in potenza ad OT, la rimanente TS ſarà la prima Apotome della Media, il che era da dimoſtrarſi.

THEOREMA LXX. PROPOSITIONE XCIV.

La retta linea, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dalla terza Apotome, ſarà la ſeconda Apotome della Media.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla terza Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, ſarà quella, che ſi chiama ſeconda Apotome della Media. Sia DE la congruente della terza Apotome AD, per la definitione della terza Apotome, le rette AE, DE ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e niuna delle due AE, DE, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale AB; ed il quadrato della compoſta AE ſupera il quadrato della congruente DE, per il quadrato d'vna retta, commenſurabile in lunghezza ad eſſa compoſta AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, e ſi faccia il reſtante della coſtruttione, come nella 92. propoſitione di queſto; e, come iui ſi fece, ſi dimoſtri, che le rette AG, GE, ſono commenſurabili frà loro in lunghezza; dal che l'aggregato AE ſarà commenſurabile in lunghezza [b] tanto ad AG, quanto ad EG: ma la retta AE, per ipoteſi, è incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AB: le due dunque AG, GE, [c] ſono incommenſurabili in lunghezza ad AB. E perche le medeſime AG, GE, ſono commenſurabili ad AE, ch'è Rationale; ſaranno ancora loro [d] Rationali. Per la qual coſa tanto le due BA, AG, quanto le due BA, GE, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e perciò i rettangoli AH, GI, contenuti da eſſe, [e] ſaranno Medij. In oltre perche la Rationale DE è commenſurahile in lunghezza alla ſua metà DF, ouero FE; e la medeſima DE, per ipoteſi, è incommenſurabile in lunghezza ad AB; le due DF, FE, [f] ſaranno Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza alla Rationale AB: dal che tanto le due BA, DF, quanto le due BA, FE, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza. Per la qual coſa i rettangoli DK, FI, [g] contenuti da eſſe, ſono Medij. Si dimoſtri poi, come ſi fece nella propoſitione 92. che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è la ſeconda Apotome della Media.



Perche i rettangoli AH, GI, per quel che ſi è dimoſtrato, ſono Medij, perciò i quadrati LM, NO, che gli ſono vguali, ſaranno Medij, ed i lo-

a 10. del 1.
b 16. del 10.
c 14. del 10.
d 6. defin. del 10.
e 22. del 10.
f 14. del 10.
g 22. del 10.

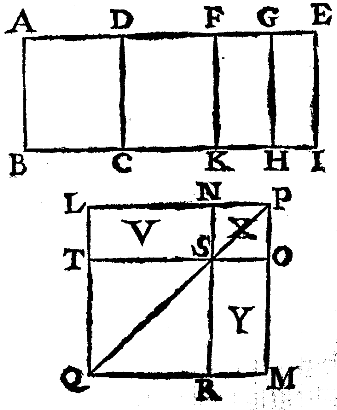
ro

ro lati LP, NP, ouero TO, OS, sono Medie. Di nuouo, essendosi dimostrate le rette AG, GE, commensurabili in lunghezza, i rettangoli AH,
h 1.del 6. GI, [h] che sono come AG, à GE, saranno [K] commensurabili, ed i quadra-
K 10.del 10 ti LM, NO, che gli sono vguali, sono commensurabili; dal che i lati LP, PN, ouero TO, OS, sono commensurabili, almeno in potenza. Oltre à ciò, essendo, per ipotesi, ED commensurabile solamente in potenza ad AE, le due AE, ED, saranno incommensurabili in lunghezza: ma la
l 14.del 10. retta AE è dimostrata commensurabile in lunghezza ad EG, sarà DE [l] incommensurabile in lunghezza ad EG: ma DE è commensurabile in lunghezza alla sua metà FE; le due FE, EG, [m] saranno incommensura-
m 15.del 10
n 1.del 6. bili in lunghezza, ed i rettangoli FI, GI, [n] che sono come le rette FE,
o 10.del 10. GE, saranno [o] incommensurabili. E perche i rettangoli FI, GI, sono
p 1.del 6. vguali à i rettangoli LO, NO; i rettangoli dunque LO, NO, sono incommensurabili, e le rette TO, OS, [p] che sono come i rettangoli LO, NO,
q 10.del 10. saranno [q] incommensurabili in lunghezza: furono dimostrate Medie, e commensurabili in potenza; saranno dunque le rette TO, OS, Medie, commensurabili solamente in potenza. Finalmente, essendosi dimostrato il rettangolo FI esser Medio, sarà il rettangolo LO, che gli è vguale, Medio. Hor essendo le due TO, OS, Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengono il rettangolo RO Medio, per la 76. propos. di questo, detratta dalla Media OT la Media OS, la rimanente TS sarà la seconda Apotome della Media, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LXXI. PROPOSITIONE XCV.

La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dall'Apotome quarta, è quella, che si chiama Minore.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla quarta Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che si chiama Minore. Sia DE la congruente della quarta Apotome AD, per la definitione della quarta Apotome, le rette AE, DE, sono Rationali, commensurabili solamente in potenza; e la retta AE è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB; ed il quadrato di AE supera il quadrato della congruente DE, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza all'istessa AE. Si
a 1.del 10. diuida DE [a] in due parti vguali in F, si applichi ad AE il rettangolo contenuto dalle due AG, GE, vguale al quadrato di FE, cioè vguale alla quarta parte del quadrato di DE, che manchi à compire la linea, per vna figura quadrata; e da tale applicatione sia diuisa



la retta AE in G; perche il quadrato di AE supera il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla medesima AE, per la 19. propositione di questo, le parti AG, GE, sono incommensurabili in lunghezza. Il restante della costruttione si faccia come nella 92. propositione di questo. Perche AE, per la natura della quarta Apotome, è Rationale, ed è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB, il rettangolo AI, contenuto da esse, [b] sarà Rationale. Similmente, essen- b 20.del 10.
do DE, per l'istessa ragione, Rationale, ed è incommensurabile in lunghezza ad AB; saranno le due AB, DE, Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e perciò il rettangolo DI, contenuto dalle due AB, DE, [c] sarà Medio. In oltre, essendo le due AG, GE, incommensurabili c 22.del 10.
in lunghezza, ed il rettangolo AH al rettangolo GI [d] è come AG, à GE; d 1.del 6.
i rettangoli AH, GI, [e] saranno incommensurabili. Si dimostri poi, come e 10.del 10.
si fece nella 92. di questo, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è la Minore.

Per costruttione il rettangolo AI è vguale à i quadrati LM, NO, cioè vguale all'aggregato de i quadrati di LP, PN, ouero di TO, OS: ma il rettangolo AI è dimostrato Rationale; l'aggregato dũque de i quadrati di TO, OS, sarà Rationale. Di nuouo, perche il rettangolo DI è dimostrato Medio, il doppio rettangolo LO, cioè il doppio rettangolo contenuto dalle due TO, OS, che gli è vguale, sarà ancora Medio. Finalmente perche i rettangoli AH, GI sono dimostrati incommensurabili, i quadrati LM, NO, che gli sono vguali, saranno incommensurabili, ed i loro lati LP, PN, ouero TO, OS sono incommensurabili in potenza. E perche l'aggregato de i loro quadrati è dimostrato Rationale, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime TO, OS, è Medio, per la 77. propositione di questo, la retta TS è quella, che si chiama Minore, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LXXII. PROPOSITIONE XCVI.

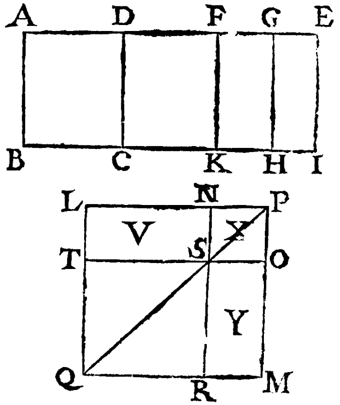
La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale, e dalla quinta Apotome, è quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla quinta Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che si dice col Rationale fà il tutto Medio. Sia DE la congruente della quinta Apotome AD; per la defin. della quinta Apotome, le rette AE, DE sono Rationali, commensurabili solamente in potenza; e la congruente DE è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato di AE supera il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile alla medesima AE. Si diuida DE [a] a 10.del 6.
in due parti vguali in F, ed il rimanente si costruisca, come nell'altre; e per quel che si è dimostrato nell'antecedente propositione, le due AG, GE sono incommensurabili in lunghezza. E perche AE è Rationale,

ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB, sarà, come fù dimostrato alla 93. propositione, il rettangolo AI Medio. In oltre, perche DE è Rationale, ed è commensurabile in lunghezza alla Rationale AB; sarà il rettangolo DI [b] Rationale. Si proui, come si fece nell'antecedente propositione, che i due rettangoli AH, GI, sono incommensurabili; e si dimostri, come nella 92. propositione, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che TS è quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

b 20.del 10.

Essendosi dimostrato, che il rettangolo AI è Medio, l'aggregato de i quadrati LM, NO, che gli è vguale, sarà Medio; cioè l'aggregato de i quadrati de i lati LP, PN, ouero TO, OS, è Medio. Parimente, essendosi dimostrato il rettangolo DI Rationale, sarà il doppio rettãgolo LO, che gli è vguale, Rationale: ma il rettangolo LO è contenuto dalle due rette TO, OS, (stante che OS è vguale ad OP) sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due TO, OS, Rationale. Si mostri, come si fece nell'antecedente propositione, che le due TO, OS sono incommensurabili in potenza; ed haueremo le due rette TO, OS, incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati è Medio, & il doppio rettangolo, da loro contenuto, è Rationale, per la 78. propositione di questo, sarà la rimanente TS quella, che col Rationale fà il tutto Medio, come fù proposto dimostrare.



THEOREMA LXXIII. PROPOSITIONE XCVII.

La retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo, contenuto dalla Rationale, e della sesta Apotome, è quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Sia il rettangolo AC, contenuto dalla Rationale AB, e dalla sesta Apotome AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AC, è quella, che col Medio fà il tutto Medio. Sia DE la congruente della sesta Apotome AD, per la definitione di detta Apotome, le rette AE, DE, saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e niuna delle due AE, DE, sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale AB, ed il quadrato di AE sarà maggiore del quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, incommensurabile in lunghezza alla composta AE. Si diuida DE [a] in due parti vguali in F, ed il rimanente si costruisca, come si fece nell'antecedenti propositioni; saranno le due AG, GE, come fù dimostrato nella 95. propositione frà di loro incommensu-

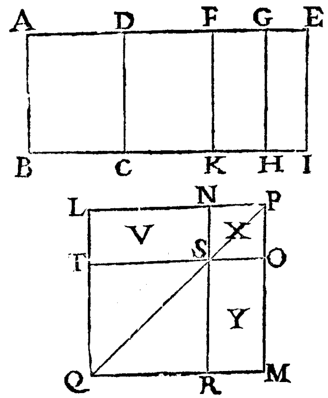
a 10. del 1.

rabili: per la qual cosa i rettangoli AH, GI, che sono come le basi AG, GE, saranno incommensurabili. Di nuouo, perche le due AE, ED sono Rationali, ed ogn'vna è incommensurabile in lunghezza alla Rationale AB; tanto le due AB, AE, quanto le due AB, DE sono Rationali, & commensurabili solamente in potenza. Per la qual cosa i rettangoli AI, DI, [b] sono Medij. Di più, essendo, per ipotesi, le due AE, DE, commensurabili solamente in potenza, cioè incommensurabili in lunghezza, i rettangoli AI, DI, che sono [c] come le basi AE, DE; saranno [d] frà loro incommensurabili. Si dimostri, come si fece nella 92. propositione, che il quadrato di TS è vguale al rettangolo AC. Dico che la retta TS è quella, che col Medio fà il tutto Medio.

b 22.del 10.

c 1.del 6.

d 10.del 10.



Essendo AI per quel che si è dimostrato, Medio, ed il rettangolo AI, è vguale all'aggregato de i quadrati LM, NO, cioè all'aggregato de i quadrati de i lati LP, PN, ouero TO, OS; l'aggregato de i quadrati delle rette TO, OS, sarà ancora Medio. In oltre, perche DI è vguale al doppio rettangolo LO, cioè al doppio rettangolo, contenuto dalle due TO, OS, ed il rettangolo DI è dimostrato Medio; sarà il doppio rettangolo, contenuto dalle rette TO, OS, Medio. Di più, essendosi dimostrato DI incommensurabile al rettangolo AI, sarà il doppio rettangolo, contenuto dalle due TO, OS, incommensurabile all'aggregato de i quadrati di TO, OS. Finalmente si dimostri, come si fece nella propositione 95. che le rette TO, SO, sono incommensurabili in potenza; ed haueremo le rette TO, SO, incommensurabili in potenza; l'aggregato de loro quadrati è Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, è ancora Medio, ed è incommensurabile all'aggregato de i loro quadrati, e per la 79. propositione, la rimanente TS è quella, che col Medio fà il tutto Medio, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LXXIV. PROPOSITIONE XCVIII.

Applicando il quadrato dell'Apotome alla Rationale, l'altro lato, che ne risulta, è prima Apotome.

Sia l'Apotome AB, e la sua congruente BC, in modo, che le due AC, BC, siano Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e sia esposta qualunque Rationale DE, alla quale si applichi [a] il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che DG è pri-

a 45.del 1.

b 45.del 1. ma Apotome. Si applichi di nuouo alla Rationale DE [b] il rettangolo DH, vguale al quadrato di AC, ed al lato IH si applichi il rettangolo IK vguale al quadrato di B C, in modo, che tutto il rettangolo D K sia vguale all'aggregato de i quadrati delle due AC, CB. E perche l'aggregato de i quadrati delle rette AC, CB, cioè il rettangolo DK, è vguale [c] al
c 7.del 2. doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, col quadrato di AB; leuatone il quadrato di AB, cioè il rettangolo DF, resta il rettangolo GK vguale al doppio rettangolo delle due AC, CB. Si che diuisa GL, [d] in due parti vguali in
d 10.del 1. e 31.del 1. M, e tirata dal punto M [e] la retta MN, parallela ad ED, ogn'vno de i rettangoli GN, MK, [f] sarà vguale al rettangolo contenuto dalle due AC, CB. Di nuouo, perche le due AC, BC, sono Rationali, i loro quadrati saranno ancora [g] Rationali, e perciò commensurabili frà di loro; ed il loro aggregato; cioè l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [h] sarà commensurabile tanto al quadrato di AB, quanto al quadrato di BC: ma i quadrati di AC, CB, sono, per quel che si è detto, Rationali; sarà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, Rationale; il quale, applicato alla Rationale DE, fà il lato DL [K] Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale DE. E perche le due AC, C B, per ipotesi, sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; il rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, sarà Medio, & il doppio rettangolo delle due AC, CB, che gli è commensurabile, sarà ancora Medio; ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, è vguale al rettangolo GK; il rettangolo dunque GK sarà Medio, il quale, applicato alla Rationale GF, ouero DE, [l] fà il laro GL Rationale, ed incommensurabile in lunghezza alla Rationale GF, ouero DE. E perche GK è irrationale, cioè è Medio, ed il rettangolo DK è dimostrato Rationale; sarà il rettangolo DK incommensurabile al rettangolo GK; e le rette DL, LG, [m] che sono come i rettangoli DK, GK, sono [n] incommensurabili in lunghezza; le quali, essendo state dimostrate Rationali, saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e, per la 74. propositione di questo, la rimanente DG sarà Apotome. Dico che è prima Apotome.

f 36.del 1.

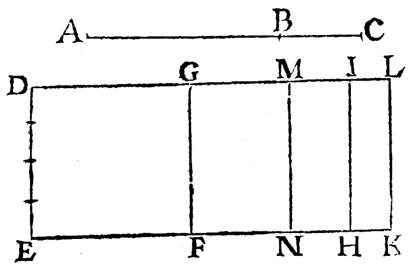
g 8. defin. del 10.

h 16.del 10.

K 21.del 10.

l 23. del 10.

m 1.del 6. n 10. del 10.



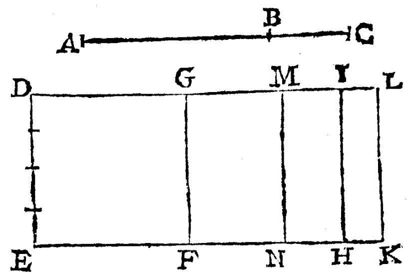
Per l'vltimo Coroll. alla 1. propos. del 6. Libro, il rettangolo contenuto dalle due AC, BC, cioè il rettangolo MK, è Medio proportionale frà i quadrati delle due AC, BC, ed i quadrati delle due AC, BC sono vguali à i rettangoli DH, IK; sarà il rettangolo MK Medio proportionale frà i due rettangoli DH, IK; e sarà il rettangolo DH al rettangolo MK, come il medesimo rettangolo MK al rettangolo IK; ma questi rettangoli
o 1. del 6. sono [o] come le rette DI, LM, LI; saranno le rette DI, LM, LI, continue
p 17.del 6. proportionali; ed il rettangolo contenuto dalle estreme DI, LI, [p] sarà

vguale al quadrato di ML. Si è dunque ad LD applicato il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, vguale al quadrato di ML, cioè vguale alla quarta parte del quadrato di GL, e manca à compire la linea per il quadrato di IL. In oltre, perche i quadrati delle due AC, BC, sono commensurabili, saranno i rettangoli DH, IK, che gli sono vguali, frà di loro commensurabili, ed i lati DI, IL, che sono [q] come i rettangoli DH, q 1. del 6.
IK, saranno [r] commensurabili in lunghezza. Hor essendo le rette DL, r 10.del 10.
GL, ineguali, ed alla maggiore DL si è applicato il rettangolo contenuto dalle rette DI, IL, vguale alla quarta parte del quadrato della minore GL, e gli manca à compire la linea per il quadrato di IL; essendo le parti DI, IL, commensurabili in lunghezza; per la 18. propositione di questo, il quadrato di DL superarà il quadrato della congruente GL, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza alla composta DL; ed è la composta DL commensurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la prima delle terze definitioni, sarà DG prima Apotome, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LXXV. PROPOSITIONE XCIX.

Applicando alla Rationale il quadrato della prima Apotome della Media; l'altro lato, che ne risulta, sarà la seconda Apotome.

Sia AB la prima Apotome della Media, e la sua congruente sia BC, in modo, che le due AC, BC, siano Medie, commensurabili solamente in potenza, le quali contengano vn rettangolo Rationale. Si esponga qualunque Rationale DE, alla quale s'applichi [a] il rettangolo DF, vguale al a 45.del 1.
quadrato di AB, e ne risulti il lato DG. Dico che DG è seconda Apotome. Si faccia la medesima costruttione dell' antecedente propositione, in modo, che i rettangoli DH, IK, siano vguali à i quadrati di AC, CB, ed il rettangolo GK vguale al doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, BC, e la metà, cioè il rettangolo MK, vguale al semplice rettangolo delle due AC, CB.



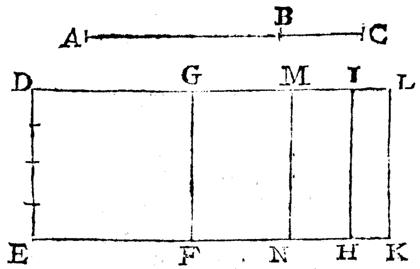
Perche le due AC, CB, sono Medie, commensurabili solamente in potenza, i loro quadrati, cioè i rettangoli DH, IK, che gli sono vguali, saranno Medij, frà di loro commensurabili; dal che il loro aggregato DK [b] sarà commensurabile all'vno, ed b 16.del 10.
all'altro; e perciò DK [c] sarà Medio, il quale, applicato alla Rationale c Corol. alla 24.del 10.
DE, fà l'altro lato DL [d] Rationale, ed incommensurabile in lunghezza d 23.del 10.
alla Rationale DE. Di nuouo, perche il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, è Rationale, il doppio rettangolo delle medesime AC, CB, cioè

il rettangolo GK, farà Rationale, il quale applicato alla Rationale GF,
e 21.del 10. ouero DE, [e] fà il lato GL Rationale, e commenfurabile in lunghezza alla Rationale DE. E perche DK è irrationale, cioè Medio, ed il rettangolo GK è Rationale; i rettangoli DK, GK, faranno incommenfurabili:
f 1.del 6. ma i rettangoli DK,GK,[f] fono come le bafi DL,GL;faranno le rette DL,
g 10.del 10. GL, [g] incommenfurabili in lunghezza: furono dimoftrate Rationali,perciò le rette DL, GL, faranno Rationali, commenfurabili folamente in potenza; e per la 74. propofitione di quefto, la rimanente DG farà Apotome; la di cui congruente farà GL. Dico che DG è feconda Apotome. Si dimoftri, come fi fece nell'antecedente propofitione, che il quadrato di DL fupera il quadrato di GL, per il quadrato d'vna retta, commenfurabile in lunghezza alla medefima DL. E perche fi è dimoftrato, che la congruente GL è commenfurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la feconda delle terze defin.DG, farà feconda Apotome, ch'era da dimoftrarfi.

THEOREMA LXXVI. PROPOSITIONE C.

Applicando alla Rationale il quadrato della feconda Apotome della Media, l'altro lato, che ne rifulta, è terza Apotome.

Sia AB la feconda Apotome della Media, la di cui congruente fia BC, in modo, che le due AC, CB, fiano Medie, commenfurabili folamente in potenza, e che contengano vn rettangolo Medio. Si efponga qualun-
a 45. del 1. que Rationale DE, alla quale fia applicato [a] il rettangolo DF, vguale al quadrato di AB, e ne rifulti il lato DG. Dico che DG è terza Apotome. Si faccia la medefima coftruttione, che fi è fatta nelle antecedenti, e fi dimoftri, come nella precedente propofitione, che il rettangolo DK è Medio, il quale, applicato alla Rationale
b 23.del 10. DE, [b] fà il lato DL Rationale, ed incommenfurabile in lunghezza ad ED. E perche



il rettangolo contenuto dalle due AC,CB, per ipotefi, è Medio, il doppio rettangolo delle medefime AC,CB, cioè il rettangolo GK, farà Me-
c 23.del 10. dio; il quale, applicato alla Rationale GF, ouero DE, fà il lato GL [c] Rationale, ed incommenfurabile in lunghezza alla Rationale DE. Prefe AC, BC, come bafi di due rettangoli, e l'altezza commune fia AC;
d 1.del 6. farà il quadrato di AC al rettangolo delle due AC, CB, [d] come AC à CB: ma, per ipotefi, le due AC, CB, fono incommenfurabili in lun-
e 10.del 10. ghezza; farà il quadrato di AC [e] incommenfurabile al rettangolo conte-

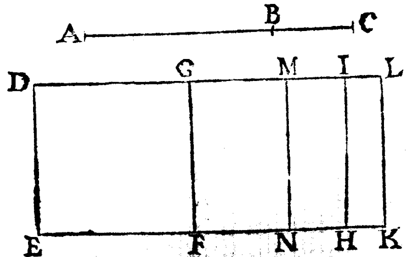
nuto

nuto dalle due AC, CB. In oltre, perche le rette AC, CB, fono, per ipotefi, commenfurabili in potenza, i loro quadrati faranno frà loro commenfurabili; e l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [f] farà commen- f 16.del 10.
furabile al quadrato di AC: ma il quadrato di AC è dimoftrato incommenfurabile al rettangolo delle due AC, CB; farà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, [g] incommenfurabile al rettangolo delle medefime AC, g 14.del 10.
CB. E perche il rettangolo delle due AC, CB, è commenfurabile al fuo doppio, cioè al doppio rettangolo delle medefime AC,BC; farà l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, [h] incommenfura- h 14.del 10.
bile al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo GK: fono i rettangoli DK, GK, [K] come le bafi DL, LG; faranno le rette DL, K 1.del 6.
LG, [l] incommenfurabili in lunghezza; e perche furono dimoftrate Ra- l 10. del 10.
tionali, le due dunque DL, GL, fono Rationali, e commenfurabili folamente in potenza, e per la 74. propofitione, la rimanente DG farà Apotome, la di cui congruente farà GL. Dico che DG è terza Apotome. Si dimoftri, come fi fece nella propofitione 98, che il quadrato di DL fupera il quadrato di GL, per il quadrato d'vna retta, commenfurabile in lunghezza alla compofta DL. Perche neffuna delle due DL, GL, per quel che fi è dimoftrato, è commenfurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la terza delle terze definitioni, farà DG quella, che fi chiama terza Apotome, ch'era da dimoftrarfi.

THEOREMA LXXVII. PROPOSITIONE CI.

Applicando alla Rationale il quadrato della Minore, il lato, che ne rifulta, farà quarta Apotome.

Sia la minore AB, e la fua congruente BC, in modo, che le due AC, CB, fiano incommenfurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati fia Rationale, & il doppio rettangolo contenuto dalle medefime AC, CB, fia Medio; e fia efpofta qualunque Rationale DE, alla quale fia applicato il rettangolo DF, [a] vguale al quadrato della minore AB, e ne ri- a 45.del 5.
fulti il lato DG. Dico che DG è la quarta Apotome. Si faccia la medefima coftruttione, come nell'altre del medefimo Senario. Perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, per ipotefi, è Rationale, applicato alla Rationale DE, [b] fà l'altro lato b 21.del 10.
DL Rationale, e commenfurabile in lunghezza alla Rationale DE. Di nuouo, perche il doppio rettangolo contenuto dalle due AC,CB, cioè



GK, è Medio, applicato alla Rationale GF, ouero DE, fà l'altro lato GL [c] c 23.del 10.

Ratio-

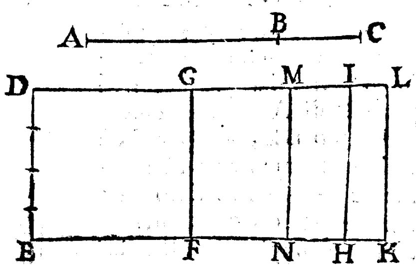
Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. In oltre, perche DK è Rationale, ed il rettangolo GK è irrationale, cioè Medio, i rettangoli DK, GK, ſaranno frà loro incommenſurabili: ma i rettangoli DK, GK, [d] ſono come le baſi DL, GL; ſaranno le rette DL,GL,[e] incommenſurabili in lunghezza; e perche le medeſime DL, GL, furono dimoſtrate Rationali, le due dunque DL, GL, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 74. propoſitione, la rimanente DG ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà GL. Dico che DG è quarta Apotome. Perche le due AC, BC, per ipoteſi, ſono incommenſurabili in potenza, ſaranno i loro quadrati, cioè i rettangoli DH, IK, incommenſurabili: ma i rettangoli DH, IK, [f] ſono come le baſi DI, IL, le rette DI, IL [g] ſaranno incommenſurabili in lunghezza. E perche il rettangolo contenuto dalle medeſime DI,IL,è vguale al quadrato di ML, come fù dimoſtrato nella 98.propoſ., ſarà applicato alla retta DL il rettangolo contenuto dalle due DI, IL, vguale al quadrato di ML, cioè vguale alla quarta parte del quadrato di GL, e manca à compire la linea per il quadrato di LI. E perche le rette DI, IL, ſono ſtate dimoſtrate incommenſurabili in lunghezza, per la 19. propoſ. di queſto, il quadrato della compoſta DL ſupera il quadrato della congruente GL, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza alla compoſta DL; e fù dimoſtrata la compoſta DL commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE; per la quarta delle terze defin. ſarà DG la quarta Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

d 1. del 6.
e 10. del 10.
f 1. del 6.
g 10. del 19.

THEOREMA LXXVIII. PROPOSITIONE CII.

Applicando alla Rationale il quadrato di quella, che col Rationale fà il tutto Medio, l'altro lato, che ne riſulta, ſarà la quinta Apotome.

Sia AB quella retta, che col Rationale fà il tutto Medio,la di cui congruente ſia BC, in modo, che le due AC, CB ſiano incommenſurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati ſia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB, ſia Rationale: ſi eſponga qualunque Rationale DE, alla quale ſia applicato il rettangolo DF, [a] vguale al quadrato di AB, che ne riſulti il lato DG. Dico che DG è la quinta Apotome. Sia fatta la medeſima coſtruttione, che ſi è fatta nell'altre del medeſimo Senario. Perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, è Medio, applicato alla Rationale DE, l'altro lato DL [b] ſarà Rationale, ed incommenſurabile



a 45. del 1.
b 23. del 10.

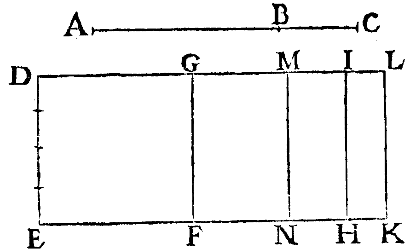
bile in lunghezza alla Rationale DE. Di più perche il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB, cioè il rettangolo GK, è Rationale, applicato alla Rationale DE, l'altro lato GL [c] ſarà Rationale, e commenſurabile in lunghezza, alla Rationale DE. Hor eſſendo DK irrationale, cioè Medio, ed il rettangolo GK è Rationale, i rettangoli DK, GK, ſaranno incommenſurabili: ma i rettangoli DK, GK, [d] ſono come le baſi DL, GL; ſaranno le rette DL, GL, [e] incommenſurabili in lunghezza, le quali eſſendo ſtate dimoſtrate Rationali, ſaranno Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74.propoſitione, la retta DG ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà GL.Dico che DG è quinta Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che il quadrato di DL è maggiore del quadrato di GL, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza alla compoſta DL. Eſſendoſi dimoſtrato, che la congruente GL è commenſurabile in lunghezza alla Rationale DE, per la quinta delle terze definitioni, la retta DG ſarà quella, che ſi dice quinta Apotome, come fù propoſto dimoſtrare.

c 23. del 10
d 1. del 6.
e 10. del 10.

THEOREMA LXXIX. PROPOSITIONE CIII.

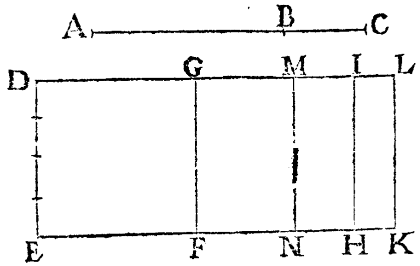
Applicando alla Rationale il quadrato di quella retta, che col Medio fà il tutto Medio; l'altro lato, che ne riſulta, ſarà la ſeſta Apotome.

Sia AB quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, la di cui congruente ſia BC, in modo, che le due AC,CB, ſiano incommenſurabili in potenza, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, ſia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB, ſia Medio, incommenſurabile all'aggregato de i quadrati di AC, CB. Sia eſpoſta qualunque Rationale DE, alla quale ſia applicato il rettangolo DF [a] vguale al quadrato di AB, e ne riſulti il lato DG. Dico che DG è la ſeſta Apotome. Si faccia la medeſima coſtruttione delle altre del medeſimo Senario. Perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, cioè il rettangolo DK, è Medio, applicato alla Rationale DE, fà l'altro lato DL [b] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. Similmente,perche il doppio rettangolo contenuto dalle due AC,CB, cioè il rettangolo GK, è Medio, applicato alla Rationale DE, fà il lato DL [c] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale DE. E perche l'aggregato de i quadrati di AC,CB, cioè il rettangolo DK, è incommenſurabile, per ipoteſi, al doppio rettangolo delle due AC, CB, cioè al rettangolo



a 45. del 1.
b 23. del 10.
c 23. del 10.

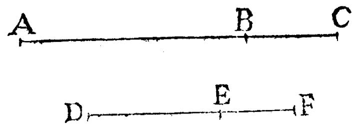
d 1.del 6. GK, ed i rettangoli DK, GK [d] ſono come le baſi DL, LG; ſaranno le
e 10.del 10. rette DL,LG, [e] incommenſurabili in lunghezza: ma le medeſime DL, LG ſono ſtate dimoſtrate Rationali, ſaranno le due DL, LG Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione, la rimanente DG ſarà Apotome. Dico che è ſeſta Apotome. Si dimoſtri, come ſi fece nella 101. propoſitione, che il quadrato di DL ſupera il quadrato della congruẽte GL, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile alla compoſta DL. E perche le due DL,GL, ſono ſtate dimoſtrate incommenſurabili in lunghezza alla Rationale DE; per la ſeſta delle terze definitioni, la retta DG ſarà la ſeſta Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.



THEOREMA LXXX. PROPOSITIONE CIV.

La retta linea, ch'è commenſurabile in lunghezza all'Apotome, è Apotome del medeſimo ordine.

Sia l'Apotome AB, la di cui congruente BC, in modo, che le due AC,BC, ſiano Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e ſia la retta DE commenſurabile in lunghezza ad AB. Dico che DE è Apotome del medeſimo ordine dell'Apotome AB. Si faccia ſi come AB à
a 12. del 6. DE, [a] così BC ad EF, ſarà tutta AC
b 12.del 5. à tutta DF, [b] come AB à DE, ouero come BC ad EF. E perche le due
c 10. del 10. AB,DE ſono, per ipoteſi, commenſurabili in lunghezza, ſarà AC [c] commenſurabile in lunghezza à DF, e ſarà BC commenſurabile in lunghezza ad EF: ma le due AC, BC, per ipoteſi, ſono Rationali; ſaranno le due
d 6. defin. del 10. DF,FE, che gli ſono commenſurabili, [d] ancora Rationali; e perche le due AC,CB, ſono commenſurabili ſolamente in potenza, le due ancora DF, EF, per lo Scolio alla 10. propoſitione, ſaranno commenſurabili in potenza: per la qual coſa le due DF,FE, ſono Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza, e per la 74. propoſitione, la rimanente DE ſarà Apotome. Dico che è del medeſimo ordine dell'Apotome AB. E prima ſia il quadrato di AC maggiore del quadrato di BC, per il quadrato d'vna retta linea, commenſurabile in lunghezza ad AC. Perche AC à CB è come DF ad FE, per la 15. propoſitione, ancora il quadrato di DF ſuperarà il quadrato di FE, per il quadrato d'vna retta commenſurabile in lunghezza alla retta DF. Se dunque AC è commenſurabile in lunghezza à qualche Rationale, in modo, che AB ſia prima Apotome; eſ-



ſendo

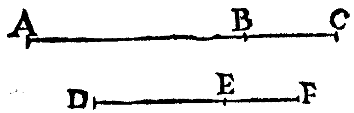
ſendo DF, commenſurabile in lunghezza ad AC, ſarà ancora DF [e] com- e 10.del 10.
menſurabile in lunghezza alla medeſima Rationale, e per la prima delle terze definitioni, la retta DE ſarà prima Apotome, cioè del medeſimo ordine dell'Apotome AB. Se poi BC ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale, ſarà nell'iſteſſo modo EF commenſurabile in lunghezza alla medeſima Rationale; ed ambedue AB,DE, ſaranno ſeconde Apotome. E ſe neſſuna delle due AC,CB, ſarà commenſurabile in lunghezza alla Rationale, ne meno alcuna delle due DF, FE, ſarà commenſurabile in lunghezza alla medeſima Rationale: per la qual coſa le due AB, DE, ſaranno terze Apotome.

Finalmente ſia il quadrato di AC maggiore del quadrato di CB, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza ad AC, per la 15. propoſitione, il quadrato di DF ſarà maggiore del quadrato di EF, per il quadrato d'vna retta, incommenſurabile in lunghezza alla medeſima DF; e perciò, come prima, ſe AB è quarta, ò quinta, ò ſeſta Apotome, ancora DE ſarà quarta, quinta, ò ſeſta Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA LXXXI. PROPOSITIONE CV.

La retta linea, ch'è commenſurabile all'Apotome della Media, è ancor eſſa Apotome della Media, e del medeſimo ordine.

Sia qualunque Apotome della Media AB, la di cui congruente ſia BC, in modo, che le due AC,BC, ſiano Medie, commenſurabili ſolamente in potenza; e ſia DE commenſurabile ad AB, ò in lunghezza, e potenza, ouero ſolamente in potenza. Dico che la retta DE è Apotome della Media, e del medeſimo ordine. Si faccia, come prima, ſi come AB à DE, [a] a 12.del 6.
così BC ad EF; ſarà tutta AC à DF, [b] come AB à DE, è come BC ad b 11.del 5.
EF. Perche le due AB, DE, per ipoteſi, ſono commenſurabili ò in lunghezza, e potenza, ò in potenza ſolamente; ſaranno le due AC,DF, [c] e c 10.del 10.
le due ancora BC, EF, nell'iſteſſo modo commenſurabili ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza ſolamente. E perche le due AC, BC, ſono Medie, le due ancora DF, FE, che gli ſono commenſurabili; [d] ſa- d Corol. alla 24. del 10.
ranno Medie. In oltre, perche AC à DF è come BC ad EF, permutando, AC à CB [e] ſarà come DF ad FE: ma le due AC, CB ſono commen- e 16. del 5.
ſurabili ſolamente in potenza, per lo Scolio alla 10. propoſitione, le due DF, FE, ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza: ſono le due DF, FE, per quel che ſi è dimoſtrato, Medie, e, per la 75. propoſitione, la rimanente DE ſarà prima Apotome della Media. Dico che è del medeſimo ordine della Media AB. Preſe AC, CB come baſi di due rettangoli, de'quali AC ſia altezza commune, ſarà il quadrato di AC [f] al rettan- f 1.del 6.
golo contenuto delle due AC,CB, come AC à CB. E nell'iſteſſo modo

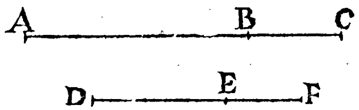


 ſi di-

si dimostrerà, che DF ad FE è come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE: ma DF ad FE è dimostrata come AC à CB; sarà il qua-
g 21. del 5. drato di AC al rettangolo contenuto dalle due AC, CB, [g] come il quadrato di DF al rettangolo delle due DF, FE; e permutando, il quadrato
h 16. del 5. di AC al quadrato di DF [h] sarà come il rettangolo contenuto dalle due AC, CB, al rettangolo delle due DF, FE: ma il quadrato di AC è commensurabile al quadrato di DF (stante che le rette AC, DF, sono dimo-
K 10. del 10. strate commensurabili) sarà il rettangolo delle due AC, CB, [K] commensurabile al rettangolo delle due DF, FE. Se dunque il rettangolo contenuto dalle due AC, CB è Rationale, in modo, che AB sia prima Apoto-
l 9. defin. del 10. me della Media, sarà ancora il rettangolo contenuto dalle due DF, FE, [l] che gli è commensurabile, Rationale: Dal che la retta DE sarà quella, che si chiama prima Apotome della Media, cioè del medesimo ordine dell'Apotome AB. Se poi il rettangolo delle due AC, CB, è Medio, in modo, che AB sia seconda Apotome della Media; sarà il rettangolo delle due DF, FE, che gli è commensurabile, Medio. Per la qual cosa
m 76. del 10. la retta DE sarà [m] seconda Apotome della Media, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LXXXII. PROPOSITIONE CVI.

La retta linea, ch'è commensurabile alla minore, è ancor essa Minore.



Sia la Minore AB, la di cui congruente BC, in modo, che le due AC, BC, siano incommensurabili in potenza; che l'aggregato de i quadrati di AC, CB, sia Rationale, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB sia Medio: e sia DE commensurabile ad AB, ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza solamente. Dico che la retta DE è quella, che si chiama Minore. Si faccia la medesima costruttione dell'antecedente propositione, e si proui, come iui si fece, che le due DF, AC, come ancora le due EF, BC, sono commensurabili ò in lunghezza, e potenza, ouero in potenza solamente. E perche AC à DF è come BC ad
a 16. del 5. EF, permutando, AC à BC [a] sarà come DF ad EF, ed il quadrato di AC
b 22. del 6. al quadrato di BC [b] sarà come il quadrato di DF al quadrato di FE; e
c 18. del 5. componendo, l'aggregato de i quadrati di AC, CB, al quadrato di CB, [c] sarà come l'aggregato de i quadrati di DF, FE, al quadrato di FE; e permutando, l'aggregato de i quadrati di AC, CB all'aggregato de i qua-
d 16. del 5. drati di DF, FE, [d] sarà come il quadrato di CB al quadrato di EF: Ma il quadrato di CB è commensurabile al quadrato di FE (stante che le rette CB, FE, sono state dimostrate commensurabili) sarà l'aggregato de i
e 10. del 10. quadrati di AC, CB, [e] commensurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE. E perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per ipotesi, è Rationale; l'aggregato ancora de i quadrati di DF, FE, che gli è com-
f 9. defin. del 10. mensurabile, [f] sarà Rationale. Si dimostri, come si fece nell'antece-

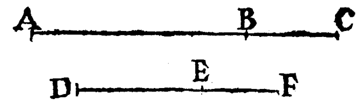
dente propositione, che il rettangolo, contenuto dalle due AC, CB, è commensurabile al rettangolo, contenuto dalle due DF, FE; dal che il doppio rettangolo delle due AC, CB, sarà commensurabile al doppio rettangolo delle due DF, FE: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, per ipotesi, è Medio; sarà il doppio rettangolo delle due DF, FE, [g] che g Corol. alla 24. del 10.
gli è commensurabile, Medio. E perche AC à BC è come DF ad FE, e le due AC, BC, sono, per ipotesi, incommensurabili in potenza; saranno le due ancora DF, FE, [h] incommensurabili in potenza. Hor essendo le h 10. del 10.
due DF, FE, incommensurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati è Rationale, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime DF, FE, è Medio: per la 77. propositione di questo, la retta DE sarà quella, che si chiama Minore, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA LXXXIII. PROPOSITIONE CVII.

La retta linea, ch'è commensurabile à quella, che col Rationale fà il tutto Medio, è ancor essa quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Sia AB quella retta, che col Rationale fà il tutto Medio, la di cui congruente sia BC, in modo, che le due AC, CB, siano incommensurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati, cioè di AC, CB, sia Medio, & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime AC, CB, sia Rationale; e sia DE commensurabile ad AB in qualunque modo. Dico che ED è quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Si faccia la medesima costruttione dell'altre antecedenti, e si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che l'aggregato de i quadrati delle due AC, CB, è commensurabile all'aggregato de i quadrati delle due DF, FE: ma l'aggregato de i quadrati di AC, CB, per

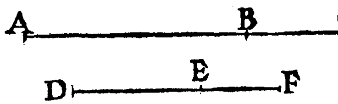


ipotesi, è Medio; sarà l'aggregato de i quadrati di DF, FE, [a] Medio. a Corol. alla 24. del 10.
Similmente si dimostri, come si fece nella 105. propositione, che il rettangolo delle due AC, CB, è commensurabile al rettangolo delle due DF, FE; dal che i loro doppij saranno ancora commensurabili: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, per ipotesi, è Rationale; sarà il doppio rettangolo delle due DF, FE, che gli è commensurabile, [b] Rationale. b 9. defin. del 10.
Finalmente perche AC à CB è come DF ad FE, e le due AC, CB, per ipotesi, sono incommensurabili in potenza; saranno ancora le due DF, FE, [c] incommensurabili in potenza. Hor essendo le due DF, FE, incom- c 10. del 10.
mensurabili in potenza, l'aggregato de i quadrati di DF, FE, è Medio; & il doppio rettangolo, contenuto dalle medesime, è Rationale; per la 78. propositione di questo, sarà la retta DE quella, che col Rationale fà il tutto Medio, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA LXXXIV. PROPOSITIONE CVIII.

La retta linea, ch'è commenſurabile à quella, che col Medio fà il tutto Medio, è ancor eſſa quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Sia AB quella retta, che col Medio fà il tutto Medio, la di cui congruente ſia BC, in modo, che le due AC, BC ſiano incommenſurabili in potenza, l'aggregato de i loro quadrati ſia Medio, & il doppio rettangolo contenuto dalle medeſime AC, CB ſia Medio, incommenſurabile all'aggregato de i loro quadrati; e ſia DE commenſurabile ad AB in qualunque modo. Dico che DE è quella, che col Medio fà il tutto Medio. Si faccia la medeſima coſtruttione dell'altre di queſto Senario, e ſi dimoſtri, come nella 106. che l'aggregato de i quadrati di AC, CB è commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE. Eſſendo, per ipoteſi, l'aggregato de i quadrati di AC,
a 24. del 10. CB Medio, ſarà ancora l'aggregato de i quadrati di DF, FE a Medio. In oltre ſi dimoſtri, come ſi fece nella 105. propoſitione, che il rettangolo delle due AC, BC è commenſurabile al rettangolo delle due DF, FE, i loro doppij ſaranno ancora commenſurabili: ma il doppio rettangolo delle due AC, CB, per ipoteſi, è Medio; ſarà il doppio rettan-
b 24. del 10. golo delle due DF, FE, b che gli è commenſurabile, Medio. Di nuouo perche AC à CB è come DF ad FE; ſono le due AC, CB, per ipoteſi,
c 10. del 10. incommenſurabili in potenza, le due ancora DF, FE c ſaranno incommenſurabili in potenza. Finalmente perche l'aggregato de i quadrati di AC, CB, come ſi diſſe, è commenſurabile all'aggregato de i quadrati di DF, FE; & il doppio rettangolo delle due AC, CB è commenſurabile al doppio rettangolo delle due DF, FE; eſſendo, per ipoteſi, l'aggregato de i quadrati di AC, CB incommenſurabile al doppio rettangolo del-
d 14. del 10. le medeſime AC, CB; ſarà l'aggregato de i quadrati delle due DF, FE d incommenſurabile al doppio rettangolo delle medeſime DF, FE. Hor perche le due DF, FE ſono incommenſurabili in potenza; l'aggregato de i loro quadrati è Medio, & il doppio rettangolo delle medeſime DF, FE, è Medio incommenſurabile all'aggregato de i loro quadrati; per la 79. propoſitione, la retta DE ſarà quella, che col Medio fà il tutto Medio, come fù propoſto dimoſtrare.

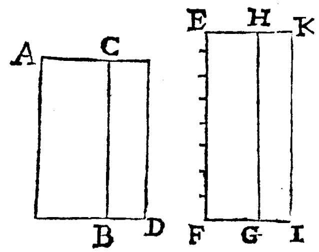


THEOREMA LXXXV. PROPOSITIONE CIX.

La retta, il di cui quadrato è vguale alla differenza di quanto il Rationale ſupera il Medio, è vna delle due irrationali, cioè, ò Apotome, ouero la Minore.

Dal

Dal Rationale AD ne ſia detratto il Medio CD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale allo ſpatio AB, ò è Apotome, ouero è la Minore. Sia eſpoſta qualunque Rationale EF, alla quale ſia applicato il ret-
tangolo EG a vguale allo ſpatio AB; a 45. del 1.
eſſendo HG vguale ad EF, ſarà HG Rationale. Si applichi ad HG il ret-
tangolo HI, b vguale al Medio CD, b 45. del 1.
in modo, che tutto il rettangolo EI ſia vguale al Rationale AD; dal che
EI ſarà Rationale, ed il lato EK c ſarà c 21. del 10.
Rationale, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Di nuouo eſſendo HI Medio (per eſſere vguale al Medio CD) applicato alla Ratio-
nale HG, l'altro lato HK d ſarà Ratio- d 23. del 10.
nale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF; ma EF, per quel che ſi è dimoſtrato, è commenſurabile in lunghezza ad EK: le due
EK, HK e ſaranno incommenſurabili in lunghezza. E perche le mede- e 13. del 10.
ſime ſono ſtate dimoſtrate Rationali; perciò le rette EK, HK, ſaranno commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione di queſto, la rimanente EH ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà HK. In oltre il quadrato della compoſta EK ſupera il quadrato della congruente HK, per il quadrato d'vna retta, la quale ò ſarà commenſurabile in lunghezza ad EK, ouero ſarà alla medeſima incommenſurabile. Se è commenſurabile ad EK, eſſendoſi dimoſtrata EK commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la prima delle terze definitioni, ſarà EH prima Apotome; e per la 92. propoſitione di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla prima Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, ſarà Apotome. Se poi il quadrato di EK ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile ad EK, eſſendoſi dimoſtrata la retta EK commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF; per la quarta delle terze definitioni, la retta EH ſarà la quarta Apotome, la di cui congruente ſarà HK; e per la 95. propoſitione di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla quarta Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, è quella, che ſi chiama Minore, come fù propoſto dimoſtrare.

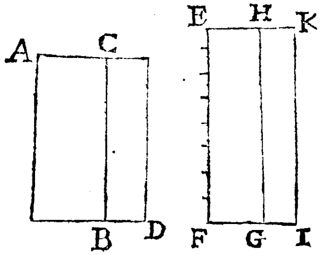


THEOREMA LXXXVI. PROPOSITIONE CX.

La retta, il di cui quadrato è vguale alla differenza di quanto il Medio ſupera il Rationale, ò ſarà prima Apotome della Media, ouero ſarà quella, che col Rationale fà il tutto Medio.

Dal

Dal Medio AD ſe ne detragga il Rationale CD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale allo ſpatio AB, ò è prima Apotome, ouero è quella, che col Rationale fà il tutto Medio. Si faccia la medeſima coſtruttione dell'antecedente propoſitione. Eſſendo il rettangolo EI vguale al Medio AD, ſarà EI Medio, il quale, applicato alla Rationale EF,
a 23. del 10. ſarà il lato EK [a] Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale EF. Di nuouo perche HI è vguale al Rationale CD, ſarà HI Rationale, che, applicato alla Ratio-
b 21. del 10. nale HG, [b] fà il lato HK Rationale, e commenſurabile in lunghezza alla Rationale HG, ouero EF: ma EF è dimoſtrata incommenſurabile in lunghez-
c 13. del 10. za ad EK; le due EK, HK [c] ſaranno incommenſurabili in lunghezza; E perche ſono Rationali, perciò ſono le due HK, EH Rationali, e commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione, la rimanente EH è Apotome, la di cui congruente ſarà HK. In oltre il quadrato di EK ſupera il quadrato di HK per il quadrato d'vna retta, la quale ò ſarà commenſurabile in lunghezza ad EK, ouero incommenſurabile: Se ſarà commenſurabile in lunghezza ad EK, eſſendoſi dimoſtrata la congruente HK commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la ſeconda delle terze definitioni, EH ſarà ſeconda Apotome; e per la 93. propoſitione di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla ſeconda Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, ſarà la prima Apotome della Media. Se poi il quadrato di EK ſupera il quadrato HK, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza alla medeſima EK; eſſendoſi dimoſtrata la congruente HK commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la quinta delle terze definitioni, la retta EH ſarà la quinta Apotome; e per la 96. propoſitione di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale EF, e dalla quinta Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, ſarà quella, che col Rationale fà il tutto Medio, ch'era da dimoſtrarſi.



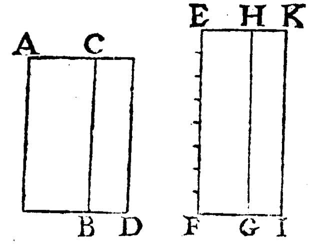
THEOREMA LXXXVII. PROPOSITIONE CXI.

La retta, il di cui quadrato è vguale alla differenza, ch'è frà due Medij, trà loro incommenſurabili; ò è la ſeconda Apotome della Media, ouero è quella, che col Medio fà il tutto Medio.

Dal Medio AD ne ſia detratto il Medio CD, il quale ſia incommenſurabile al tutto AD. Dico che la retta, il di cui quadrato è vguale al

rima-

rimanente AB, ò è la ſeconda Apotome della Media, ouero è quella, che col Medio fà il tutto Medio. Sia fatta la medeſima coſtruttione della 109. propoſitione. Perche i due rettangoli EI, HI, per coſtruttione, ſono vguali à i due Medij AD, CD, i due EI, HI, ſaranno Medij, i quali, applicati alla Rationale EF, ouero HG, fanno i lati EK, HK [a] Rationali, ed incommenſurabili in lunghezza alla Rationale EF. a 23. del 10.



E perche i due AD, CD, cioè EI, HI, per ipoteſi, ſono incommenſurabili, ed i rettangoli EI, HI [b] ſono come b 1. del 6.
le baſi EK, HK, le rette EK, HK [c] ſaranno incommenſurabili in lunghezza: ma ſono ſtate dimoſtrate Rationali; ſaranno in conſeguenza le due c 10. del 10.
EK, HK Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; e per la 74. propoſitione di queſto, la rimanente EH ſarà Apotome, la di cui congruente ſarà HK. Di nuouo il quadrato di EK ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta, la quale ò ſarà commenſurabile in lunghezza alla compoſta EK, ouero ſarà incommenſurabile: Se è commenſurabile in lunghezza ad EK. Perche neſſuna delle due EK, HK è commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF, per la terza delle terze definitioni, il rimanente EH ſarà la terza Apotome; e per la 94. propoſitione, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla terza Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, ſarà la ſeconda Apotome della Media. Se poi il quadrato di EK ſupera il quadrato di HK, per il quadrato d'vna retta incommenſurabile in lunghezza ad EK; eſſendoſi dimoſtrato, che neſſuna delle due EK, HK, è commenſurabile in lunghezza alla Rationale EF; per la ſeſta delle terze definitioni, la retta EH ſarà la ſeſta Apotome, la di cui congruente ſarà HK; e per la 97. propoſ. di queſto, la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo EG, contenuto dalla Rationale EF, e dalla ſeſta Apotome EH, cioè vguale allo ſpatio AB, è quella, che col Medio fà il tutto Medio, come fù propoſto dimoſtrare.

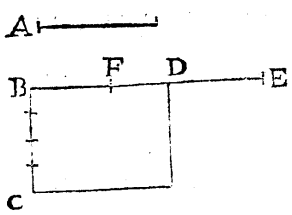
THEOREMA LXXXVIII. PROPOSITIONE CXII.

L'Apotome è diuerſa dal Binomio.

Sia qualunque Apotome A. Dico che A non è Binomio. Sia A, ſe è poſſibile, qualcuno de i binomij. Sia eſpoſta qualunque Rationale BC, alla quale ſi applichi il rettangolo CD [a] vguale al quadrato della retta A. a 45. del 1.
Perche A, per ipoteſi, è Apotome, l'altro lato BD ſaràquella, che ſi chiama prima Apotome; alla quale s'intenda aggiunta la ſua congruente DE, e per la definitione della prima Apotome, le due BE, DE, ſaranno Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza; ed il quadrato di BE ſuperarà il quadrato di DE, per il quadrato d'vna retta, commen-

ſurabile

surabile in lunghezza alla medesima BE; e la retta BE sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale BC. Di nuouo perche A è supposta ancora essere vno de i binomij, sarà il lato BD, per la 61. di questo, primo binomio; il quale si concepisca diuiso ne i suoi nomi, e sia BF il maggior nome; e per la definitione del primo Binomio, le due BF, FD sono Rationali, commensurabili solamente in potenza; ed il quadrato di BF superarà il quadrato di FD, per il quadrato d'vna retta, commensurabile in lunghezza al maggior nome BF; ed il maggior nome BF sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale BC. E perche tanto BE, come BF, è commensurabile in lunghezza alla medesima BC; le b 12.del 10. due BE, BF b saranno frà loro commensurabili in lunghezza. Hor essendo tutta BE commensurabile in lunghezza alla



c 16. del 10. sua parte BF, sarà la medesima BE c commensurabile in lunghezza al d 6. defin. del 10. rimanente FE: ma BE è Rationale; sarà FE, d che gli è commensurabile, Rationale. In oltre perche le due BE, DE, sono state dimostrate Rationali, e commensurabili solamente in potenza, saranno le medesime BE, ED incommensurabili in lunghezza: ma BE è dimostrata commensurabile in lunghezza ad FE, sarà ED e incommensurabile in lunghezza ad e 14.del 10. FE; furono dimostrate ambedue Rationali, in conseguenza le medesime FE, DE sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 74. propositione, la rimanente FD sarà Apotome; e perciò irrationale. Fù dimostrata la retta FD Rationale; sarà Rationale, ed Irrationale, ch'è impossibile. Non dunque A, essendo Apotome, è la medesima che vno de i Binomij: ma è diuersa dal Binomio, come fù proposto dimostrare.

SCOLIO.

Le linee Irrationali diuerse frà di loro, delle quali si è parlato sin hora, sono le seguenti tredici linee.

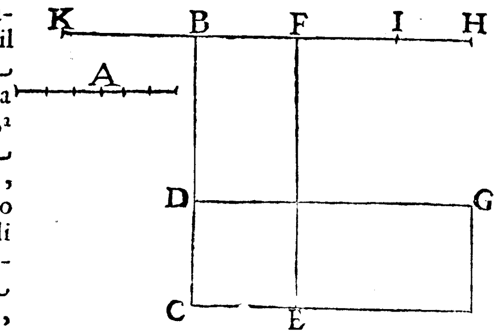
1 Media.
2 Binomio, che si diuide in sei specie.
3 Prima Bimediale.
4 Seconda Bimediale.
5 Maggiore.
6 Potente per il Rationale, e Medio.
7 Potente per due Medij.
8 Apotome, che si diuide in sei specie.
9 Prima Apotome della Media.

10 Seconda Apotome della Media.
11 Minore.
12 Col Rationale fà il tutto Medio.
13 Col Medio fà il tutto Medio.

THEOREMA LXXXIX. PROPOSITIONE CXIII.

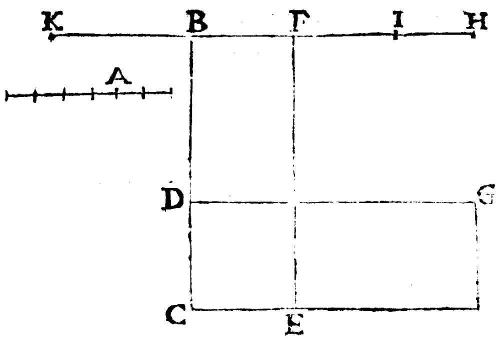
Applicando il quadrato della Rationale al Binomio, il lato, che ne risulta, sarà Apotome, i di cui nomi sono commensurabili à i nomi del Binomio, e sono nella medesima proportione; ed, oltre à ciò, l'Apotome, che da questa applicatione si genera, tiene il medesimo ordine del Binomio.

Sia qualunque Rationale A, ed il Binomio BC, il di cui maggior nome sia BD; ed al Binomio BC sia applicato il rettãgolo BE, a vguale al quadrato della a 45.del 1. Rationale A; l'altro lato, che ne risulta, sia BF. Dico che BF è Apotome, i di cui nomi, cioè la composta dell'Apotome, e sua congruente per vn nome, e la detta congruente per l'altro nome, sono com-



mensurabili à i nomi BD, DC, del Binomio BC; e che sono nella medesima proportione; ed oltre à ciò, l'Apotome BF è del medesimo ordine del Binomio BC. Di nuouo al minor nome DC del Binomio, si applichi il rettangolo CG b vguale al quadrato della Rationale A; sarà b 45.del 1. CG Rationale, il quale, applicato alla Rationale DC, fà l'altro lato DG, c Rationale, e commensurabile in lunghezza alla Rationale DC. c 21. del 10. Si faccia BH vguale alla retta DG, sarà BH Rationale, e commensurabile in lunghezza à DC. E perche i rettangoli BE, CG, sono frà di loro vguali; sarà BC à CD, d come DG, ouero HB, à BF; e diuidendo, d 14. del 6. BD à DC e sarà come HF ad FB: ma BD, per ipotesi, è maggiore di DC, e 17. del 5. sarà HF maggiore di FB. Si faccia FI vguale ad FB, e si faccia, si come HI ad IF, f così FB à BK; componendo, sarà HF ad FI, g ouero HF ad f 10. del 6. FB, come FK à BK: ma HF ad FB, per quel che si è dimostrato, è come g 18.del 5. BD à DC; sarà BD à DC h come FK à BK: e perche i due BD, DC, h 11. del 5. (come nomi del Binomio) sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza: i due dunque FK, BK saranno ancora Rationali, e commensurabili solamente in potenza.

Di nuouo, perche l'antecedente HF al conseguente FB è come l'antecedente FK al conseguente KB; gli antecedenti insieme HF, FK, cioè HK, à i conseguenti insieme FB, BK, cioè FK, [K] saranno come vn antecedente ad vn conseguente; cioè come FK à KB. Hor essendo HK ad FK come FK à KB, sarà FK Media proportionale frà le due HK, BK; dal che la prima HK alla terza KB, per il Lemma 8. dopo la 18. del 6. Libro, hà duplicata proportione di quella, che hà la prima HK alla seconda KF; ma il quadrato di HK al quadrato di KF [l] hà la medesima duplicata proportione di HK à KF: sarà il quadrato di HK al quadrato di KF, come la prima HK alla terza KB. In oltre, perche BD à DC, per quel che si è dimostrato, è come FK à KB, & è FK à KB come HK à KF; sarà BD à DC, [m] come HK à KF; ed il quadrato di BD al quadrato di DC [n] sarà come il quadrato di HK al quadrato di KF: ma il quadrato di BD è commensurabile al quadrato di DC (stãte che BD, DC, sono nomi del Binomio) sarà ancora il quadrato di HK [o] commensurabile al quadrato di KF. Fù dimostrato il quadrato di HK al quadrato di KF essere come HK à KB; essendo il quadrato di HK commensurabile al quadrato di KF, sarà la retta HK [p] commensurabile in lunghezza alla retta KB; e la medesima HK, per il Corollario alla 16. propositione di questo, sarà commensurabile in lunghezza al restante BH. Fù dimostrata BH Rationale, in conseguenza HK, [q] che gli è commensurabile, sarà Rationale: e similmente KB, che è commensurabile à KH, sarà ancora Rationale. E perche le due FK, KB, furono dimostrate commensurabili solamente in potenza, essendo KB Rationale, sarà ancora FK, [r] che gli è commensurabile, Rationale. Per la qual cosa, le due FK KB sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza, e per la 74. propositione di questo, la rimanente BF sarà Apotome, la di cui congruẽte sarà BK, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



Essendosi dimostrata tutta HK commensurabile in lunghezza alla parte KB, saranno le parti KB, BH [t] commensurabili in lunghezza: ma BH fù dimostrata commensurabile in lunghezza alla retta DC, sarà KB [u] cõmensurabile in lunghezza alla medesima DC. In oltre perche si è dimostrato, che BD à DC è come FK à KB, permutando, [x] sarà BD ad FK come DC à KB: fù dimostrata la retta DC commensurabile in lunghezza alla retta BK; sarà BD [y] ancora commensurabile in lunghezza ad FK. Hor essendo FK commensurabile in lunghezza à BD, e la retta BK commensurabile in lunghezza à DC; le rette dunque FK, KB, che sono i nomi dell'Apotome BF, saranno commensurabili in lũghezza à i nomi BD, DC, del Binomio BC, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.

K 13. del 5.
l 20. del 6.
m 11. del 5.
n 22. del 6.
o 15. del 10.
p 10. del 10.
q 6. defin. del 10.
r 6. defin. del 10.
t 16 del 10.
u 13. del 10.
x 16. del 5.

Similmente essendosi dimostrato, che BD à DC è come FK à BK, i nomi dunque FK, KB, dell'Apotome BF, sono nella medesima proportione de i nomi BD, DC, del Binomio BC, ch'era da dimostrarsi nel terzo luogo.

Finalmente il quadrato del maggior nome BD supera il quadrato del minor nome DC, per il quadrato d'vna retta, la quale ò sarà commensurabile in lunghezza al maggior nome BD, ouero sarà incommensurabile in qualunque modo. Perche BD, à DC, è come FK à KB, se il quadrato di BD supera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza à BD, il quadrato ancora di FK superarà il quadrato di KB [z], per il quadrato d'vna retta commensurabile in lunghezza ad FK; e se il quadrato di BD supera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza al maggior nome BD; il quadrato ancora di FK superarà il quadrato di KB, per il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza ad FK. Di più, se BD è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, sarà ancora FK (ch'è commensurabile in lunghezza à BD) commensurabile in lunghezza alla Rationale A: e se il minor nome DC è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, sarà ancora KB, (ch'è commensurabile à DC in lunghezza) commensurabile in lunghezza alla Rationale A. Ed in vltimo, se nessuna delle due BD, DC è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, ne meno alcuna delle due FK, KB [&] sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale A; e per quel che si disse nelle seconde, e terze definitioni, l'Apotome BF sarà del medesimo ordine del Binomio BC; cioè, se il Binomio BC sarà primo, ò secondo, ò terzo Binomio &c. sarà ancora l'Apotome BF prima, ò seconda, ò terza Apotome &c. come fu proposto dimostrare.

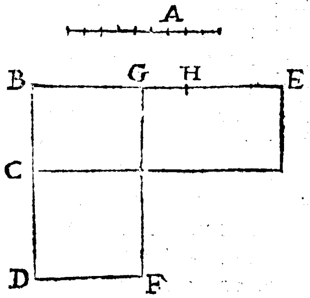
THEOREMA XC. PROPOSITIONE CXIV.

Applicando il quadrato della Rationale all'Apotome, l'altro lato, che ne risulta, è Binomio; i di cui nomi sono commensurabili à i nomi dell'Apotome, e sono nella medesima proportione; ed oltre à ciò il Binomio è del medesimo ordine dell'Apotome.

Sia la Rationale A, e l'Apotome BC, la di cui congruente sia CD; sarà BD il maggior nome dell'Apotome, e perciò Rationale. Sia applicato all'Apotome BC il rettangolo CE, [a] vguale al quadrato della Rationale A, dal quale risulti il lato BE. Dico che BE è Binomio, i di cui nomi sono commensurabili à i nomi BD, DC, dell'Apotome BC, e sono

y 10. del 10.
z 15. del 10.
& 14. del 10.
a 45. del 1.

nella medesima proportione; ed oltre à ciò, il Binomio BE è del mede-
simo ordine dell'Apotome BC. Alla composta BD si applichi il rettan-
b 45.del 1. golo BF b vguale al quadrato della Rationale A; sarà il rettangolo BF
Rationale, ed vguale al rettangolo CE. E perche il Rationale BF è ap-
c 31.del 10. plicato alla Rationale BD, il lato BG, che ne risulta, sarà c Rationale, e
commensurabile in lunghezza alla com-
posta BD. Perche i due rettangoli BF,
CE, per costruttione, sono frà di loro
vguali, perciò hanno i lati reciprochi,
d 14. del 6. è sarà BE à BG d come BD à BC; e per
la conuersione della proportione, BE ad
x Corol. alla 19. del 5. e 10. del 6. EG x sarà come BD, à DC. Si diuida
EG in H, in modo, che EH ad HG e sia
come BE ad EG; e sarà tutta BE à tut-
ta GE come la parte EH, detratta da
BE, alla parte HG, detratta da GE; dal
f 19. del 5. che il rimanente BH al rimanente HE f
sarà come tutta BE à tutta GE: ma BE
g 11.del 5. ad EG, per costruttione, è come EH ad HG; sarà BH ad HE g come la
medesima HE ad HG: per la qual cosa EH è Media proportionale frà le
due BH, HG. E perche la prima BH alla terza HG, per il Lemma 8. do-
po la 18. del 6, hà duplicata proportione, che la prima BH alla seconda
h 20. del 6. HE; ed il quadrato di BH al quadrato di HE h hà la medesima duplica-
ta proportione, che hà BH ad HE; sarà il quadrato di BH al quadrato
di HE come la prima BH alla terza HG. E perche fù dimostrato, che
BD à DC è come BE ad EG, cioè come BH ad HE; e le due BD, DC,
sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza (stante che sono
K 10.del 10. nomi dell'Apotome BC) saranno le due BH, HE K commensurabili so-
lamente in potenza: per la qual cosa i quadrati delle due BH, HE, sono
commensurabili; e le rette BH, GH, che furono dimostrate come i quadra-
l 10.del 10. m Corol. alla 16. del 10. ti di BH, HE, l sono commensurabili in lunghezza. Hor essendo BH
commensurabile in lunghezza alla parte GH, m sarà ancora commensu-
rabile in lunghezza al rimanente BG; e le due BG, GH, saranno com-
mensurabili in lunghezza frà loro. E perche BG fù dimostrata Rationa-
le, e commensurabile in lunghezza alla retta BD; sarà ancora BH Ra-
tionale, e commensurabile in lunghezza alla medesima BD. In oltre,
perche le due BH, HE sono state dimostrate commensurabili solamente
in potenza, e la retta BH è dimostrata Rationale; sarà ancora HE, la
n 6. defin. del 10. quale gli è commensurabile in potenza, n Rationale; e perciò le due BH,
HE sono Rationali, e commensurabili solamente in potenza; e per la 37.
propositione di questo, la retta BE sarà Binomio, il che era da dimo-
strarsi nel primo luogo.



Di nuouo, essendosi dimostrato che BH ad HE è come BD à CD;
o 16. del 5. p 10.del 10. permutando, BH à BD o sarà come HE à CD: fù dimostrata BH com-
mensurabile in lunghezza à BD; sarà ancora HE p commensurabile in
lunghezza à CD: per la qual cosa le due BH, HE, che sono i nomi del
Binomio BE, sono commensurabili in lunghezza alle due BD, CD, che

sono

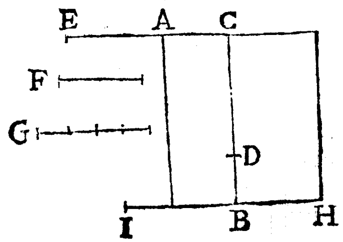
sono i nomi dell'Apotome BC, ch'era da dimostrarsi nel secondo luogo.
Fù ancora dimostrata BH ad HE come BD à DC, perciò hanno la mede-
sima proportione, ch'era da dimostrarsi nel terzo luogo.

Finalmente perche BD à DC è come BH ad HE, se il quadrato di
BD supera il quadrato di DC, per il quadrato d'vna retta commensura-
bile in lunghezza alla medesima BD, ancora il quadrato di BH superarà
il quadrato di HE, q per il quadrato d'vna retta commensurabile in lun- q 15.del 10.
ghezza ad essa BH; e se il quadrato di BD supera il quadrato di DC, per
il quadrato d'vna retta incommensurabile in lunghezza à BD, ancora il
quadrato di BH superarà il quadrato di HE, r per il quadrato d'vna retta r 15.del 10.
incommensurabile in lunghezza à BH. Si che, se BD è commensura-
bile in lunghezza alla Rationale A, ancora BH (ch'è commensurabile in
lunghezza à BD) sarà commensurabile t in lunghezza alla Rationale A: t 13.del 19.
e se CD è commensurabile in lunghezza alla Rationale A, ancora HE
(ch'è commensurabile in lunghezza à CD) sarà commensurabile in lun-
ghezza alla Rationale A: E finalmente, se nessuna delle due BD, DC è
commensurabile in lunghezza ad A, ne meno alcuna delle due BH, HE u u 14.del 10.
sarà commensurabile in lunghezza alla Rationale A; e per quel che si
disse nelle seconde, e terze definitioni, BE sarà Binomio del medesimo
ordine dell'Apotome BC; cioè, se l'Apotome BC sarà prima, ò seconda,
ò terza Apotome &c, sarà ancora BE primo, ò secondo, ò terzo Bino-
mio &c, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XCI. PROPOSITIONE CXV.

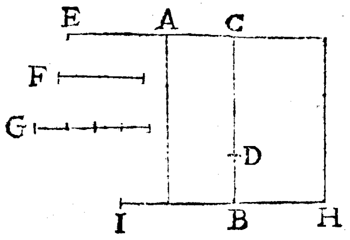
Se vn rettangolo è contenuto dall'Apotome, e dal Binomio, ed i nomi del Binomio sono commensurabili à i nomi dell'Apotome, e sono nella medesima proportione; la retta linea, il di cui quadrato è vguale al detto rettangolo, è Rationale.

Sia il rettangolo AB, contenuto dall'Apotome AC, e dal Binomio CB,
i di cui nomi CD, DB, siano commensurabili à i nomi CE, AE, dell'
Apotome AC; e sia CD à DB, come
CE ad EA; s'intenda la retta F, il
di cui quadrato sia vguale al rettan-
golo AB. Dico che la retta F è Ra-
tionale. Sia esposta la Rationale G;
si applichi al Binomio CB il rettan- a 45. del 1.
golo CH, a vguale al quadrato della
Rationale G; sarà CH Rationale, ed
il lato BH b sarà Apotome, della b 113.del 10.
quale IB sia la congruente; dal che
i nomi saranno HI, IB, commensura-
bili in lunghezza à i nomi CD, DB,
e nella medesima proportione, cioè HI ad IB sarà come CD à DB: ma



CD à

CD à DB, per ipoteſi, è come CE ad EA; ſarà HI ad IB [c] come CE ad EA; e permutando, tutta HI à tutta CE [d] ſarà come la parte IB alla parte EA; dal che l'auanzo HB all'auanzo CA [e] ſarà come tutta HI à tutta CE. In oltre perche tanto IH, come CE, è commenſurabile in lunghezza à CD; le due HI, CE [f] ſaranno commenſurabili in lunghezza: ma HI à CE è dimoſtrata eſſere come HB à CA; ſarà HB [g] commenſurabile in lunghezza à CA. Hor perche i rettangoli HC,BA, hanno vna medeſima altezza, ſarà HC ad AB, [h] come HB à CA; e perche HB è commenſurabile in lunghezza ad AC; ſarà HC [K] commenſurabile ad AB: ma HC è Rationale, ſarà il rettangolo AB, che gli è commenſurabile, [l] Rationale; e la retta F, il di cui quadrato è vguale ad AB, [m] ſarà Rationale, come fù propoſto dimoſtrare.



c 11. del 5.
d 16. del 5.
e 19. del 5.
f 12. del 10.
g 10. del 10.
h 1. del 6.
K 10. del 10.
l 9. defin. del 10.
m 8. defin. del 10.

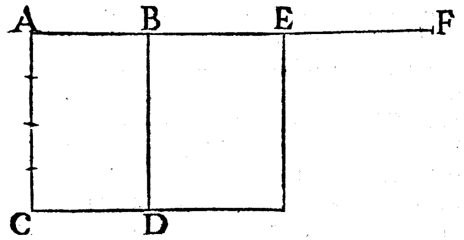
COROLLARIO.

Da quel che ſi è detto, è manifeſto, che vno ſpatio Rationale può eſſere contenuto da due rette Irrationali; mentre il rettangolo AB è Rationale, ed è contenuto dall'Apotome AC, e dal Binomio CB, che ſono linee Irrationali.

THEOREMA XCII. PROPOSITIONE CXVI.

Dalla Media ne naſcono infinite linee Irrationali; e neſſuna è la medeſima delle tredici ſpiegate antecedentemente.

Sia la Media AB. Dico che dalla Media AB ne naſcono infinite linee Irrationali; e neſſuna di quelle è la medeſima di quelle tredici ſpiegate in queſto libro. Sia eſpoſta la Rationale AC, e ſi cõcepiſca il rettangolo AD, il quale ſia contenuto dalla Media AB, e dall'eſpoſta Rationale AC; per il Lemma dopo la 38. propoſ. di queſto, il rettangolo AD, contenuto dalla Rationale AC, e dalla Irrationale AB, ſarà Irrationale. Sia BE la retta, il di cui quadrato è vguale al rettangolo AD, ſarà BE Irrationale.



Dico

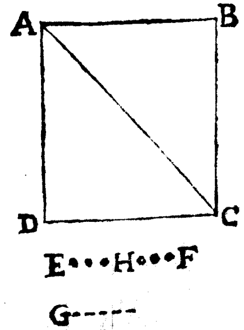
Dico, che BE non è alcuna di quelle tredici notate dopo la 112. propoſ. di queſto. Perche, applicando alla Rationale AC il quadrato della media, il lato, che ne riſulta, per la 23. propoſ. di queſto, è Rationale, ed incommenſurabile in lunghezza alla Rationale AC; applicando dunque ad AC il quadrato della media AB, il lato, che non riſulta, ſarà Rationale, e perciò non ſarà il medeſimo, che l'irrationale BE. In oltre applicando ad AC ciaſcun quadrato dell' altre dodici irrationali, delle quali ſi è parlato di ſopra, ciaſcun lato, che ne riſulta, ò è vno de'Binomij, ouero vna delle Apotome, come appariſce nelle propoſitioni *61. 62. 63. 64. 65. 66. 98. 99.* 100. 101. 102. & 103. di queſto. E perche il quadrato dell'irrationale BE, applicato alla Rationale AC, fà il lato AB Media; ſarà manifeſto, che l'irrationale BE è differente da tutte le tredici ſopra notate, mentre applicato il ſuo quadrato alla Rationale AC, fà il lato differente da quei lati fatti da'quadrati di quelle tredici, applicati alla medeſima Rationale AC.

Si compiſca il rettangolo DE, il quale ſarà contenuto dalla Rationale BD, e dall'irrationale BE; e per il lemma dopo la 38. propoſ. il rettangolo DE ſarà irrationale. S'intenda la retta EF, il di cui quadrato ſia vguale all'irrationale DE, ſarà EF irrationale. Dico, che l'irrationale EF non è alcuna di quelle tredici ſopra nominate, ne meno è la medeſima, che BE. Perche il quadrato di EF, cioè il rettangolo DE, applicato alla Rationale BD, fà il lato BE, ed i quadrati di quelle tredici, come ancora il quadrato di BE, applicati alla Rationale BD, fanno, per quel che ſi è dimoſtrato, i lati diuerſi da BE, ſarà manifeſto, che EF non è alcuna di quelle tredici, ne meno è la medeſima, che BE. Nell'iſteſſo modo, che ſi ſono trouate le irrationali BE, EF, ſe ne poſſono ritrouare infinite altre, diuerſe da quelle tredici, e diuerſe frà di loro, come fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA XCIII. PROPOSITIONE CXVII.

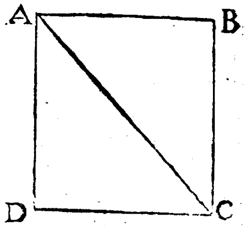
Il Diametro, ò Diagonale del quadrato, è incommenſurabile in lunghezza al lato del medeſimo quadrato.

Sia il quadrato ABCD, il di cui diametro AC. Dico, che il diametro AC è incommenſurabile in lunghezza al lato AB. Se il diametro AC non è incommenſurabile in lunghezza ad AB, ſarà dunque al lato AB commenſurabile in lunghezza, e perciò il diametro AC al lato AB [a] hauerà la proportione, che hà il numero al numero. Sia dunque AC ad AB, come il numero EF al numero G, ed i numeri EF, & G, ſiano i minimi di quelli, che hanno la proportione di EF à G. Perche il quadrato del lato AC [b] è vguale à i quadrati de i due lati AB, BC, ed i quadrati de i lati AB, BC ſono frà di loro vguali, ſarà il quadrato



a 5. del 10.
b 47. de. 1.

drato di AC il doppio del quadrato del lato AB. In oltre perche il quadrato di AC al quadrato di AB c hà duplicata proportione di quella, (c 20. del 6.) che hà il lato AC al lato AB, e per ipotesi, AC ad AB è come il numero EF al numero G; il quadrato di AC al quadrato di AB hauerà duplicata proportione di quella, che hà il numero EF al numero G: ma il quadrato del numero EF al quadrato del numero G d hà la medesima duplicata proportione, (d 12. del 8.) che hà il numero EF al numero G; hauerà il quadrato di AC al quadrato di AB l'istessa proportione, quale hà il quadrato del numero EF al quadrato del numero G: ma il quadrato di AC è il doppio del quadrato di AB; sarà il quadrato del numero EF il doppio del quadrato del numero G; e perciò dal quadrato del numero EF se ne può prendere la metà, cioè il quadrato del numero F sarà numero paro. Dico che il numero EF è ancora numero paro: Perche se EF non è numero paro, ma è numero disparo, multiplicato in se medesimo, quel che produce e sarà numero disparo, (e 29. del 9.) e in conseguenza il quadrato del numero EF sarebbe numero disparo, ch'è contro à quello, che si è dimostrato; mentre si è dimostrato, che il quadrato del numero EF è numero paro. Non dunque il numero EF è disparo, ma è numero paro. E perche i numeri EF, & G, sono i minimi nella loro proportione, saranno f in conseguenza frà di loro primi; (f 24. del 7.) ed essendosi dimostrato EF essere numero paro, sarà G numero disparo; perche se fosse numero paro, i numeri pari EF, & G, hauerebbero per commune misura il numero due, ed in tal caso non sarebbero frà di loro primi, che è contro à quel che si è dimostrato. Non dunque G è numero paro, ma è numero disparo. Si diuida il numero paro EF in due parti vguali, che siano i due EH, HF. Perche EH è vguale ad HF, il prodotto di EH in se medesimo sarà vguale al prodotto di EH in HF; e sarà ancora vguale al prodotto di HF in se medesimo; e così i quattro prodotti, cioè il prodotto di EH in se medesimo, quello, che si fà da HF in se medesimo, e due volte il prodotto di EH in HF, sono frà di loro vguali; e perciò tutti insieme sono il quadruplo di vno, cioè il quadruplo del quadrato di EH. Ma gli antedetti quattro prodotti sono vguali g al quadrato di EF; (g 4. Theor. dopo la 14. del 9.) sarà il quadrato del numero EF il quadruplo del quadrato del numero EH. Hor essendosi dimostrato, che il quadrato del numero EF è il doppio del quadrato del numero G, ed è il quadruplo del quadrato del numero EH; di quelle parti, che il quadrato di EF è quattro, il quadrato di G sarà due, ed il quadrato di EH sarà vno: per la qual cosa il quadrato del numero G sarà il doppio del quadrato del numero EH. Hor se il quadrato del numero G è il doppio del quadrato del numero EH, si può dunque il quadrato del numero G diuidere in due parti vguali, e perciò sarà numero paro. E procedendosi, come prima si fece, si dimostrerà, che G è numero paro: ma fù dimostrato essere numero disparo, sarà dunque G numero paro, e numero disparo, ch'è impossibile. Non dunque il



E . . H . . F

G . . . . .

diametro AC è commensurabile in lunghezza al lato AB, ma sono incommensurabili in lunghezza, ch'era da dimostrarsi.

In altro modo si dimostrerà il medesimo. Sia, se è possibile, il diametro AC commensurabile in lunghezza al lato AB, sarà la proportione di AC ad AB, h come quella del numero al numero. (h 5. del 10.) Sia dunque AC ad AB, come il numero EF al numero G, ed i numeri EF, & G, siano i minimi nella loro proportione; in conseguenza saranno frà di loro primi. Dico prima, che G non è l'vnità. Perche AC ad AB è come EF à G, sarà il quadrato di AC al quadrato di AB, per quel che sopra si è dimostrato, come il quadrato di EF al quadrato di G: ma il quadrato di AC fù sopra dimostrato il doppio del quadrato di AB; sarà il quadrato del numero EF il doppio del quadrato del numero G. Se dunque G sarà l'vnità, il suo quadrato sarà ancora l'vnità: ma il quadrato di EF è il doppio del quadrato di G; sarà il quadrato di EF il numero due, il che non può essere, stante che EF, per ipotesi, non è l'vnità; e perciò al minimo sarà il numero due; nel qual caso il numero EF sarebbe due, ed il suo quadrato sarebbe ancora due, ch'è impossibile. Non dunque G è l'vnità, ma sarà qualche numero. E perche si è dimostrato, che il quadrato del numero EF è il doppio del quadrato del numero G; in conseguenza il quadrato del numero G misura il quadrato del numero EF, e per la 14. propos. del 8. lib. il lato dell'vno misura il lato dell'altro, cioè il numero G misurerà il numero EF: ma il numero G misura se medesimo, perciò i numeri G, & EF, che hanno vna commune misura, sono frà di loro composti: sono, per quel che si disse, numeri frà di loro primi; sarebbero frà di loro primi, e sarebbero frà di loro composti, ch'è impossibile. Non dunque il diametro AC è commensurabile al lato AB, ma sono incommensurabili, ch'era da dimostrarsi.

S C O L I O.

Sogliono i Commentatori aggiungere quì vn'appendice, cauata da alcuni esemplari Greci, in ordine à ritrouare altre grandezze incommensurabili, tanto ne' piani, come ne i solidi: ma perche ancora non si è parlato de' solidi, m'è parso bene porre quest'appendice nel fine del duodecimo Elemento.

Fine del Decimo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI
ELEMENTO VNDECIMO.

DEFINITIONI.

I.

Il Solido, ò corpo, è quello, che hà lunghezza, larghezza, e grossezza.

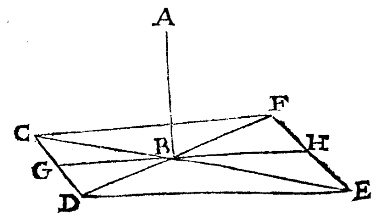
I I.

L'estremo del solido è la superficie.

I I I.

La linea retta si dice essere perpendicolare, ouero eretta al piano, quando concorrendo con vn solo estremo in quel piano, fà angoli retti con tutte le rette linee, che passano per il concorso, e giacciono in quel medesimo piano.

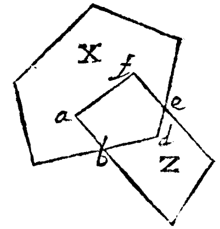
SI concepisca la retta linea AB eleuata, in modo, che concorra nel piano CDEF col solo estremo B, e dal punto B s'intendano distese nel piano CDEF quante rette linee si vogliano, come BC, BG, BD, BE, BH, BF, &c. se la retta AB farà angoli retti con tutte le nominate rette, e con tutte l'infinite altre, che dal punto B si distenderanno nel piano CDEF, la retta AB si dirà essere eretta, cioè perpendicolare, al piano CDEF.

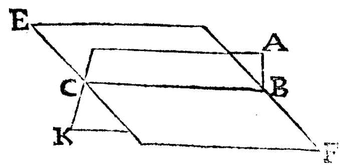


I V.

Il piano si dice essere eretto, ouero perpendicolare, al piano, quando tutte le rette, che giacciono in vn piano, facendo angoli retti con la commune settione, sono perpendicolari all'altro piano.

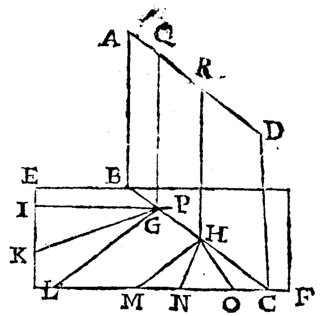
I piani si dicono essere diuersi frà loro, quando continuati non possono costituire vn sol piano. Per esempio le figure piane Z, ed X, benche si seghino scambieuolmente à causa, che parte dell'vna cade dentro dell'altra, con tutto ciò, hauendo vna parte commune, come la notata a b d e f, non sono in diuersi piani, ma costituiscono il solo piano Z X, in modo, che se i due piani Z, ed X saranno continuati da tutte le parti indeterminatamente, non saranno due piani distinti, ma costituiranno vn solo piano: e questi non si dicono piani diuersi, ma si dicono essere in vn medesimo piano. Quei piani poi, che, segandosi scambieuolmente, e continuati non costituiscono vn medesimo piano, si dicono essere piani diuersi; come sono i piani AC, EF, i quali si segano scambieuolmente, non hanno alcuna parte commune, e continuati non possono costituire vn sol piano. E perche ogni piano hà lunghezza, e larghezza, se due piani diuersi concorreranno scambieuolmente, ò concorreranno secondo la loro lunghezza, ouero secondo la loro larghezza, sì che in qualunque modo il loro commune concorso necessariamente sarà vna linea, come apparisce ne i piani diuersi AC, EF, che concorrono scambieuolmente, ed il loro commune concorso è la linea BC. Hor se i piani AC, EF si concepiranno continuati, non potendo costituire vn sol piano, stante, che gli supponiamo piani diuersi, la continuatione dell'vno sarà diuersa dalla continuatione dell'altro; cioè la continuatione CF, del piano EF caderà totalmente fuori del piano AK; e la continuatione BK, del piano AC, caderà totalmente fuori del piano EF, perche altrimente costituirebbero vn sol piano, ch'è contro all'ipotesi, mentre si suppongono essere piani diuersi; e perciò continuati si segaranno nella linea BC del concorso. E per l'auuenire la linea BC, ch'è commune segamento, si chiamerà commune settione de i piani, che scambieuolmente si segano; e si dice commune settione, stante che la linea BC





 giace

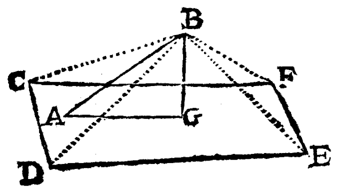
giace nel piano AC, e giace ancora nel piano EF. Suppoſto queſto, ſi conſiderino i piani diuerſi ABCD, & EF, i quali ſi ſeghino ſcambieuolmente, e la loro commune ſettione ſia la linea BC; ſi concepiſcano preſi nel piano ABCD quanti ſi voglia punti Q, R, da i quali ſi concepiſcano tirate le rette QG, RH, giacenti nel piano ABCD, e che facciano angoli retti con la commune ſettione BC; ſe le rette QG, RH, &c. ſaranno perpendicolari al piano EF, cioè ſe faranno angoli retti con tutte le infinite rette GI, GK, GL, HM, HN, HO, &c. che ſono diſteſe nel piano EF, il piano ABCD ſi dirà eſſer'eretto, cioè eſſere perpendicolare al piano EF.



V.

Quando vna retta linea, inclinata ad vn piano, concorre in quel piano ſolamente con vno de'ſuoi eſtremi, e da qualche punto di eſſa cade vn'altra retta, perpendicolare al medeſimo piano, e frà i punti, doue queſte due rette concorrono col detto piano, è tirata vna retta; l'angolo acuto, che ſi contiene da queſta, e dall'inclinata, ſi dice eſſere l'inclinatione, che hà la retta inclinata al piano.

La retta linea, che con vno de i ſuoi eſtremi concorre in vn piano, e non è perpendicolare al medeſimo piano, ſi dice eſſere inclinata à quel piano. Hor s'intenda la retta linea AB, inclinata al piano CDEF, la quale concorra col detto piano coll'eſtremo A; e da qualche punto B preſo nell'inclinata AB, cada la retta BG perpendicolare al piano CDEF, la quale concorra col piano CDEF in qualche punto G; tirata la retta AG, l'angolo acuto BAG, contenuto dall'inclinata BA, e dalla retta AG, ſi dice eſſere l'inclinatione, che hà la retta BA al piano CDEF.

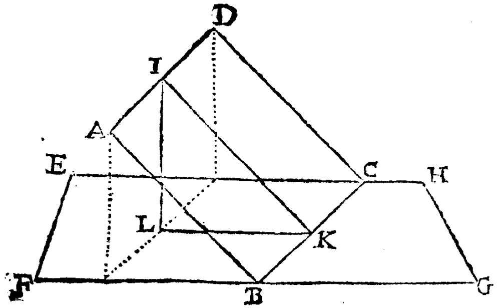


V I.

Quando dalla commune ſettione di due piani, che

ſcambieuolmente ſi ſegano non ad angoli retti, ſono tirate due rette linee, vna in vn piano, e l'altra nell'altro piano, le quali facciano angoli retti con la commune ſettione: l'angolo acuto, che ſi contiene da quelle rette, ſi dice eſſere l'inclinatione, che hà vno di quei piani all'altro.

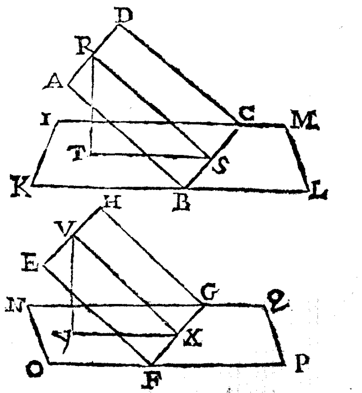
Vn piano ſi dice eſſere inclinato ad vn altro piano, quando concorrendo con quel piano, non lo ſega perpendicolarmente; come nella figura ſeguente il piano ABCD ſega il piano EFGH, e la commune ſettione è la linea BC. Se il piano ABCD non è perpendicolare al piano EFGH, ſi dirà il piano ABCD eſſere inclinato al piano EFGH; e preſo nella commune ſettione BC qualunque punto K, dal quale nel piano EG ſia diſteſa la retta KL, che faccia angoli retti con la commune ſettione BC, e dal medeſimo punto K nel piano ABCD ſia tirata la retta KI, che ſimilmente faccia angoli retti con la linea BC, l'angolo acuto IKL, che ſi contiene dalla retta IK, e dalla retta KL, è la quantità dell'inclinatione, che hà il piano ABCD al piano EFGH: e ſi chiama ancora angolo dell'inclinatione.



V I I.

I piani ſi dicono eſſere ſimilmente inclinati quando gli angoli delle loro inclinationi ſono frà di loro vguali.

S'intendano i piani ABCD, EFGH, inclinati à i piani IKLM, NOPQ, e le loro inclinationi ſiano gli angoli RST, VXY; Se gli angoli RST, VXY, ſono frà di loro vguali, i piani ABCD, EFGH, ſi diranno eſſere ſimilmente inclinati à i piani KLMI, NOPQ.



VIII.

Piani paralleli, ò equidistanti, sono quelli, che continuati da tutte le parti mai s'auuicinano, ne si scostano in luogo alcuno della loro infinita estensione.

Seguendo Euclide il medesimo ordine tenuto nel definire le rette parallele, definisce ancora quì il parallelismo de' piani per la negatiua del loro concorso; ma perche questa definitione patirebbe la medesima eccettione dell'altra, l'habbiamo noi definita, à similitudine della 34. definitione del primo, per la negatiua del loro scambieuole auuicinamento, e scostamento. Quale poi sia la positione, che deuono hauere i piani, acciòche continuati da tutte le parti mai scambieuolmente s'auuicinino, ne si scostino, si dimostrerà nella 14. propositione di questo Elemento.

I X.

Le figure solide simili sono quelle, che sono contenute da piani simili, e di numeri vguali.

X.

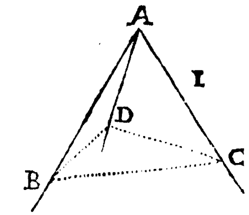
Le figure solide simili, ed vguali, sono quelle, che sono contenute da piani simili, ed vguali di numero, e grandezza.

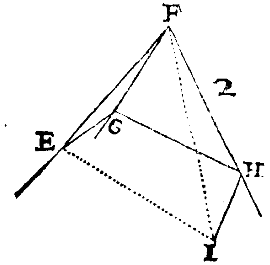
Quando i piani, che contengono vn solido, sono vguali di numero à i piani, che contengono vn altro solido, cioè che tante faccie siano in vno, per quante faccie sono nell'altro; se i piani, che contengono vno di quelli, sono simili à i corrispondenti piani, che contengono l'altro solido; quei solidi si dicono essere simili frà di loro, come si è spiegato nella nona definitione: se poi i piani, che contengono vno di quei solidi, sono simili, ed vguali à i corrispondenti piani, che contengono l'altro; quelli si dicono solidi simili, & vguali.

X I.

L'inclinatione di più di due rette linee, che non sono in vn medesimo piano, e concorrono in vn sol punto, si chiama angolo solido: Ouero, l'angolo solido è quello, ch'è contenuto da più di due angoli piani, che s'vniscono in vn sol punto, e non sono nel medesimo piano.

Nel soggetto piano BAC siano collocate le rette BA, CA, che concorrano scambieuolmente nel punto A, in modo, che costituiscano l'angolo piano

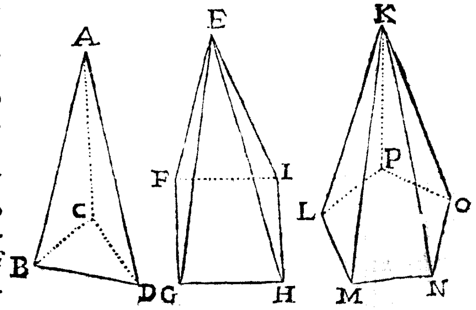




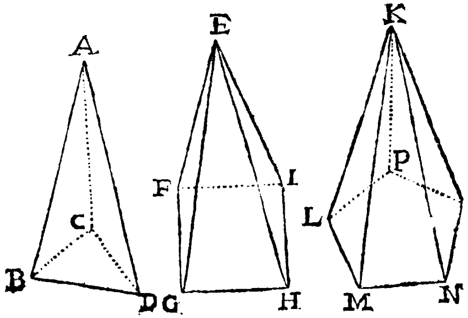
no BAC; s'intenda poi inclinata la retta AD in modo, che l'estremo A sia nel soggetto piano, e l'estremo D sia eleuato in alto, la retta AD farà angolo con la retta AC nel piano DAC, e farà ancora angolo con la retta AB nel piano DAB; e così haueremo i tre angoli DAC, DAB, BAC, collocati in diuersi piani, i quali s'vniscono nel medesimo punto A. Hor la scambieuole inclinatione delle rette BA, DA, CA, concorrenti nel punto A; ouero la scambieuole vnione, che gli angoli piani BAD, DAC, BAC, fanno nel punto A, si chiama angolo solido. Similmente, nella seconda figura; S'intendano le rette EF, IF, nel soggetto piano, le quali, concorrendo insieme, costituiscano l'angolo piano EFI; s'intendano poi inclinate le rette HF, GF, in modo, che con vno de i loro estremi concorrano in F, e gli altri estremi H, & G, siano eleuati in alto; la retta HF farà angolo con la retta IF, nel piano HFI; e farà angolo ancora con la retta FG, nel piano FGH. Finalmente la retta GF farà angolo con la retta EF, nel piano GFE, e farà angolo con FH, nel piano GFH; e così haueremo quattro angoli in diuersi piani, che sono gli angoli EFG, GFH, HFI, IFE, la di cui vnione nel punto F si chiama angolo solido, come si disse.

X I I.

Quando dagli estremi d'vn piano rettilineo si stendono piani rettilinei, in modo, che i contigui scambieuolmente si seghino, e le communi settioni concorrano in vn sol punto; il solido, contenuto da quei piani rettilinei, si chiama Piramide.



Da gli estremi del piano rettilineo DBC si concepiscano stendersi i piani rettilinei ABD, ADC, ABC, in modo, che i contigui ABD, ADC, scambieuolmente si seghino, secondo qualche linea AD: Similmente i contigui ADB, ABC, si seghino, e la commune settione sia AB; e si seghino ancora i cõtigui piani ABC, ACD, secondo la linea AC, e le communi settioni AD, AB, AC, concorrano nel solo punto A; la *figura solida, contenuta da i piani ABD, ADC, ABC, BDC, è quella, che si chiamerà Piramide. Similmente da gli estremi del piano FGHI, si stendano i piani EGH, EHI, EIF, EFG, in modo, che i contigui si seghino, e le communi settioni siano le linee EG, EH, EI, EF, le quali concorrano nel solo punto E, la figura solida EFGHI sarà ancora Piramide: ed il medesimo dobbiamo intendere del solido KLM NOP, e di qualunque altro, che habbia le medesime conditioni.*

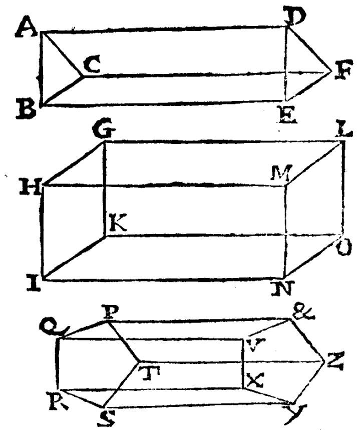


E nota, che se la base CBD è triangolo, il solido ABDC si chiamerà Piramide di base triangolare: se la base sarà quadrilatera, come FGHI, il solido EFGHI, si chiamerà Piramide di base quadrangolare, e con quest'ordine per le altre.

X I I I.

Il Prisma è la figura solida contenuta da piani, de' quali due, che sono opposti, sono frà loro vguali, simili, e paralleli; e gli altri sono tutti parallelogrammi.

Per esempio nella figura seguente, i piani opposti, cioè i triangoli ABC DEF, ouero i quadrangoli HIKG, MNOL; ouero i pentagoni PQRST, VXYZ&, siano simili, vguali, e paralleli, e gli altri siano parallelogrammi, come nella prima figura, i notati ACFD, ABED, BCFE; nella seconda figura i notati HMLG, HINM, GKOL, INOK; e nella terza figura i notati PQV&, PTZ&, QRXV, RSYX, SYZT: ogn'vno di questi solidi si chiama Prisma; cioè quello, le di cui faccie opposte sono triangoli, si chiama Prisma di base triangolare; e gli altri si dicono di basi quadrangolari, ò pentagonali, secondo il numero de i lati delle faccie opposte.



X I V.

La Sfera è il solido descritto dalla reuolutione del mez-

zo circolo, fatta intorno al suo diametro posto immobile, fin che ritorna nel luogo, d'onde partì.

Ouero, secondo Theodosio, è la figura solida, contenuta da vna sola superficie, alla quale tutte le rette, che vi cadono da vno de i punti di dentro, sono frà di loro vguali.

X V.

Asse della sfera è quella retta linea, intorno alla quale fù circonuoluto quel mezzo circolo, che descrisse la sfera.

X V I.

Il centro della sfera è quel medesimo punto, ch'è centro del detto mezzo circolo.

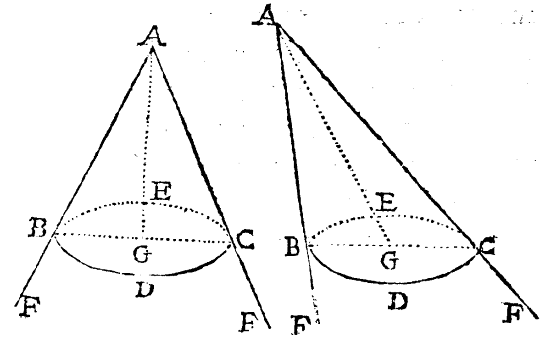
X V I I.

Il diametro della sfera è la retta linea, che passa per il centro, e termina con ambidue gli estremi nella superficie della sfera.

X V I I I.

Quando per qualche punto fisso in sublime, e per la circonferenza d'vn circolo, che non sia nel medesimo piano, passa vna retta linea indeterminata, la quale, stando fermo il punto in sublime, si muoua per la circonferenza di quel circolo, fin che ritorna nel luogo d'onde partì; la figura solida, contenuta dal circolo, e dalla superficie descritta dall'intiera reuolutione di quella retta linea, la chiameremo Cono.

Spiega Euclide la generatione del Cono con la reuolutione del triangolo rettangolo intorno ad vno de suoi lati, che contengono l'angolo retto: ma perche la definitione, che ne dà, non è così generale, come quella, che pone Apollonio Pergeo ne' suoi Elementi Conici, mi è parso bene, aderendo à quel che ne definisce il medesimo Apollonio, mutare la definitione d'Euclide, ed in suo luogo porne vn'altra più generale; la quale, benche non sia la medesima spiegata dal detto Appollonio, è nondimeno poco da quella differente, non parendomi necessario spiegare in questo luogo, che cosa sia superficie del Cono, e che cosa siano i Coni opposti, essendo materia, che appartiene totalmente alla dottrina *delle settioni Coniche, e come tale se ne parlerà al proprio luogo. E per spiegatione della soprapposta definitione, si consideri il circolo BDCE, ed il punto A fuori del piano BDCE; e dal punto A s'intenda tirata la retta AF, che passi per la circonferenza del circolo BDC, e posto il punto A immobile, s'intenda muouersi la retta linea AF in modo, che scorra per tutta la circonferenza BDCEB, finche ritorna nel luogo d'onde partì:*



il solido ABDCE, contenuto dal circolo BDCE, e dalla superficie descritta dalla intiera reuolutione della retta AF, per la circonferenza BDCE, è quello, che chiameremo Cono, il di cui vertice, ò cima, sarà il punto immobile A.

X I X.

Asse del Cono è la retta linea tirata dal vertice del Cono al centro di quel circolo, intorno al quale si fece la reuolutione; *che nella figura antecedente sarà la retta AG.*

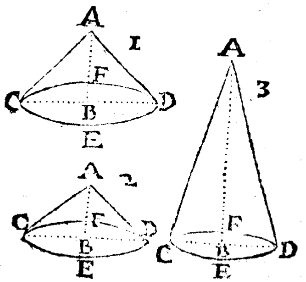
X X.

Base del Cono è quel medesimo circolo, intorno al quale si riuolge la retta linea, che descrisse il Cono; *che nella sopra posta figura è il circolo BDCE.*

Notisi, che quando l'asse AG è perpendicolare alla base BDCE, come nell'antecedente figura, il Cono ABDCE si chiama Cono retto; e se l'asse AG non è perpendicolare alla base BDCE, si chiama Cono scaleno. Di più ne i coni retti, se l'asse AB della seguente figura è vguale alla retta CB, ch'è semidiametro del circolo CD, sarà l'angolo BAC la metà d'vn

a 5. & 32. del 1. *angolo retto, [a] e tutto l'angolo CAD sarà retto; ed in tal caso il solido ACD si chiama Cono rettangolo come nella prima figura. Se poi l'asse AB è minore del semidiametro BC, come nella seconda figura, sarà l'angolo BAC*

b 18. & 32. del 1. *maggiore della metà d'vn angolo retto, [b] e tutto l'angolo CAD sarà ottuso, e perciò il Cono ACD si dice Cono ambligonio. E finalmente se l'asse AB è maggiore del semidiametro BC come nella terza figura l'angolo*

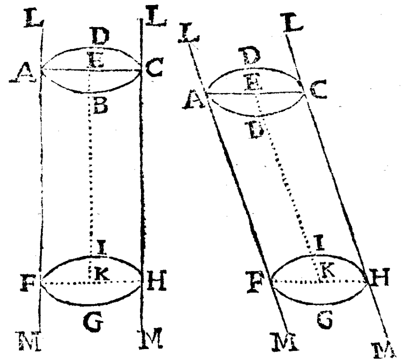


c 18. & 32. del 1. *CAB [c] sarà minore della metà d'vn angolo retto, e tutto l'angolo CAD sarà acuto, ed in quest'altro caso il Cono ACD si dice Cono ossigonio.*

X X I.

Quando due circoli, sempre equidistanti, si muouono intorno à i loro centri, posti immobili, in modo, che rapiscano quella retta linea indeterminata, che passa per li corrispondenti estremi di due loro diametri paralleli; il solido contenuto da quei due circoli, e dalla superficie descritta dalla reuolutione di quella retta, che passa per gli estremi de i detti diametri, fin che ritorna al luogo d'onde partì, lo chiameremo Cilindro.

Questa definitione ancora è più generale di quella, che pone Euclide, e l'habbiamo esposta alquanto differente da quella, che pone il Sereni nella sua settione del Cilindro à causa, che non fà bisogno in questi elementi definire, che cosa sia superficie Cilindrica, non parlandosi in modo alcuno delle settioni del Cilindro. E per chiarezza di quanto si è detto, si concepiscano i due circoli ABCD, FGHI, frà di loro equidistanti; i di cui centri siano i punti E, & K, & i diametri AC, FH, siano frà di loro paralleli; per li corrispondenti estremi A, ed F, de i diametri AC, FH, si concepisca passare la retta linea indeterminata LM, e s'intendano immobili i centri E, K, intorno à i quali si muouino i circoli ABCD, FGHI, in modo, che siano sempre equidistanti, e nella loro reuolutione rapiscano i diametri AC, FH, assieme con la retta LM, fin tanto, che la retta LM ritorni nel luogo donde partì; il solido contenuto da i circoli ABCD, FGHI, e dalla superficie descritta dall'intiera reuolutione della retta LM, sarà quello, che chiameremo Cilindro.



X X I I.

La retta linea, che congiunge i centri de circoli circonuoluti, si chiama Asse del Cilindro, *che nella figura antecedente è la retta EK.*

X X I I I.

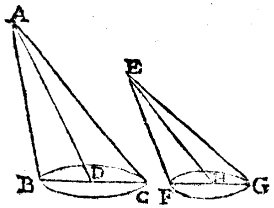
Basi del Cilindro si chiamano quei due circoli, che nella loro reuolutione descrissero il Cilindro, *come sono i circoli ABCD, FGHI.*

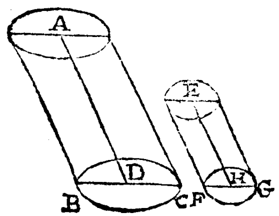
Quando l'aſſe EK è perpendicolare alle baſi ABCD, FGHI, il Cilindro AFHC ſi chiama Cilindro retto; e ſe l'aſſe EK non è perpendicolare alle baſi ABCD, FGHI, il ſolido AFHC ſi chiama Cilindro ſcaleno.

XXIV.

I Coni frà di loro, ed i Cilindri frà di loro, ſi dicono ſimili, quando ne i Coni, e Cilindri retti, le aſſi ſono proportionali à i Diametri delle baſi; e ne i Coni, e Cilindri ſcaleni, quando le inclinationi delle Aſſi alle baſi ſono frà di loro vguali, e le aſſi ſono proportionali à i diametri delle baſi.

Per eſempio ſe gli angoli co'i quali le Aſſi AD, EH, ſono inclinate alle baſi BC, FG, ſono frà di loro vguali, e la proportione dell'aſſe AD al diametro BC della baſe, è come l'aſſe EH al diametro FG della baſe; i Coni ſcaleni frà di loro, & i Cilindri ſcaleni frà di loro, ſi dicono eſſere ſimili. E ſe ſaranno coni retti, e cilindri retti, all'hora ſaranno ſimili, quando la proportione dell'aſſe AD al diametro BC della baſe, è come l'aſſe EH al diametro FG della baſe.





XXV.

Il Cubo, e la figura ſolida contenuta da ſei quadrati vguali.

XXVI.

Il Tetraedro è la figura ſolida, contenuta da quattro triangoli equilateri, & vguali frà loro.

XXVII.

L'Ottaedro è la figura ſolida, contenuta da otto triangoli equilateri, ed vguali.

XXVIII.

Il Dodecaedro è la figura ſolida contenuta da dodeci pentagoni vguali, equilateri, & equiangoli.

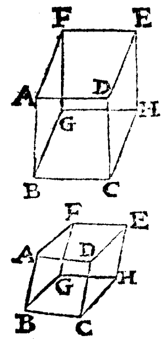
XXIX.

L'Icoſaedro è la figura ſolida, contenuta da vinti triangoli equilateri, ed vguali.

XXX.

Il Parallelepipedo è la figura ſolida contenuta da ſei figure quadrilatere, delle quali le oppoſte ſono frà di loro parallele.

Nella ſeguente figura il ſolido FBCE è contenuto da ſei quadrilateri, che ſono ABCD, BCHG, GHEF, ADEF, ABGF, DCHE, e gli oppoſti ſono paralleli, cioè il quadrilatero ABCD è parallelo al quadrilatero oppoſto FGHE, come ancora il quadrilatero ABGF è parallelo all'oppoſto DCHE, ed il quadrilatero ADEF è parallelo al ſuo oppoſto BCHG.



XXXI.

La figura ſolida ſi dice eſſere iſcritta nella figura ſolida, quando tutti gli angoli della figura iſcritta toccano, ò i lati, ò gli angoli, ò le faccie della figura, nella quale è iſcritta.

XXXII.

La figura ſolida ſi dice eſſere circoſcritta intorno alla figura ſolida, quando co'i ſuoi angoli, ò lati, ò faccie, tocca tutti gli angoli di quella figura, intorno alla quale è circoſcritta.

Nelle due antecedenti definitioni non è neceſſario, che tutti gli angoli della figura iſcritta tocchino, ò tutti gli angoli, ò tutti i lati, ò tutte le faccie della figura, alla quale è circoſcritta; ma baſta che alcuni tocchino gli angoli, altri tocchino i lati, ed altri le faccie; e finalmente, pur che gli angoli della figura interna tocchino tutti, non importa, che tocchino lati, ò angoli, ò faccie della figura eſterna.

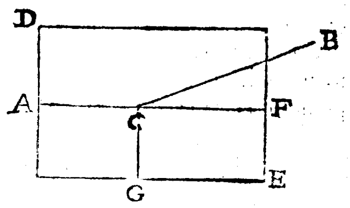
THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Non è poſſibile, che parte d'vna linea retta ſia distesa nel soggetto piano, e parte ne sia eleuata in sublime.

Nel piano DE, se è possibile, sia distesa parte della retta AB, come AC, e parte ne sia eleuata in sublime, come fà la retta CB, in modo, che AC sia totalmente distesa nel piano DE, e la parte CB sia totalmente eleuata. Si ponga nel piano DE la retta CG a ad angoli retti con la retta AC, e nel medesimo piano DE, nel punto C, si ponga la retta CF b ad angoli retti con CG. Perche le rette AC, CF, sono nel medesimo piano DE, e gli angoli GCA, GCF, sono retti, per la 14. del primo, le rette AC, CF, nel piano DE, costituiscono la sola retta linea AF: per il che AC è parte della retta AF: ma, per ipotesi, la medesima AC è parte della retta AB; la retta dunque AC sarà commune parte delle due rette AB, AF, che per l'annotatione dopo la 3. propositione del 1. al num. 2. è impossibile. Non dunque parte della retta AB è collocata nel soggetto piano DE, e parte eleuata in sublime, ch'era da dimostrarsi.

a 11. del 1.

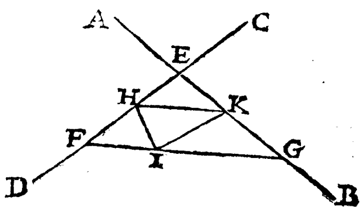
b 11. del 1.



THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se due rette linee si segano scambieuolmente, sono in vn medesimo piano; ed ogni triangolo è in vn medesimo piano.

Si seghino le rette AB, CD in qualche punto E, e preso nelle rette ED, EB, due qualunque punti F, & G, tirata la retta FG. Dico prima che il triangolo EFG è in vn medesimo piano. Se il triangolo EFG non è in vn medesimo piano, parte di esso ne sarà nel soggetto piano, e parte in sublime; sia nel soggetto piano la parte EHIG, ed il rimanente FHI sia in sublime, sarà della retta EF la parte EH nel soggetto piano, e la parte HF in sublime, ch'è contro all'antecedente propositione. Di nuouo, supposto che la parte EFIK sia nel soggetto piano, e la parte IKG in sublime, similmente sarà della retta EG la parte EK nel soggetto piano, e la parte KG in sublime, che per l'antecedente propositione è impossibile. Nell'istesso modo si dimostrerà, che nessun'altra parte del triangolo è in diuerso piano; e perciò tutto il triangolo EFG, è in vn medesimo piano, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



In oltre. Dico che le rette AB, CD sono in vn medesimo piano.

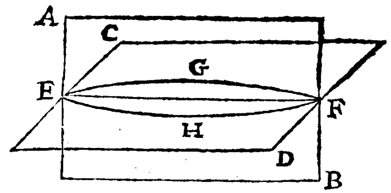
Perche

Perche si è dimostrato, che il triangolo EFG è in vn medesimo piano, i suoi estremi, cioè le rette EF, FG, GE, saranno nel medesimo piano, e tutta la retta GA sarà nel medesimo piano EFG; perche altrimente la parte EG sarebbe nel soggetto piano EFG, e la parte EA sarebbe in sublime, il che per l'antecedente propos. è impossibile. Per l'istessa ragione la retta DC è nel medesimo piano EGF. Per la qual cosa le rette AB, CD, che scambieuolmente si segano in qualche punto E, sono in vn medesimo piano, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se due piani si segano scambieuolmente, la loro commune settione è linea retta.

Si seghino scambieuolmente i piani AB, CD, e la loro commune settione sia la linea EF. Dico, che la linea EF è linea retta. Se EF non è linea retta, dal punto E al punto F si tiri vna retta linea; ò quella congrue con la linea E, ed in tal caso la linea EF è retta; ò pure non congrue con EF, e giace in vno de i due piani AB, CD. Sia prima collocata nel piano AB, come fà la linea EGF. Di nuouo dal punto E al punto F, nel piano CD, si tiri vna retta linea, la quale ò congruerà con EF, ed all'hora EF sarà retta linea; ò passerà fuori della linea EF, come fà la linea EHF. Perche le linee EGF, EHF, per costruttione, sono linee rette, ed ambedue concorrono ne i punti E, ed F, perciò chiudono figura, il che, per l'annotatione dopo la terza propos. del primo, al num. 3. è impossibile. Non dunque le linee EGF, EHF sono linee rette, ma la commune settione EF sarà linea retta, ch'era da dimostrarsi.



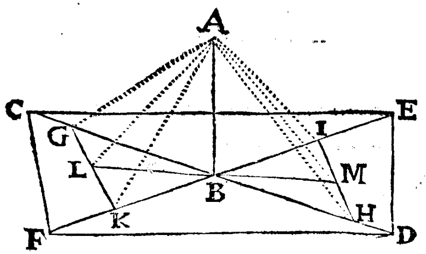
THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se nella commune intersegatione di due rette linee, che scambieuolmente si segano, sia eleuata vna retta linea, che faccia angoli retti con le rette, che si segano; quella sarà perpendicolare al piano, nel quale sono collocate le rette, che scambieuolmente si segano.

Si seghino le rette CD, FE, in qualche punto B; e nel punto B cada la retta AB, in modo, che faccia angoli retti con le rette CD, FE; cioè che gli angoli ABD, ABE, ABC, ABF, siano retti. Dico, che la retta AB è perpendicolare al piano CFDE, nel quale si suppongono collocate le rette

CD,

CD,EF. Perche le rette CD,
FE, si segano, per ipotesi, nel
punto B, saranno per la 2.
propos. di questo, in vn me-
desimo piano: sia quel piano
il notato CFDE; dalle rette
a 3. del 1. BE, BF [a] si taglino le vguali
parti BI,BK;e dalle rette BD,
BC, si taglino le vguali parti
BH,BG;e si tirino le rette HI,
KG. Si considerino i due triã-
goli GBK, IBH. Perche IB,



per costruttione, è vguale à BK, ed il lato HB è vguale à BG; i due lati
IB, BH, sono vguali à i due lati KB, BG, l'angolo IBH è vguale all'an-
b 4. del 1. golo al vertice GBK; [b] sarà la base IH vguale alla base GK; e l'angolo
BIH vguale all'angolo BKG. Per il punto B si faccia passare, nel piano
CD, qualunque retta MBL,in modo, che seghi le rette GK, IH, come in
L, ed M,e si considerino i due triangoli BKL,BIM. Perche l'angolo BKL
c 15. del 1. è dimostrato vguale all'angolo BIM, e l'angolo LBK [c] è vguale all'ango-
lo al vertice IBM; i due angoli LKB, LBK, del triangolo LBK, saranno
vguali à i due angoli MIB, MBI, del triangolo MBI; il lato KB, per co-
d 26. del 1. struttione, è vguale al lato BI, saranno gli altri due lati BL, LK, [d] vguali
à i due lati BM,MI;cioè il lato BL vguale al lato BM,ed il lato KL vgua-
le al lato IM. Si tirino le rette AG,AL,AK,AH,AM,AI.

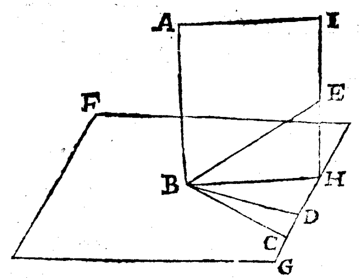
E si considerino i due triangoli ABK, ABI. Essendo il lato BK, per co-
struttione, vguale al lato BI,ed il lato AB è commune, i due lati AB,BK,
saranno vguali à i due lati AB,BI; l'angolo ABK,per ipotesi,è vguale all'
e 4. del 1. angolo ABI, stante che l'vno, e l'altro è retto; perciò la base AK [e] sarà
vguale alla base AI. Nell'istesso modo, considerando i triangoli ABH,
ABG,si dimostrerà,che il lato AH è vguale al lato AG.Si considerino poi
i triangoli AKG,AIH, de'quali i due lati AI, IH, per quel che si è dimo-
strato, sono vguali à i due lati AK, KG, la base AH è dimostrata vguale
f 8. del 1. alla base AG, e perciò l'angolo AIH [f] sarà vguale all'angolo AKG. Di
più ne'triangoli AKL,AIM, i due lati AK,KL sono stati dimostrati vguali
à i due lati AI, IM; l'angolo AKL è dimostrato vguale all'angolo AIM;
g 4. del 1. sarà la base AM [g] vguale alla base AL. Finalmente si considerino i due
triangoli ABL, ABM. Perche il lato BM è dimostrato vguale al lato BL,
ed il lato AB è commune ad ambidue i triangoli; saranno i due lati AB,
BM, vguali à i due lati AB,BL; la base AM è dimostrata vguale alla base
h 8. del 1. AL,sarà l'angolo ABM [h] vguale all'angolo ABL: per la qual cosa gli an-
K 10. def. del 1. goli ABM, ABL [K] sono retti, e la retta AB è perpendicolare alla retta
LM. Nell'istesso modo prouaremo, che la retta AB è perpendicolare à
qualunque altra retta, che passa per il punto B, e giace nel piano CFDE;
e perciò la retta AB è perpendicolare à tutte le infinite rette linee, che
passano per il punto B,e giacciono nel piano CD; ed in conseguenza sarà
AB perpendicolare al piano CFDE, che passa per quelle infinite rette li-
l 3. def. del 11. nee: ma le rette CD,EF sono nel piano CFDE,sarà la retta AB [l] perpen-

dicolare al piano, nel quale sono distese le rette CD, FE, ch'era da di-
mostrarsi.

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea cade nella commune intersegatione di tre rette linee, e fà angoli retti con tutte tre quelle; le medesime tre rette linee sono in vn medesimo piano.

Si seghino scambieuolmente le tre rette linee EB,DB,CB, in qualche
punto B, nel quale cada la retta AB, in modo,che gli angoli ABE, ABD,
ABC, siano retti. Dico, che le rette BC, BD, BE, sono in vn medesimo
piano. Se non sono in vn medesimo piano,perche due di quelle,prese in
qualunque modo,sono in vn me-
desimo piano; siano le due BD,
BC, nel piano FG,e la retta BE,
se è possibile,sia in sublime. Per-
che la retta AB fà angoli retti
con le due BD,BC, per l'antece-
dente propos. la retta AB sarà
perpendicolare al piano FG, nel
quale giacciono le due BD, BC.
In oltre le due AB,BE,segandosi
in B, [a] sono in vn medesimo pia- a 2. del 11.
no;sia quel piano il notato ABEI,
il quale continuato passerà per il



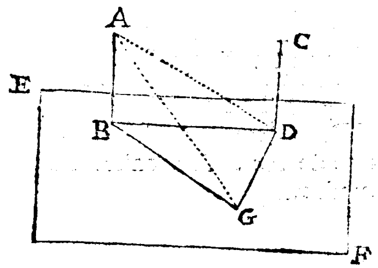
punto B: e perche il punto B è nel piano FG, perciò il piano ABE, conti-
nuato,passando per il punto B,segarà il piano FG;sia la commune settione
la linea BH; sarà BH [b] linea retta, distesa nel piano FG, e le tre AB,BE, b 3. del 11.
BH sono nel medesimo piano ABH: fù dimostrata la retta AB perpendi-
colare al piano FG,sarà l'angolo ABH [c] retto: ma l'angolo ABE,per ipo- c 3. def. del 11.
tesi,è retto, l'angolo dunque ABE sarà vguale all'angolo ABH; la parte è
vguale al tutto,ch'è impossibile. Non dunque le rette BC,BD,BE sono in
diuersi piani, ma sono in vn medesimo piano, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se due rette linee sono perpendicolari ad vn medesimo piano, quelle sono frà di loro parallele.

Siano le rette AB, CD, perpendicolari al piano EF. Dico, che le rette
AB,CD, sono frà di loro parallele. Dal punto D al punto B si tiri la retta
BD.Perche i punti B,& D,sono nel piano EF,sarà la retta BD nel mede-
mo piano EF:dal punto D nel piano EF, [a] si tiri la retta DG,in modo,che a 11. del 1.

l'angolo GDB sia retto; si faccia DG [b] vguale ad AB, e si tiri la retta BG. Perche le rette AB, CD, per ipotesi, sono perpendicolari al piano EF, e le rette BD, DG, GB, sono nel piano EF, gli ãgoli CDG, CDB, ABG, ABD, [c] saranno angoli retti. Si tirino le rette AG, AD; e si considerino i due triangoli GDB, ABD. Perche il lato DG è fatto vguale al lato AB, ed il lato BD è cõmune, i due lati dũque GD, DB, del triangolo GDB, sono vguali à i due lati AB, BD, del triangolo ABD, l'angolo GDB è vguale all'angolo ABD, stante che sono retti; sarà la base BG [d] vguale alla base AD. In oltre si considerino i due triangoli ABG, ADG; essendo il lato AB, per costruttione, vguale al lato GD, ed il lato BG è dimostrato vguale al lato AD; i due lati AD, DG, del triangolo ADG, saranno vguali à i due lati GB, BA, del triangolo GBA; la base AG è commune, sarà l'angolo ABG [e] vguale all'angolo ADG: ma l'angolo ABG è dimostrato retto, l'angolo dunque ADG sarà retto. Si considerino le tre rette DC, DA, DB, che si segano nel punto D. Essendosi dimostrati gli angoli GDC, GDA, GDB, retti, le tre rette DC, DA, DB, per l'antecedente propos. sono in vn medesimo piano; ma la retta AB è nel piano del triangolo ABD, cioè nel piano, doue sono distese le rette AD, BD, in conseguenza le rette AB, BD, AD, CD, sono in vn medesimo piano. Finalmente perche le rette AB, CD, sono in vn medesimo piano segate dalla retta BD, & i due angoli interni ABD, CDB, per quel che si è dimostrato, sono retti, saranno le rette AB, CD [f] frà di loro parallele, ch'era da dimostrarsi.



b 3. del 1.

c 3. de fin. del 11.

d 4. del 1.

e 8. del 1.

f 28. del 1.

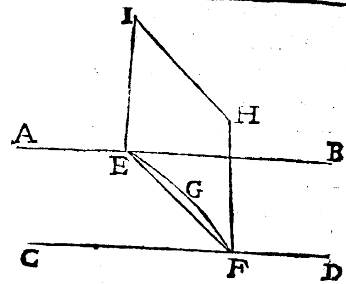
THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se frà due punti, presi in due rette parallele, è tirata vna linea retta, quella sarà nel medesimo piano con le proposte parallele.

Siano le due rette parallele AB, CD, nelle quali siano presi due qualunque punti E, ed F, e dal punto E al punto F sia tirata la retta EF. Dico che la retta EF è nel medesimo piano con le parallele AB, CD. Perche le rette AB, CD sono, per ipotesi, parallele, per la 34. defin. del primo, sono in vn medesimo piano; se la retta EF non è nel piano ABCD, sia, se è possibile, in qualche altro piano, fuori del piano ACBD; per li punti E, ed F, si faccia passare vn'altro piano, che seghi il piano ACDB, e la commune settione sia la linea EGF; sarà la commune settione EGF [g] linea retta: e perche le rette EGF, & EF, concorrono insieme ne i punti E, ed F, perciò

g 3. del 11.

chiudono figura, che per l'annotatione dopo la terza del primo lib. num. 3. è impossibile. Non dunque la retta EF è in altro piano, fuori del piano ACDB: ma è nel medesimo piano ACDB, doue sono distese le parallele AB, CD, ch'era da dimostrarsi.



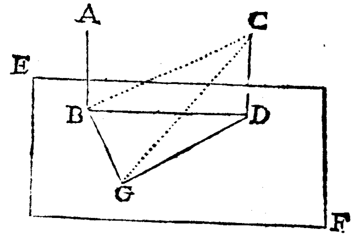
S C O L I O.

Se le rette linee AB, CD, non fossero parallele, se saranno collocate in vn medesimo piano, la retta EF, ed ogn'altra, che le congiunge sarà ancora nel medesimo piano colle rette AB, CD, e la dimostratione è la medesima.

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se due rette linee sono frà di loro parallele, ed vna di quelle è perpendicolare ad vn piano; ancora l'altra è perpendicolare al medesimo piano.

Siano le rette AB, CD, frà di loro parallele, e la retta CD sia perpendicolare al piano EF. Dico, che ancora AB è perpendicolare al piano EF. Si continui la retta AB, fin che concorra col piano EF in qualche punto B; dal punto B al punto D si tiri la retta BD: essendo i punti B, & D, nel piano EF, sarà la retta BD nel medesimo piano EF; dal punto B nel piano EF si tiri la retta BG, [a] in modo, che l'angolo GBD sia retto; si faccia GB [b] vguale alla retta CD, e si tiri la retta GD. Perche la retta CD, per ipotesi, è perpendicolare al piano EF, gli angoli CDB, CDG, [c] sono retti. Si tirino le rette CB, CG, e si considerino i due triangoli CDB, GBD. Perche il lato GB, per costruttione, è vguale al lato CD, ed il lato BD è commune; i due lati CD, DB, del triangolo CDB, sono vguali à i due lati GB, BD, del triangolo GBD; l'angolo CDB è vguale all'angolo GBD, stante che sono retti, sarà la base CB [d] vguale alla base GD. Similmente si considerino i due triangoli CDG, CBG, de'quali il lato GB, per costruttione, è vguale al lato CD, il lato



a 11. del 1.

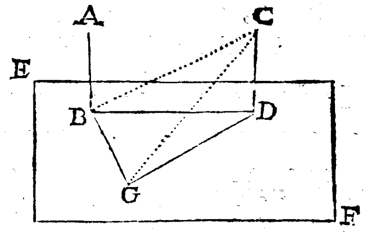
b 3. del 1.

c 3. defin. del 11.

d 4. del 1.

GD è dimoſtrato vguale al lato CB; i due lati dunque CD, DG, ſono vguali à i due lati GB, BC; la baſe CG è commune, ſarà l'angolo CDG [e] vguale all'angolo CBG: ma l'angolo CDG è dimoſtrato retto, l'angolo dunque CBG ſarà retto: per coſtruttione l'angolo GBD è retto, perciò la retta GB, facendo angoli retti colle due BD, BC, ſarà [f] perpendicolare al piano BDC, nel quale ſono le rette BD, BC. In oltre, perche le rette AB, CD, per ipoteſi, ſono parallele, e ſono ſegate dalle rette BC, BD, per l'antecedente propoſitione, le rette BC, BD, ſaranno nel medeſimo piano con le parallele AB, CD: ma la retta GB è dimoſtrata perpendicolare al piano CBD; ſarà dunque GB perpendicolare al piano ABDC, e perciò l'angolo ABG [g] ſarà retto. Finalmente perche le rette AB, CD ſono parallele, ſegate dalla retta BD, i due angoli ABD, CDB [h] ſono vguali à due angoli retti, ma l'angolo CDB è dimoſtrato retto, ſarà l'angolo ABD retto. E perche l'angolo ABG fù dimoſtrato retto, ſarà la retta AB perpendicolare alle due rette BD, BG; e perciò ſarà perpendicolare [K] al piano, doue ſono le due GB, BD, cioè ſarà perpendicolare al piano EF, come fù propoſto dimoſtrare.

e 8. del 1.
f 4. del 11.
g 3. defin. del 11.
h 29. del 1.
K 4. del 11.

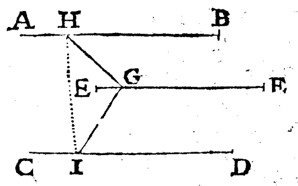


THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se due rette linee ſono parallele ad vn altra retta linea, che non è nel medeſimo piano, quelle due ſono frà di loro parallele.

Siano le due rette AB, CD parallele alla retta EF, e non ſiano tutte tre in vn medeſimo piano. Dico che le rette AB, CD ſono frà di loro parallele. Perche le rette EF, AB ſono frà di loro parallele, per la natura delle parallele, le due AB, EF, ſono in vn medeſimo piano: e per l'iſteſſa ragione le parallele EF, CD ſono in vn medeſimo piano. Si prenda in EF qualche punto G, dal quale, nel piano EFBA, ſi tiri la retta GH, [a] in modo, che faccia angoli retti colla retta EF, e dal medeſimo punto G nel piano ECDF, ſi tiri la retta GI, ad angoli retti con la medeſima retta EF: Si prolunghino le rette GH, GI, ſin che concorrano con le due AB, CD come in H, ed I: Eſſendo per coſtruttione, gli angoli EGH, EGI, retti, ſarà la retta EG [b] perpendicolare al piano HGI, doue ſono le rette HG, GI; E perche le rette AH, EG, per ipoteſi, ſono frà loro parallele, e la

a 11. del 1.
b 4. del 11.



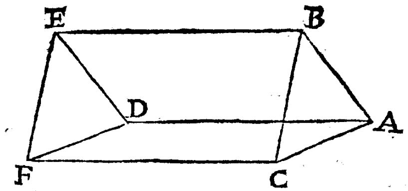
retta

retta EG è dimoſtrata perpendicolare al piano HGI; ſarà la retta AH [c] perpendicolare al medeſimo piano HGI. Similmente, perche le rette EG CI, per ipoteſi, ſono parallele, e la retta EG è perpendicolare al piano HGI, ſarà la retta CI [d] perpendicolare al medeſimo piano HGI, dal che le due rette AH, CI ſono perpendicolari al medeſimo piano HGI, e per la 6. propoſitione di queſto, le rette AH, CI, cioè le due AB, CD, ſono frà di loro parallele, ch'era da dimoſtrarſi.

c 8. del 11.
d 8. del 11.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se due rette linee, che ſcambieuolmente concorrono, ſono parallele à due altre rette linee, che ſimilmente concorrono, e ſiano collocate in diuerſi piani, in modo, che i concorſi ſi corriſpondano dalla medeſima parte; quelle rette linee conterranno angoli vguali.



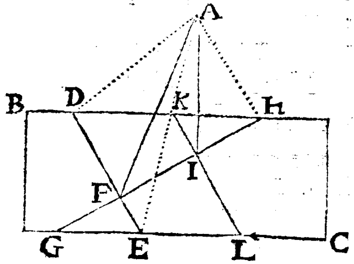
Siano le rette AB, CB, che concorrano ſcambieuolmente in qualche punto B, le quali ſiano parallele alle due DE, FE, che concorrono nel punto E; cioè AB ſia parallela à DE; e la retta CB ſia parallela ad FE, in modo, che le due AB, CB, non ſiano nel medeſimo piano, nel quale ſono le due DE, FE, e che i concorſi B, & E ſiano collocati dalla medeſima parte EB. Dico che l'angolo ABC è vguale all'angolo DEF. Si taglino le rette BA, ED [a] frà di loro vguali, e ſi faccia EF vguale à BC; ſi tirino le rette AC, DF, FC, DA, EB. Perche le due BA, ED ſono frà di loro vguali, e parallele, ſaranno le rette EB, DA, [b] frà di loro vguali, e parallele. Similmente, eſſendo le due BC, EF, frà di loro vguali; e parallele, ſaranno le due FC, EB, [c] frà di loro vguali, e parallele. Hor eſſendo FC vguale, e parallela ad EB, e la retta DA è vguale, e parallela alla medeſima EB; le due FC, DA [d] ſaranno frà di loro vguali, e parallele: dal che le rette DF, AC, che le congiungono, [e] ſono frà di loro vguali, e parallele. Si conſiderino i triangoli ABC, DEF: perche i lati AB, BC, per coſtruttione, ſono vguali à i due lati DE, EF, e la baſe CA è dimoſtrata vguale alla baſe FD, ſarà l'angolo CBA [f] vguale all'angolo FED, come fù propoſto dimoſtrare.

a 3. del 1.
b 33. del 1.
c 33. del 1.
d 9. del 11.
e 33. del 1.
f 8. del 1.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XI.

Da vn dato punto in ſublime far cadere vna retta perpendicolare al ſoggetto piano.

Sia

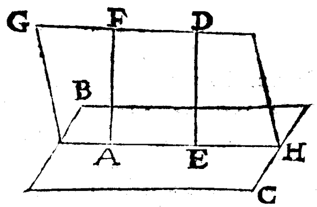


Sia A il dato punto in sublime, ed il soggetto piano BC ; si vuole dal punto A far cadere vna retta perpendicolare al soggetto piano BC. Si tiri nel piano DC qualunque retta linea DE ; per il punto A, e per la retta DE, si concepisca passare il piano ADE, nel quale dal punto A sia tirata la retta AF, [a] che faccia angoli retti colla retta DE. Se la retta AF è perpendicolare al piano BC, sarà la retta AF quella perpendicolare, che si cerca : ma se AF non è perpendicolare al piano BC, per il punto F, nel piano BC, si faccia passare la retta GFH [b] ad angoli retti con la retta DE ; poi, per le rette AF, FH, si concepisca passare il piano AFH, e dal punto A si tiri nel piano AFH la retta AI, [c] ad angoli retti con la retta FH. Dico che la retta AI è perpendicolare al piano BC. Per il punto I si faccia passare la retta LK, [d] parallela alla retta DE. Perche gli angoli DFA, DFH, per costruttione, sono retti, sarà la retta DF perpendicolare alle due rette FA, FH ; e perciò sarà perpendicolare [e] al piano AFH. In oltre, essendo, per costruttione, la retta KI parallela ad FD, e la retta FD è dimostrata perpendicolare al piano AFH, sarà la retta KI [f] perpendicolare al medesimo piano AFH : ma la retta AI è nel piano AFH, l'angolo dunque AIK sarà retto ; fù fatto, per costruttione, l'angolo AFI retto ; sarà la retta AI perpendicolare alle due rette KI, IF, e perciò [g] sarà perpendicolare al piano, doue giacciono le rette KI, IF: ma le rette KI, IF, per costruttione, sono nel piano BC ; la retta dunque AI sarà perpendicolare al piano BC, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 12. del 1.
b 11. del 1.
c 12. del 1.
d 31. del 1.
e 4. del 11.
f 8. del 11.
g 4. del 11.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XII.

Dato vn punto in vn piano, eriggere in quel punto vna retta perpendicolare al dato piano.



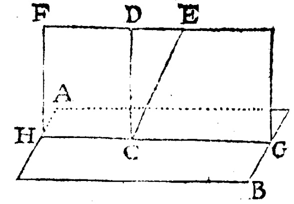
Sia il dato punto A nel piano BC, e si voglia nel punto A eriggere vna retta perpendicolare al dato piano BC. Si prenda qualche punto in sublime, come il punto D, dal quale, per l'antecedente propositione, si faccia cadere la retta DE perpendicolare al piano BC ; se la retta DE cade nel punto A, sarà DE la perpendicolare, che si cerca : ma se non cade nel punto A ; dal punto E al punto A si tiri la retta EA, e per le rette DE, EA, si concepisca passare il piano GH ; poi dal punto A si tiri la retta AF [a] parallela alla retta DE. Dico che la retta FA è perpendicolare al piano BC. Perche le rette FA, DE, per costruttione sono frà di loro parallele ; e la retta DE è perpendicolare al piano BC, sarà la retta FA [b] perpendicolare al medesimo piano BC, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

a 31. del 1.
b 8. del 11.

THEO-

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XIII.

Non è possibile, che da vn medesimo punto, preso in vn piano, si possano tirare dalla medesima parte due rette linee perpendicolari all'istesso piano.



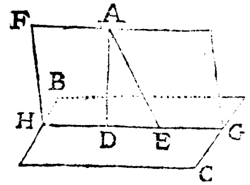
Nel piano AB sia preso qualche punto C, nel quale sia eleuata la retta CD perpendicolare al piano AB. Dico essere impossibile, che nel medesimo punto C, e dalla medesima parte DE, si possa eleuare altra retta perpendicolare al medesimo piano AB. Si eleui, se è possibile, nel punto C la retta CE, perpendicolare al piano AB. Perche le rette, DC, EC, si segano in C, perciò sono [a] in vn medesimo piano ; sia quello il piano DCE, il quale continuato segarà il piano AB in qualche linea HG ; essendo HG commune settione de i piani FG, AB, sarà HG [b] linea retta ; E perche la retta DC, per ipotesi, è perpendicolare al piano AB, l'angolo DCG [c] sarà retto. Similmente la retta EC, per la fatta suppositione, è perpendicolare al piano AB, dal che l'angolo ECG [d] sarà retto : ma l'angolo DCG è dimostrato retto, sarà l'angolo ECG vguale all'angolo DCG ; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque dal medesimo punto C si possono tirare dalla medesima parte DE due rette perpendicolari al medesimo piano AB, ch'era da dimostrarsi.

a 2. del 11.
b 3. del 11.
c 3. defin. del 11.
d 3. defin. del 11.

Il medesimo si dimostra più breuemente in questo modo. Si eriggano, s'è possibile, nel medesimo punto C le due rette CD, EF, perpendicolari al piano AB. Perche le due rette DC, EC sono perpendicolari al medesimo piano AB, perciò sono [e] frà di loro parallele ; ma, per ipotesi, le rette DC, EC concorrono nel punto C; sarebbero parallele, e concorrerebbero, ch'è impossibile. Non dunque &c. ch'era da dimostrarsi.

e 6. del 11.

SCOLIO DEL CLAVIO.



Nell'istesso modo si può dimostrare, che da qual che punto A, in sublime non possono cadere due rette perpẽ dicolari al medesimo piano. Dal medesimo pũto A, se è possibile, cadano le rette AD, AE perpendicolari al piano BC. Perche le rette AD, AE, si segano in A, perciò sono [g] in vn medesimo piano, sia quello il piano FG, il quale continuato seghi il piano BC, e la commune settione sia [h] la retta HG. Perche le rette AD, AE sono perpendicolari al piano BC, gli angoli ADE, AED [k] sono retti; dal che due angoli d'vn triangolo non sono minori di due retti, ch'è contro alla 17. propositione del primo. Non dunque da vn medesimo punto in sublime può cadere più d'vna retta perpendicolare ad vn medesimo piano, ch'era da dimostrarsi.

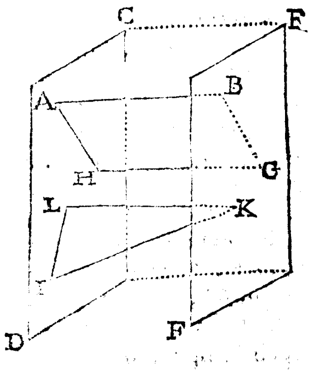
g 2. del 11.
h 3. del 11.
K 3. defin. del 11.

LEM-

L E M M A.

Se vna retta linea è perpendicolare à due piani, tutte le altre rette, che ſono perpendicolari ad vno di quei piani, ſono ancora perpendicolari all'altro piano; le dette perpendicolari ſono frà di loro vguali; ed ogn'vna è la minima di tutte le altre interpoſte frà quei piani; e non ſono perpendicolari à i medeſimi piani.

Sia la retta AB perpendicolare à i piani CD, EF, e preſo nel piano EF, qualunque punto G, dal quale ſia tirata la retta GH perpendicolare al piano CD. Dico prima che GH è perpendicolare al piano EF. Si tirino le rette AH, BG. Perche le rette GH,
BA ſono perpendicolari al piano
a 3. defin. del 11. *CD, gli angoli GHA, BAH,* [a]
ſono retti, e perciò le rette BA,
b 28. del 1. *GH,* [b] *ſono frà di loro paralle-*
le; ma AB è ſuppoſta perpendi-
colare al piano EF, ſarà la ret-
c 8. del 11. *ta HG, che gli è parallela,* [c] *per-*
pendicolare al medeſimo piano EF.
Nell' iſteſſo modo ſi dimoſtrerà,
che ogn'altra retta linea perpen-
dicolare ad vno de i piani CD,
EF, è ancora perpendicolare all'
altro piano, ch'era da dimoſtrarſi
nel primo luogo.



Di nuouo. Dico che la perpen-
dicalare GH è vguale ad AB.
Perche la retta AB è perpendicolare ad ambidue i piani CD, EF, gli angoli
d 3. defin. del 11: *HAB, GBA,* [d] *ſono retti, dal che le rette GB, HA* [e] *ſono frà di loro paral-*
e 28. del 1. *lele, ed il quadrilatero AHGB* [f] *è parallelogrammo; e ſarà HG* [g] *vguale*
f 35. defin. del 1. *al lato oppoſto AB. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che ogn' altra retta in-*
g 34. del 1. *terpoſta frà i piani CD, EF, perpendicolare à i medeſimi, è vguale alla per-*
pendicolare AB; e perciò tutte ſono frà di loro vguali, ch' era da dimoſtrarſi
nel ſecondo luogo.

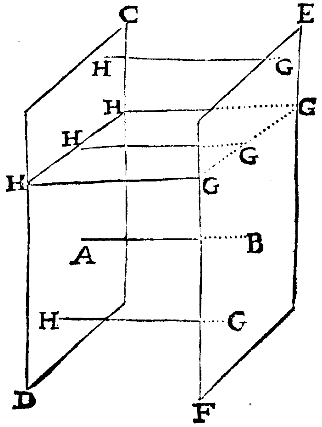
Finalmente, Dico, che ogn'vna delle perpendicolari, come AB, è la minima di qualunque altra retta interpoſta frà i piani CD, EF, la quale non ſio perpendicolare ad alcuno di eſſi piani CD, EF. Frà i piani CD, EF, s'interponga qualunque retta IK, non perpendicolare à i piani CD, EF; dal
h 11. del 11. *punto K ſi tiri la retta KL* [h] *perpendicolare al piano CD; per quel che ſi è di-*
moſtrato nella prima parte, ſarà KL perpendicolare al piano EF, e per l'antecedente dimoſtratione, ſarà KL vguale ad AB; ſi tiri la retta IL. Eſſen-

do la retta KL, per coſtruttione, perpendicolare al piano CD, l'angolo
KLI [K] *ſarà retto; e perciò l'angolo KIL* [l] *ſarà minore dell'angolo KLI, ed il* K 3. defin. del 11.
lato KL [m] *ſarà minore del lato IK: ma la retta KL fù dimoſtrata vguale* l 17. del 1.
ad AB; ſarà la perpendicolare AB minore di KI. Nell'iſteſſo modo ſi dimo- m 19. del 1.
ſtrerà, che AB è minore d'ogn'altra retta interpoſta frà i piani CD, EF, la quale non ſia perpendicolare à i medeſimi piani. Per la qual coſa la perpendicolare AB ſarà la minima, com e fù propoſto dimoſtrare.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XIV.

Se vna retta linea è perpendicolare à due piani, quei due piani ſono frà di loro paralleli.

Sia la retta AB perpendicolare à i piani CD, EF. Dico che i piani CD, EF, ſono frà di loro paralleli. Si prenda nel piano EF qualunque
punto G, dal quale ſi tiri la retta GH [a] a 11. del 11.
perpendicolare al piano CD; ſarà GH, per l'antecedente Lemma, perpendicolare al piano EF, e ſarà vguale ad AB; ed ogn'vna delle rette AB, GH, ſarà quella, che diſegna il minimo interuallo, ò diſtanza frà i piani CD, EF; ſe concepiremo continuati i piani CD, EF, da tutte le parti indeterminatamente, e da gl'infiniti punti, che ſi poſſono immaginare nel piano EF, cadano rette linee perpendicolari al piano CD, quelle tutte ſono perpendicolari al piano EF, ogn'vna diſegna il minimo interuallo frà i piani CD, EF, e ſono tutte frà di loro vguali: per la qual coſa i piani CD, EF, continuati in infinito, in neſſun luogo della loro eſtenſione s'auuicinano, o ſi ſcoſtano, e per la definitione ottaua di queſto, i piani CD, EF, ſono frà di loro paralleli, come fù propoſto dimoſtrare.

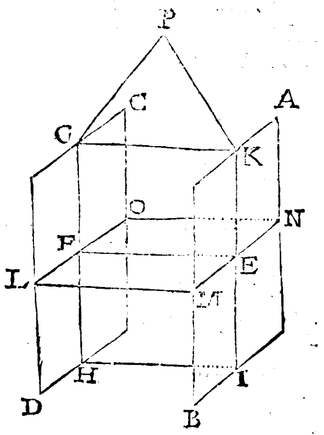


S C O L I O.

La conuerſa all'antecedente propoſitione, ſi farà nel ſeguente modo.

Se due piani ſono frà di loro paralleli, la retta, ch'è perpendicolare ad vno di eſſi, ſarà ancora perpendicolare all'altro.

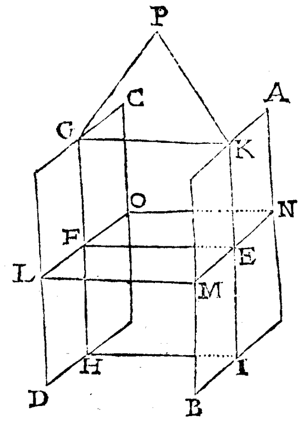
Siano i piani paralleli AB,CD, e la retta EF, interposta frà essi, sia perpendicolare al piano CD. Dico che la medesima retta EF è perpendicolare al piano AB. Per la retta EF si faccia passare il piano LMNO, che seghi i piani AB,CD, secondo la loro larghezza, e le communi settioni a 3.del 11. *siano* [a] *le rette linee MN,LO. Di nuouo per la retta FE s'intenda passare vn altro piano, come GHIK, che seghi i piani AB, CD, secondo la loro lunghezza, e le com-* b 3. del 11. *muni settioni siano le rette* [b] *IK,HG. Perche la retta EF, per ipotesi, è perpendico-* c 3.def. del 11. *lare al piano CD, gli angoli EFG, EFO,* [c] *sono retti. In oltre, perche la retta EF fà angoli con le rette EN, EK, se gli angoli FEN, FEK sono retti, la retta FE sarà* d 4. del 11. *perpendicolare* [d] *al piano AB, ch'è il nostro proposto. Se poi gli angoli FEN, FEK, non sono ambidue angoli retti, vno di quelli ò sarà minore, ò maggiore del retto. Sia prima l'angolo FEK minore del retto: saranno i due angoli GFE,KEF, minori di due angoli retti, e per lo Scolio dopo la 31. del primo, le rette EK,FG, continuate, concorrono in qualche punto P. Perche la retta EK* e 1. del 11. *è nel piano AB, sarà tutta la retta EKP* [e] *nel medesimo piano AB, altrimente la parte EK sarebbe nel piano AB, e la parte KP sarebbe in altro piano, ch'è contro alla prima propositione di questo. Hor essendo la retta EKP tutta nel piano AB, continuato il piano AB, passerà per il punto P. E per l'istessa ragione, continuato il piano CD passerà per il medesimo punto P; dal che i piani AB,CD, concorreranno insieme nel punto P, ch'è contro all'ipotesi, mentre gli habbiamo supposti paralleli. Non dunque l'angolo FEK è minore del retto. Se l'angolo FEK fosse maggiore del retto, il supplemento, cioè l'angolo FEI, sarebbe minore del retto: e procedendosi come prima, si mostrerà, che i piani AB,CB, continuati concorreranno dalla parte DB. Non dunque gli angoli FEK,FEI, sono ineguali, ma sono angoli retti. Nell'istesso modo si prouerà, che gli angoli FEN,FEM, sono retti; dal che la retta FE è perpendicolare al piano AB, ch'era da dimostrarsi.*



Per facilitare i modi del dimostrare, aggiungo il seguente Theorema.

Se due piani non sono paralleli, continuati concorreranno da qualche parte; e se due piani, continuati da tutte le parti, mai concorrono, quelli sono frà di loro paralleli.

Siano prima i due piani AB,CD, non paralleli. Dico che continuati concorreranno scambieuolmente da qualche parte. Si prenda nel piano AB qualche punto E, dal quale cada la retta EF [a] *perpendicolare al piano CD,* a 11.del 11. *e si faccia la medesima costruttione dell'antecedente Theorema; gli angoli EFG,EFO* [b] *saranno retti;* b 3. defin. del 11. *se gli angoli FEK,FEN sono retti, la retta FE* [c] *sarà perpendicolare al piano AB;* c 4.del 11. *e per l'antecedente propositione, i piani AB,CD, sono frà di loro paralleli, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque gli angoli FEN, FEK, sono ambidue angoli retti. Non sia dunque vno di quelli retto, come per esempio l'angolo FEK; sarà l'angolo FEK, ò maggiore, ouero minore del retto: e procedendosi come nell'antecedente Theorema, si dimostrerà che i piani concorrono verso P, ouero dalla parte BD. Se poi l'angolo FEN non sarà retto, si dimostrerà nell'istesso modo, che i piani AB, CD, ò concorrono dalla parte ON, ouero dalla parte LM. Per la qual cosa i piani non paralleli continuati concorreranno da qualche parte, come fù proposto dimostrare nel primo luogo.*



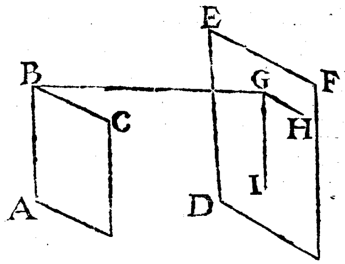
Di nuouo, supposto che i piani AB,CD, continuati da tutte le parti, mai concorrono. Dico che sono frà loro paralleli. Se i piani AB, CD non sono paralleli, per quel che si è dimostrato nella prima parte, continuati concorreranno da qualche parte, ch'è contro all'ipotesi. Se dunque i piani AB,CD, continuati non concorrono insieme da nessuna parte, sono frà di loro paralleli, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XV.

Se due rette linee scambieuolmente concorrono insieme, e sono parallele à due altre, che similmente concorrono insieme, e non sono nel medesimo piano; i piani, che passano per quelle, sono frà di loro paralleli.

Siano le due rette linee AB, CB, concorrenti in qualche punto B, le quali siano parallele alle due DE, EF, poste in altro piano, e concorrenti in qualche punto E; cioè AB sia parallela ad ED, e la retta CB sia parallela ad EF. Dico che i piani AC, DF, sono frà di loro paralleli. Dal punto B si tiri la retta BG [a] perpendicolare al piano DF; dal punto G si tiri la retta GH [b] parallela ad EF; e la retta GI parallela ad ED. Perche a 11. del 11. b 31.del 1.

e 9. del 11. d 9. del 11. le rette CB,HG ſono parallele ad EF, ſaranno [c] frà di loro parallele. Similmente, eſſendo le rette IG,AB, parallele alla retta ED, ſarà IG [d] parallela ad AB. In oltre, perche la retta BG, per coſtruttione, è perpendicolare al piano DF, gli angoli c 3. defini del 11. BGH, BGI, [e] ſaranno retti. Hor eſſendo le rette HG, CB frà di loro parallele, ſegate dalla retta BG, gli f 29. del 1. angoli interni CBG, HGB, [f] ſono vguali à due angoli retti: ma l'angolo HGB è dimoſtrato retto, l'angolo dunque CBG ſarà retto parimente perche le rette GI, AB ſono parallele, ſegate dalla retta BG, g 29. del 1. i due angoli ABG, IGB, [g] ſono vguali à due angoli retti: ma l'angolo IGB fù moſtrato retto, ſarà l'angolo ABG ancora retto: dal che la retta GB ſarà perpendicolare alle due rette BC,BA, e perciò h 4. del 11. [h] ſarà perpendicolare al pianoABC. E perche la retta BG, per coſtruttione, è perpendicolare al piano DF; la retta dunque BG è perpendicolare ad ambidue i piani AC,DF, e per l'antecedente propoſitione, i piani AC,DF, ſono frà di loro paralleli, ch'era da dimoſtrarſi.

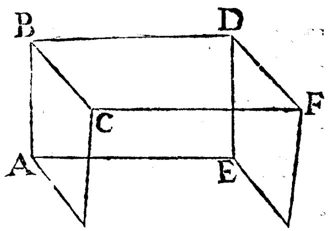


S C O L I O.

Il P. Clauio aggiunge il ſeguente problema.

Dato vn piano, ed vn punto fuori di eſſo, per il dato punto far paſſare vn piano equidiſtante al dato piano.

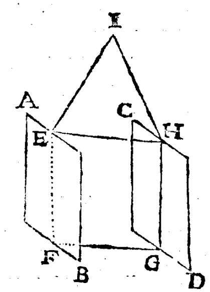
Sia dato il piano AC, ed il punto D fuori del dato piano; ſi vuole per il punto D far paſſare vn piano, parallelo al piano AC. Dal punto B al punto D ſi tiri la retta BD, e per le rette AB,BD, ſi concepiſca paſſare vn piano, come ABDE indeterminato verſo DE; e per le due CB, BD, ſi concepiſca paſſare il piano CBDF, indeterminato verſo DF; dal punto D nel a 31. del 1. *piano ABD, ſi tiri la retta DE,* [a] *parallela ad AB; e dal medeſimo punto D nel piano CBD, ſi tiri la retta DF* b 31. del 1. [b] *parallela alla retta BC. Perche le rette FD, DE, concorrenti nel punto D, ſono parallele alle due CB, AB, che concorrono nel punto B; per l'antecedente propoſitione, il piano EF, che paſſa per il punto D, è parallelo al piano AC, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.*



THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XVI.

Se due piani paralleli ſono ſegati da qualche piano, le loro communi ſettioni ſono parallele.

Siano i due piani paralleli AB,CD, ſegati dal piano EFGH, e le communi ſettioni ſiano le rette EF,HG. Dico, che le rette EF,HG, ſono frà di loro parallele. Se le rette EF,GH, non ſono parallele, per lo ſcolio ſecondo alla 31. propoſit. del primo, continuate concorreranno in qualche punto: concorrano, s'è poſſibile, in qualche punto I. Perche la retta GH è nel piano CD, ſarà tutta la retta GHI nel medeſimo piano CD, altrimente la parte GH della retta GI, ſarebbe nel pianoCD, e la parte HI in altro piano, che per la prima propoſ. di queſto, è impoſſibile; e perciò tutta la retta GI è nel piano CD; ſi che, continuato il piano CD, quello paſſerà per il punto I. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che continuato il piano AB, quello paſſerà per il medeſimo punto I; per la qual coſa continuati i piani AB, CD concorrono ſcambieuolmente nel punto I, ch'è contro all'ipoteſi, mentre habbiamo ſuppoſti i piani AB,CD, paralleli. Non dunque continuate le rette FE,GH, concorrono: e ſe non concorrono, per il ſecondo ſcolio alla 31. propoſit. del primo, ſono parallele, come fù propoſto di moſtrare.

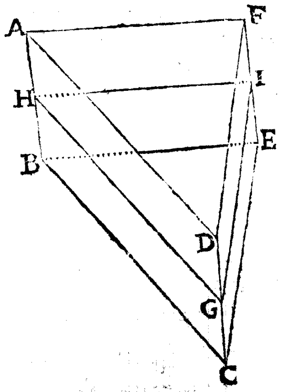


S C O L I O.

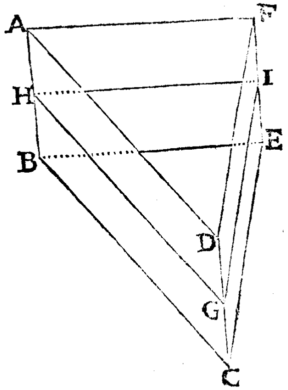
Qui facilmente ſi può dimoſtrare il ſeguente Theorema.

Se due piani, che ſcambieuolmente concorrono, ſono ſegati da vn'altro piano, e le communi ſettioni ſono frà di loro parallele; le medeſime ſaranno parallele alla commune ſettione, che fanno quei due piani nel loro concorſo.

Siano i due piani ABCD,DCEF, i quali concorrano ſcambieuolmente, e la commune ſettione ſia DC: ſiano poi ſegati i piani ABCD,DCEF, dal piano ABEF, e le communi ſettioni AB, FE, ſiano frà di loro parallele. Dico, che le rette AB,FE ſono parallele alla retta DC. Si prenda nella retta DC qualunque punto G, dal quale ſi tiri la retta GH [a] *parallela alla retta AD; e dal* a 31. del 1. *medeſimo punto G ſi tiri la retta GI parallela alla retta DF. Perche le rette GH, DA, ſono parallele, ſegate dalla retta DG, le tre rette HG,GD,DA,* [b] *ſono in vn me-* b 7. del 11. *deſimo piano: ma le due GD, DA ſono nel piano ABCD, ſarà la retta GH nel mede-*



simo piano ABCD, e perciò continuata GH
segarà la retta AB in qualche punto H.
Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta
GI sega la retta FE in qualche punto I. Si
c 2. del 11. *tiri la retta HI, sarà il triangolo HGI* [c] *in*
vn medesimo piano: e perche le rette HG,
GI, sono parallele alle rette AD, DF, sa-
d 15. del 11. *ranno i piani HGI, ADF,* [d] *frà di loro pa-*
ralleli; i quali, essendo segati dal piano
ABEF, haueranno le communi settioni AF,
e 16. del 11. *HI* [e] *frà di loro parallele: ma fù supposta*
la retta AB parallela alla retta FE, il
f 35. defin. del 1. *quadrilatero AHIF* [f] *sarà parallelogram-*
mo, e sarà il lato AF [g] *vguale ad HI. In*
g 34. del 1. *oltre perche le rette IG, GH, sono paral-*
h 10. del 11. *lele alle due FD, DA, l'angolo IGH* [h] *sarà*
vguale all'angolo FDA. Similmente perche
le rette HI, IG, sono parallele alle due AF,
K 10. del 11. *FD, sarà l'angolo HIG* [K] *vguale all'ango-*
lo AFD; ed essendo le due rette IH, HG, parallele alle due FA, AD, l'angolo
FAD sarà vguale all'angolo IHG; per la qual cosa i triangoli GIH, DFA,
l 4. del 6. *sono equiangoli, e la proportione di AF ad FD* [l] *sarà come quella di HI ad IG:*
m 14. del 5. *fù dimostrata AF vguale ad HI; sarà FD* [m] *vguale ad IG. Similmente FA*
n 4. del 6. *ad AD* [n] *sarà come IH ad HG: ma FA è vguale ad IH, sarà AD* [o] *vguale*
o 14. del 5. *ad HG. Hor essendo le due AD, HG frà di loro vguali, e parallele, sarà*
p 33. del 1. *AH* [p] *parallela alla retta DG, cioè AB sarà parallela à DC. Parimente, es-*
q 33. del 1. *sendo FD vguale, e parallela ad IG, sarà FI* [q] *parallela alla retta DG, cioè*
FE parallela alla retta DC, ch'era da dimostrarsi.

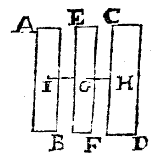


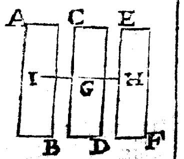
Non sarà inutile aggiungere quì il seguente Theorema.

Quei piani, che sono paralleli ad vn'altro piano, sono frà di loro paralleli.

Siano i piani AB, CD, paralleli al piano EF. Dico, che i piani AB, CD sono frà di loro paralleli.

Si prenda nel piano EF qualunque punto G, per il quale
a 11 del 11. *si faccia passare la retta GHI, in modo,* [a] *che faccia angoli*
retti col medesimo piano EF, la quale prolungata concorra ne i piani AB, CD, continuati, se bisogna; concorra dunque ne i punti I, ed H. Perche i piani CD, EF, per ipotesi, sono paralleli, e la retta GH è perpendicolare al piano EF, per lo scolio alla 14. propos. di questo, la medesima retta GH sarà perpendicolare al piano CD. In oltre, essendo, per ipotesi, i piani AB, EF, frà di loro paralleli, e la retta IG, per costruttione, è perpendicolare al piano EF, per lo citato





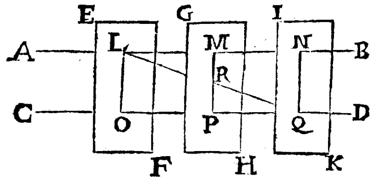
scolio

scolio, la medesima retta IG sarà perpendicolare al piano AB; dal che la retta IH sarà perpendicolare à i due piani AB, CD; e per la 14. propos. di questo, i piani AB, CD, sono frà di loro paralleli, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XVII.

Se due rette linee sono segate da piani paralleli, le parti interposte frà i piani paralleli sono proportionali.

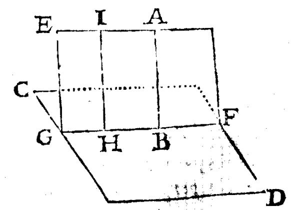
Siano le rette AB, CD, segate da i piani paralleli EF, GH, IK, ne i punti
L, M, N, O, P, Q. Dico che la proportione di LM ad MN è come quella
di OP à PQ. Si tirino le rette LO, NQ. Essendo i punti L, O, N, Q
ne i piani EF, IK, le rette LO, NQ saranno ne i medesimi piani EF, IK.
Si tiri la retta LQ, la quale seghi il piano GH in qualche punto R; dal
punto R alli punti P, ed M, si
tirino le rette RM, RP: essendo i
punti M, R, P nel piano GH, le
rette MR, RP saranno nel mede-
simo piano GH. Perche il trian- a 2. del 11.
golo LQN [a] è in vn medesimo
piano, i piani paralleli GH, IK,
saranno segati dal piano LQN;
per il che le communi settioni b 16. del 11.
MR, NQ [b] saranno frà di loro parallele. Similmente il triangolo LOQ [c] è c 2. del 11.
in vn medesimo piano, e sega i piani paralleli EF, GH, per la qual cosa le d 16. del 11.
communi settioni LO, RP [d] sono frà di loro parallele. In oltre perche il
triangolo LQN è segato dalla retta MR parallela ad NQ, sarà LM ad e 2. del 6.
MN, [e] come LR ad RQ; parimente perche il triangolo LQO è segato
dalla retta RP parallela al lato LO, sarà OP à PQ [f] come LR ad RQ: ma f 2. del 6.
fù dimostrata LM ad MN, come LR ad RQ, sarà LM ad MN [g] come OP g 11. del 5.
à PQ, ch'era da dimostrarsi.



THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

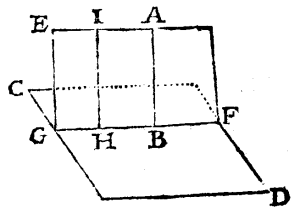
Se vna retta linea è perpendicolare à qualche piano, tutti i piani, che passano per quella retta linea, sono perpendicolari al medesimo piano.

Sia la retta linea AB perpendico-
lare al piano CD. Dico, che tutti i
piani, che passano per la retta AB so-
no perpendicolari al piano CD. Per
la retta AB si concepisca passare vn
piano, come EF, il quale seghi il piano a 3. del 11.
CD, e la commune settione sia [a] la
retta GF, nella quale sia preso qua- b 31. del 1.
lunque punto H, e dal punto H si tiri
la retta HI [b] parallela ad AB; le tre



rette

c 7. del 11. rette IH, AB, HB c sono in vn medesimo piano: ma le due AB, BH sono nel piano EF, sarà dunque la retta IH nel medesimo piano EF. Hor perche le due rette IH, AB, sono frà di loro parallele, e la retta **AB è supposta** perpendicolare al piano CD, sarà ancora IH d perpendicolare al medesimo piano CD. (d 8. del 11.) E perche il punto H è preso ad arbitrio nella retta GF, se da gl'infiniti punti, che possiamo immaginarci nella retta GF, sono tirate rette linee parallele ad AB, tutte saranno nel medesimo piano EF, e saranno perpendicolari al piano CD. Per la qual cosa il piano EF, che passa per quelle infinite rette linee, e sarà perpendicolare al piano CD. (e 4. defin. del 11.) Il medesimo si dimostrerà di tutti gli altri piani, che passano per la retta AB, e segano il piano CD, secondo altre positioni; e perciò tutti i piani, che passano per la retta AB, sono perpendicolari al piano CD, ch'era da dimostrarsi.

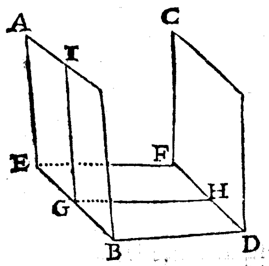


S C O L I O.

Da quel che si è detto non sarà difficile dimostrare il seguente Theorema.

Se le communi settioni di due piani, perpendicolari ad vn'altro piano, sono frà di loro parallele, quei due piani saranno frà loro paralleli: e se di due piani paralleli vno è perpendicolare ad vn'altro piano, ancora l'altro sarà perpendicolare al medesimo piano.

Siano prima i due piani AB, CD, perpendicolari al piano ED, in modo, che le cõmuni settioni EB, FD, siano frà di loro parallele. Dico prima, che i piani AB, CD, sono frà di loro paralleli. Si prẽda nella retta EB qualũque punto G, e dal punto G nel piano ED si tiri la retta GH, a *ad angoli retti con la retta EB,* (a 11. del 1.) *Perche le rette EB, FD sono, per ipotesi, parallele, sarà l'angolo DHG* b *vguale all'angolo EGH, cioè sarà retto;* (b 29 del 1.) *e la retta GH sarà perpendicolare alla commune settione FD. In oltre nel piano AB si tiri dal punto G la retta GI,* c *ad angoli retti colla retta EB.* (c 11. del 1.) *Essendo il piano AB, per ipotesi, perpendicolare al piano ED, sarà l'angolo IGH* d *retto;* (d 4. definit. del 11.) *ma l'angolo HGE, per costruttione, è retto, sarà la retta HG* e *perpendicolare al piano AB,* (e 4. del 11.) *nel quale sono le rette GI, GE. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la retta GH è perpendico-*



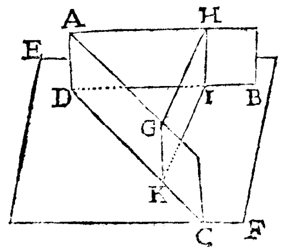
lare al piano CD; e per la 14. proposit. di questo, i piani AB, CD, sono frà di loro paralleli.

Di nuouo, supposto, che i piani AB, CD siano frà di loro paralleli, ed il piano AB sia perpendicolare al piano ED. Dico, che il piano CD sarà perpẽdicolare al medesimo piano ED. Perche i piani AB, CD, sono paralleli, segati dal piano ED, le communi settioni EB, FD, f *sono frà di loro parallele.* (f 16. del 11.) *Si supponga fatta la medesima costruttione antecedente, e si dimostri, come iui si fece, che la retta HG è perpendicolare al piano AB. E perche i piani AB, CD, sono paralleli, e la retta HG è perpendicolare al piano AB, la medesima retta HG, per lo scolio alla 14. prop. di questo, sarà perpendicolare al piano CD; e per l'antecedente propos. il piano ED, che passa per la retta GH, farà angoli retti col piano CD. Per la qual cosa il piano CD è perpendicolare al piano ED, ch'era da dimostrarsi.*

THEOREMA XVII. PROPOSITIONE XIX.

Se due piani, che si segano scambieuolmente, sono perpendicolari ad vn'altro piano, la loro commune settione sarà perpendicolare al medesimo piano.

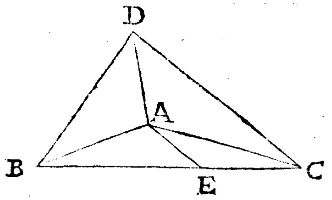
Sia AD la commune settione de i piani AB, AC, i quali siano perpendicolari al piano EF. Dico, che la commune settione AD è perpendicolare al medesimo piano EF. Si prendano due qualunque punti ne i piani AB, AC, come per esempio K, ed I, da i quali, ne i piani AC, AB, si tirino le rette KG, IH a ad angoli retti colle rette DC, DB. (a 11. del 1.) Perche i piani sono, per ipotesi, perpendicolari al piano EF, le rette HI, GK, che sono perpendicolari alle communi settioni BD, DC, saranno b perpendicolari al piano EF: (b 4. definit. del 11.) per la qual cosa sono frà di loro c parallele, (c 6. del 11.) ed in conseguenza d sono in vn medesimo piano: (d 34. defin. del 1.) Sia quel piano il notato GKIH. Perche i piani AK, AI, che concorrono nella retta AD, sono segati dal piano GKIH, e le communi settioni GK, HI sono frà di loro parallele, per lo scolio alla 16. propos. di questo, le rette HI, GK, sono parallele alla retta AD. Hor essendo la retta AD parallela ad HI, e la retta HI, per costruttione, è perpendicolare al piano EF, sarà AD e perpendicolare al medesimo piano EF, ch'era da dimostrarsi. (e 8. del 11.)



THEOREMA XVIII. PROPOSITIONE XX.

Se vn'angolo solido è contenuto da tre angoli piani, due di quelli angoli piani, presi in qualunque modo, sono maggiori del terzo.

Sia l'angolo solido A, contenuto da i tre angoli piani DAB, DAC, BAC. Dico, che due di questi angoli, presi in qualunque modo, sono maggiori del terzo. Se questi tre angoli sono frà di loro vguali, sarà manifesto, che due, giunti insieme, sono maggiori del terzo. Se poi due de i detti angoli sono frà loro vguali, ed il terzo sia minore d'ogn'vno de gli vguali, sarà ancora manifesto, che due, presi insieme, sono maggiori del terzo. Se finalmente vno di questi, come l'angolo BAC, è maggiore di ciascuno de gli altri due BAD, DAC. Dico, che i due DAB, DAC, giunti insieme, sono maggiori del terzo ãgolo BAC. Nel piano BAC
a 23. del 1. si faccia l'angolo BAE [a] vguale all'angolo BAD, sarà l'angolo BAC maggiore dell'angolo BAE, dal che la retta AE segarà l'angolo BAC. Nelle rette AB, AC, si prendano due qualunque punti B, & C; si tiri la retta BC. Essendo, per costruttione, la retta AE nel piano BAC, continuata segarà il lato BC in qual-
b 3. del 1. che punto E. Si faccia AD [b] vguale ad AE, e si tirino le rette BD, DC. Si considerino i due triangoli ADB, ABE, de i quali il lato AD è vguale al lato AE, il lato AB è commune; saranno i due lati DA, AB vguali à i
c 4. del 1. due BA, AE; l'angolo BAE, per costruttione, è vguale all'angolo BAD, sarà la base BE [c] vguale alla base BD. Nel triangolo DBC, i due lati
d 20. del 1. BD, DC [d] sono maggiori del terzo lato BC; leuatone gli vguali lati DB, BE, resta il lato DC maggiore del lato EC. Si considerino i due triangoli ADC, ACE, de'quali il lato AE è vguale al lato AD, il lato AC è commune; saranno i due lati DA, AC vguali à i due lati CA, AE; la base DC
e 25. del 1. è dimostrata maggiore della base EC, sarà l'angolo DAC [e] maggiore dell'angolo CAE; se gli aggiungano gli vguali angoli DAB, BAE, ne vengono i due angoli DAB, DAC, maggiori de i due BAE, EAC: ma i due angoli BAE, EAC, costituiscono tutto l'angolo BAC; i due angoli dunque BAD, DAC, insieme giunti, sono maggiori dell'angolo BAC, ch'era da dimostrarsi.

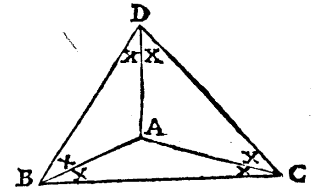


THEOREMA XIX. PROPOSITIONE XXI.

Tutti gli angoli piani, che contengono vn'angolo solido, giunti insieme, sono minori di quattro angoli retti.

Sia l'angolo solido A contenuto da i tre angoli piani BAD, DAC,

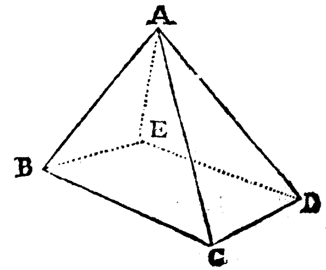
BAC. Dico, che i tre angoli piani BAD, DAC, BAC, giunti insieme, sono minori di quattro angoli retti. Si tirino le rette BD, DC, CB, e si concepisca il punto A in sublime, ed il piano del triangolo DBC, nel soggetto piano; saranno le rette AB, AD, AC, inclinate al soggetto piano DBC; dal che saranno costituiti ne i punti B, D, C, tre altri angoli solidi, cioè l'angolo solido B sarà contenuto da tre angoli piani, de'quali due sono i superiori, che sono i notati con la lettera X, e l'altro stà di sotto, ch'è l'angolo BDC. Similmente l'angolo solido D è contenuto da i due angoli notati X, che stãno di sopra, e dall'angolo inferiore BDC; e l'ãgolo solido C è similmente cõtenuto da i due angoli superiori X, e dall'angolo DCB, che stà sotto. Di nuouo, considerando l'angolo solido B, i due angoli piani X, per l'antecedente prop. giunti insieme, sono maggiori dell'angolo DBC, che stà sotto. Similmente nell'angolo solido D, i due angoli piani X sono maggiori dell'angolo BDC, che stà di sotto; e nell'angolo solido DCB, i due angoli piani X sono maggiori dell'angolo DCB; dal che i sei angoli notati X sono maggiori de i tre angoli del triangolo DBC: ma i tre angoli del triangolo DBC, [a] a 32. del 1.
sono vguali à due angoli retti, i sei angoli dunque notati X saranno maggiori di due angoli retti. Finalmente, perche tre angoli d'ogni triango-
lo [b] sono vguali à due angoli retti, i noue angoli de i tre triangoli ABD, b 32. del 1.
ADC, ACB, cioè i sei notati X, co'i tre angoli intorno al punto A, saranno vguali à sei angoli retti: se da questi se ne leuano i sei angoli notati X, che furono dimostrati maggiori di due angoli retti, resteranno i tre angoli DAC, DAB, BAC, minori di quattro angoli retti, ch'era da dimostrarsi.



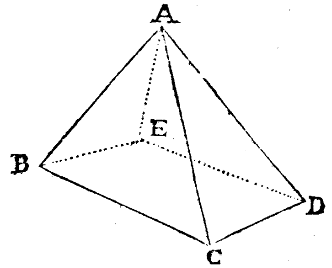
SCOLIO.

Il medesimo si dimostra se l'angolo solido sarà contenuto da più di tre angoli piani, nel seguente modo.

Sia l'angolo solido A, contenuto da i quattro angoli piani BAC, CAD, DAE, BAE. Dico, che questi quattro angoli sono minori di quattro angoli retti. Perche i due c 20. del 11.
angoli ACB, ACD, [c] sono maggiori dell'angolo BCD, & i due angoli ADC, ADE, sono maggiori dell'angolo CDE; come ancora i due angoli AED, AEB, sono maggiori dell'angolo BED, & i due ABE, ABC sono maggiori dell'angolo EBC; gli otto



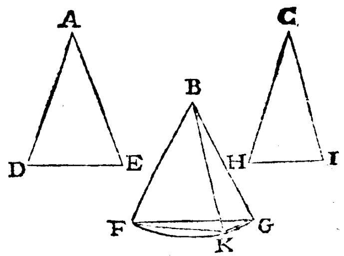
angoli ACB,ACD,ADC,ADE,AED,AEB,ABE,ABC, saranno maggiori de
b Scol. al la 32.del 1. *i quattro angoli del quadrilatero BCDE;* [b] *ma i quattro angoli del quadrilatero BCDE, sono vguali à quattro angoli retti; i sopradetti otto angoli saranno*
c 32.del 1. *maggiori di quattro angoli retti. E perche i tre angoli di ogni triangolo* [c] *sono vguali à due angoli retti, i dodici angoli de i quattro triangoli ACD, ADE, AEB, ABC, saranno vguali ad otto angoli retti; leuatone gli otto angoli sopra nominati, che furono dimostrati maggiori di quattro angoli retti, i rimanenti quattro angoli che contengono l'angolo solido A, saranno minori di quattro angoli retti. L'istesso si dimostrerà se l'angolo solido è contenuto da più di quattro angoli piani; e perciò tutti gli angoli piani, che contengono l'angolo solido, sono minori di quattro angoli retti, ch'era da dimostrarsi.*



THEOREMA XX. PROPOSITIONE XXII.

Se saranno tre angoli piani, due de'quali, presi in qualunque modo, siano maggiori del terzo; e siano contenuti da rette linee vguali; è possibile costruire vn triangolo col le tre rette, che congiungono gli estremi delle linee vguali.

Siano i tre angoli piani A, B, C, de'quali i due A, & B, siano maggiori del terzo C; i due B,& C siano maggiori dell'angolo A; & i due A, & C siano maggiori dell'angolo B; e siano contenuti dalle rette vguali AD,AE, BF,BG, CH,CI; tirate le rette DE,FG,HI. Dico che colle tre rette DE, FG, HI, se ne può costruire vn triangolo; cioè che due di quelle rette, prese in qualunque modo, sono maggiori della terza. Se i tre angoli A,B, & C, sono frà loro vguali, perche sono contenuti da lati vguali, saranno le basi
a 4 del 1. DE,FG,HI, [a] frà di loro vguali; e perciò due, prese in qualunque modo, sono maggiori della terza. Se poi due di quegli angoli, come A, & B, sono frà di loro vguali, ed il terzo C è minore di ciascuno de gli vguali A,& B; essendo i due angoli A,& B, vguali, e contenuti da rette linee
b 4.del 1. vguali, saranno le basi DE,FG, [b] frà di loro vguali. In oltre, perche i lati FB,BG sono vguali à i lati HC,CI, e l'angolo FBG si suppone maggiore

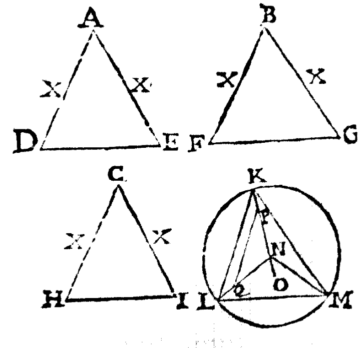


giore dell'angolo C, sarà la base FG, [c] ouero DE maggiore di HI, e per- c 24.del 1.
ciò due, prese in qualunque modo, saranno maggiori della terza. Se finalmente vno di quelli, come per esempio, l'angolo FBG, è maggiore dell' angolo A, ed è ancora maggiore dell'angolo C. Dico similmente, che delle tre rette DE,FG,HI, due prese in qualunque modo, sono maggiori della terza. Alla retta AF, nel punto B, si costituisca l'angolo FBK [d] v- d 23.del 1.
guale all'angolo A, sarà l'angolo FBG maggiore dell'angolo FBK, e la retta BK passerà frà le rette FB, BG; e fatto centro in B, coll'interuallo BF, ouero BG, si descriua l'arco FKG; si prolunghi la retta BK, fin che concorre coll'arco FKG in qualche punto K. Perche la retta FG [e] cade e 2.del 3.
dentro del circolo FKG; perciò il punto K cade sotto la retta FG; si tirino le rette FK,KG. Nel triangolo FKG i due lati FK,KG [f] sono mag- f 20.del 1.
giori del terzo lato FG. Si considerino i due triangoli ADE,BFK. Perche i due lati DA,AE, sono vguali à i due lati FB, BK; e l'angolo FBK, per costruttione è vguale all'angolo A, sarà la base FK [g] vguale alla base g 4.del 1.
DE. E perche i due angoli A,& C, per ipotesi, sono maggiori dell'angolo FBG, se dall'angolo FBG se ne leua l'angolo FBK, ch'è vguale all'angolo A, resta l'angolo KBG minore dell'angolo C. Hor essendo i due lati KB,BG, vguali à i due lati HC, CI, e l'angolo C maggiore dell'angolo KBG; sarà la base HI [h] maggiore della base KG: h 24. del 1.
ma il lato FK fù dimostrato vguale al lato DE; i due lati HI, DE, saranno maggiori de i due lati FK,KG. E perche i due lati FK, KG, [K] sono K 20.del 1.
maggiori del terzo lato FG; i due lati dunque HI, DE, insieme giunti, sono maggiori del terzo lato FG. Per la qual cosa delle tre rette DE,FG, HI, presone due in qualunque modo, quelle giunte insieme, sono maggiori della terza; e per la 22.propositione del 1. con le tre rette DE,FG, HI, si può descriuere vn triangolo, il che era da dimostrarsi.

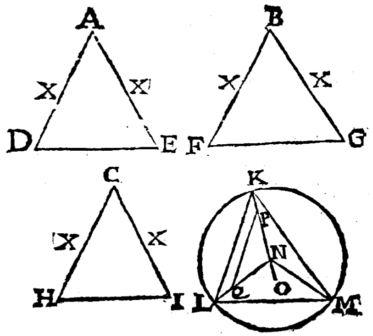
PROBLEMA III. PROPOSITIONE XXIII.

Costruire vn angolo solido con tre angoli piani, due de'quali, presi in qualunque modo, siano maggiori del terzo; e che tutti tre, insieme giunti, siano minori di quattro angoli retti.

Siano i tre angoli piani A, B, C, due de' quali, presi in qualunque modo, siano, giunti insieme, maggiori del terzo; e che tutti tre, insieme giunti, siano minori di quattro angoli retti: si vuole costruire vn angolo solido, che gli angoli piani, che lo contengono, siano vguali à gli angoli piani A, B, C. Tutte le rette X che contengono i dati angoli A,B,C, [a] si facciano frà di lo- a 3. del 1.
ro vguali, e si tirino le rette DE,FG, HI, colle quali, per l'antecedente propo-



propositione si può descriuere vn triangolo: sia dunque con le rette DE,
b 22. del 1. FG,HI, b descritto il triangolo KLM; e sia il lato LM vguale al lato HI,
il lato LK vguale al lato DE, ed il lato KM vguale al lato FG; intorno
c 5. del 4. al triangolo KLM c si circoscriua il circolo KLM, il di cui centro N ò caderà dentro del triangolo KLM, ò caderà in vn lato, ouero caderà fuori:
cada primieramente dentro del triangolo KLM; si tirino le rette NK,NL,
NM. Dico che ogn'vna di queste è minore di ciascun lato X. Se ciascuna
delle rette NK,NL, non è minore del lato X, ò sarà maggiore, ouero vguale. Supposto prima, che NK, ouero NL, sia vguale ad X. Perche i
due lati NK, NL sono vguali à i due AD, AE, e la base KL, per costruttione, è vguale alla base DE, sarà l'angolo KNL d vguale all'angolo A.
d 8. del 1. Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo KNM è vguale all'angolo B;
e che l'angolo LNM è vguale all' angolo C; dal che i tre angoli intorno al centro N sono vguali à i tre angoli A,B,C; si prolunghi K N verso O, i due angoli ONM,
e 13. del 1. MNK e sono vguali à due angoli retti; e similmente i due angoli ONL, LNM, sono vguali à due angoli retti; dal che tutti gli angoli LNM, MNK, KNL, che sono intorno al centro N sono vguali à quattro angoli retti: ma gli angoli intorno al centro N furono mostrati vguali à gli angoli A, B, C; gli angoli dunque A, B, C sono vguali à quattro angoli retti, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque ogn'vna delle rette NK,NL,NM, è vguale al lato X. Di nuouo sia NK, ouero NL, maggiore

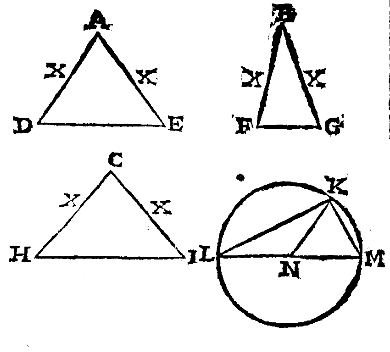


f 3. del 1. del lato X; si facciano le rette NP,NQ, f ogn'vna vguale ad X; e si tiri
la retta PQ. Perche LN è vguale ad NK, e la retta QN vguale ad NP,
g 16. del 5. sarà LN ad NK, come QN ad NP; e permutando, LN ad NQ g sarà co-
h 17. del 5. me KN ad NP; e diuidendo, LQ à QN h sarà come KP à PN; è perciò
K 2. del 6. la retta QP K sarà parallela al LK. E perche le parallele LK, QP sono se-
l 29. del 1. gate dalle rette NK, NL, l'angolo NPQ l sarà vguale all'angolo NKL;
e l'angolo NQP vguale all'angolo NLK; dal che i triangoli NPQ, NKL
m 4. del 6. sono equiangoli, e la proportione di NK à KL m sarà come quella di NP
n 16. del 5. à PQ; e permutando, KN ad NP n sarà come KL à PQ: ma KN è mag-
o 14. del 5. giore di NP, sarà KL o maggiore di QP; fù fatta, per costruttione KL
vguale ad ED, sarà ED maggiore di PQ. Si considerino i due triangoli
NPQ, ADE, de'quali i due lati NP, NQ, per costruttione, sono vguali
à i due lati AD,AE, la base DE è maggiore della base PQ; sarà l'angolo
p 25. del 1. A p maggiore dell'angolo PNQ. Nell'istesso modo si dimostrerà che l'angolo B è maggiore dell'angolo KNM, e che l'angolo C è maggiore dell'
angolo LNM: per la qual cosa i tre angoli A,B,C sono maggiori de i tre
angoli LNM,LNK,KNM: ma questi tre angoli furono dimostrati vguali

à quat-

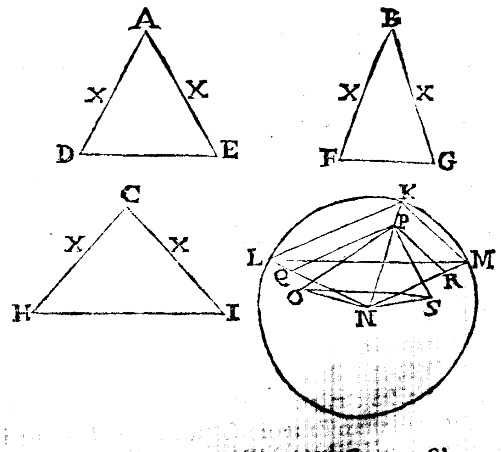
à quattro angoli retti; i tre angoli dunque A,B,C sono maggiori di quattro angoli retti, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque ciascuna delle rette NK,NL,NM, è maggiore, ne vguale à ciascun lato X, ma ogn'vna delle rette NK,NL,NM, è minore di ciascun lato X.

Di nuouo cada il punto N in vno de i lati del triãgolo KLM, come nel lato LM; si tiri la retta NK. Dico similmente, che ciascuno de semidiametri NK,NL,NM è minore di ciascun lato X. Perche, se non è minore, ò sarà vguale, ouero maggiore. Siano prima le due LN, NK, vguali alle due HC,CI. Perche NK è vguale ad NM, sarà LM vguale alle due LN, NK: ma le due LN, NK, furono supposte vguali alle due HC, CI; sarà tutta LM vguale alle due HC,CI. E perche nel triangolo CHI, i due lati HC, CI, q sono maggiori del q 20. del 1.



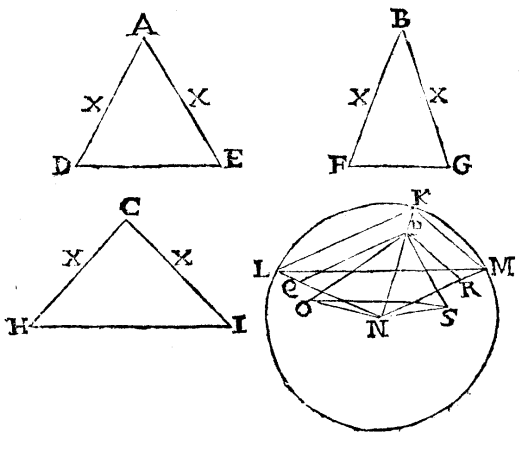
terzo lato HI; sarà LM maggiore di HI, che è contro alla costruttione, mentre LM fù fatta vguale ad HI. Non dunque ciascuna delle rette
NL, NK, NM è vguale al lato X. Siano, se è possibile, le due NK, NL,
maggiori de i lati HC,CI. Essendo LM vguale alle due LN,NK, sarà LM
maggiore de i due lati HC, CI; ma i due lati HC, CI, r sono maggiori r 20. del 1.
del terzo lato HI; sarà LM maggiore di HI, ch'è contro alla costruttione. Non dunque ciascuna retta NK,NL, NM è maggiore, ne vguale al lato X, ma ogn'vna è minore del lato X.

Se poi il centro N cade fuori del triangolo KLM, come nella seguente figura; si tirino le rette NL, NK, NM. Dico che ogn'vna di queste è minore del lato X. Perche se non è minore, ò sarà vguale, ouero maggiore. Sia nel primo luogo vguale. Si considerino i triangoli KN L, ADE. Perche i due lati NK, NL, sono vguali à i due lati DA, AE, e la base LK è v-
guale alla base DE, sarà l'angolo LNK s v- s 8. del 1.
guale all' angolo A. Nell' istesso modo si prouerà, che l'angolo KNM è vguale all'angolo B; dal che tutto l' angolo LMN sarà vguale à i due angoli A, & B, giunti insieme. Si consideri-



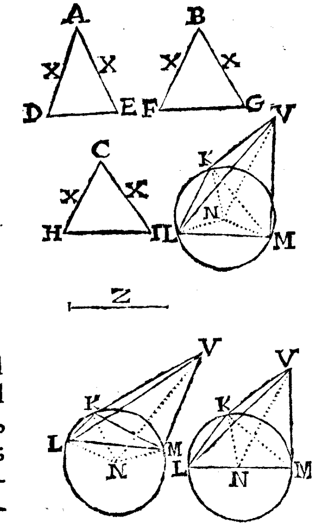
sideri-

siderino i triangoli LMN, CHI; essendo i due lati LN, NM, vguali à i
t 8. del 1. due lati HC, CI, la base LM è vguale alla base HI, sarà l'angolo LNM t
vguale all'angolo C: ma l'angolo LNM fù dimostrato vguale à i due an-
goli A, & B, giunti insieme; saranno i due angoli A, & B insieme, vgua-
li all'angolo C, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque ogn'vna delle rette
NL, NK, NM, è vguale al lato X. Siano di nuouo i due lati NK, NL
u 3. del 1. maggiori de i due lati AD, AE; si facciano le rette NP, ed NQ, u ogn'vna
vguale ad X, e si tiri la retta PQ. Si dimostri, come si fece nella prima
parte, che LK è maggiore di QP; essendo LK vguale ad ED, sarà il lato
ED maggiore di PQ. Si considerino i triangoli QNP, ADE. Perche i
due lati QN, NP, sono vguali à i due lati AD, AE, e la base DE è mag-
x 25. del 1. giore di QP, sarà l'angolo A x maggiore dell'angolo LNK. Nell'istesso
modo, considerando i triangoli KNM, BFG, si dimostrerà, che l'angolo
y 23. del 1. B è maggiore dell'angolo KNM. Si faccia l'angolo KNS y vguale all'
angolo B, sarà l'angolo KNS maggiore dell'angolo KNM; e perciò la
z 23. del 1. retta NS cade sotto della retta NM. Similmente si faccia l'angolo KNO z
vguale all'angolo A, sarà l'angolo KNO maggiore dell'angolo KNL;
dal che la retta NO caderà sotto alla retta NL. Si facciano le rette NO,
a 3. del 1. NS, a ogn'vna vguale al lato X; saranno le rette NO, NQ, NP, NR, NS
frà di loro vguali; si tiri la retta OS. Perche le rette QP, PR, per quel che si dimostrò nella prima parte, sono pa-
b 29. del 11. rallele à i lati LK, KM, sarà l'angolo QPR b vguale all'angolo LKM. Di nuouo, essendo NP vguale ad NO, il triangolo NPO sarà isoscele, e gli angoli NPO,
c 5. del 1. NOP c sono frà di loro vguali. E similmente nel triangolo isoscele NQP gli angoli NQP, NPQ, sono frà di loro vguali; e perche i tre angoli del triangolo NOP so-
d 32. del 1. no vguali d à i tre angoli del triangolo NQP; da i tre angoli del trian-
golo NOP, se ne leui l'angolo ONP, e da i tre angoli del triangolo NQP,
se ne leui l'angolo QNP; restano i due angoli NOP, NPO, minori de i
due angoli NQP, NPQ: ma gli angoli NPO, NOP sono frà di loro v-
guali, e sono ancora frà loro vguali gli angoli NPQ, NQP; sarà l'ango-
lo NPO minore dell'angolo NPQ. Nell'istesso modo si dimostrerà, che
l'angolo NPS è minore dell'angolo NPR; dal che tutto l'angolo OPS,
è minore di tutto l'angolo QPR. Si considerino i triangoli NPO, ADE.
Perche i due lati NO, NP, sono vguali à i due lati DA, AE, e l'angolo



PNO è fatto vguale all'angolo A, sarà la base PO e vguale alla base DE: e 4. del 1.
ma DE, per costruttione, è vguale ad LK, sarà OP vguale ad LK. Nell'
istesso modo si dimostrerà che PS è vguale al lato KM. Si considerino i
triangoli LKM, OPS. Perche i due lati LK, KM sono vguali à i due lati
OP, PS, e l'angolo LKM è dimostrato maggiore dell'angolo OPS, sarà la
base LM f maggiore delle base OS: ma LM, per costruttione, è vguale ad f 24. del 1.
HI, sarà HI maggiore di OS. Di più perche i due lati HC, CI, sono vgua-
li à i due lati ON, NS, e la base HI è maggiore della base OS, sarà l'an-
golo C g maggiore dell'angolo ONS: ma l'angolo ONS, per costruttio- g 25. del 1.
ne, è vguale à i due angoli A, & B; sarà l'angolo C maggiore de i due an-
goli A, & B, insieme giunti, ch'è contro all'ipotesi. Non dunque ciascu-
na delle rette NL, NK, NM, è maggiore, ne vguale al lato X; ma ogn'vna
è minore, come si disse.

Finalmente essendosi dimostrato, che ciascuna delle rette NM, NK,
NL, è minore del lato X, il quadrato del lato NK, ouero NM, ouero NL,
sarà minore del quadrato di ciascun lato X; si sottragga dunque il quadra-
to di NK, ouero NL, ouero NM, dal quadrato del lato X, e quel che resta
sia il quadrato della retta Z; sarà il quadrato di NK, ouero NL, ouero NM,
col quadrato della retta Z, vguale al quadrato del lato X. Nel punto N si h 12. del 11.
erigga la retta NV, h perpendicolare al piano KLM, e si faccia NV K vguale alla K 3. del 1.
retta Z; si tirino le rette KV, LV, MV. Dico che gli angoli piani LVM, LVK, MVK, che contengono l'angolo solido V, sono vguali à i dati angoli piani A, B, C. Perche la retta VN è perpendicolare al piano KLM, gli angoli VNL, VNK, l 3. defin. del 11.
VNM, l sono retti. Hor perche la retta Z è vguale ad NV, sarà il quadrato di LN, col quadrato di Z, vguale al quadrato di LN, col quadrato di NV; e perche il quadrato di LN, col quadrato di Z, per quel che si è detto, è vguale al quadrato del lato X; sarà il quadrato di LN, col quadrato di NV, vguale al quadrato del lato X: Ma i quadrati de i due lati LN, m 47. del 1.
NV, m sono vguali al quadrato di LV; sarà il quadrato di LV vguale al quadrato di X, ed il lato LV sarà vguale al lato X. Similmente i quadrati de i due la-
ti KN, NV, sono vguali à i quadrati delle due NK, & Z: ma i quadrati
delle due NK, & Z, sono vguali al quadrato del lato X; i quadrati de i la-
ti KN, NV, cioè il quadrato di VK, n sarà vguale al quadrato di X, ed il n 47. del 1.
lato VK sarà vguale al lato X. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il la-
to MV è vguale al lato X. Si considerino i due triangoli VLM, CHI. Per-
che i due lati VL, VM, sono vguali à i due lati CH, CI, e la base LM è v-
guale alla base HI; sarà l'angolo LVM o vguale all'angolo C. Similmen- o 8. del 1.

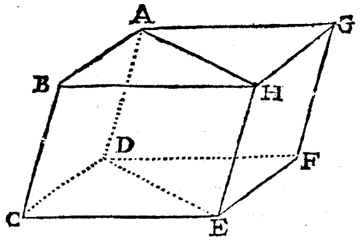


te ne i triangoli VKL, ADE, i due lati VK, VL, sono vguali à i due lati AD,AE, la base KL è vguale alla base DE, sarà l'angolo KVL [p] vguale
p 8. del 1. all'angolo A. E perche ne i triangoli VKM, BFG, i due lati VK, VM, sono vguali à i due lati BF,BG, la base KM è vguale alla base FG, sarà l'
q 8. del 1. angolo KVM [q] vguale all'angolo B, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

THEOREMA XXI. PROPOSITIONE XXIV.

Se vn solido è contenuto da piani paralleli, gli opposti piani sono parallelogrammi simili, ed vguali.

Sia il solido ACEG, contenuto da piani paralleli, cioè che il piano BE sia parallelo all'opposto piano AF, che il piano AC sia parallelo all' opposto GE, e che il piano BG sia parallelo all'opposto piano CF. Dico che i piani opposti BE,AF, ouero i due AC,GE, ouero i due BG, CF, sono parallelogrammi, simili, ed vguali. Perche i piani paralleli BE, AF, sono segati dal piano AC, le
a 16. del 11. communi settioni BC, AD, [a] sono frà di loro parallele. Similmente, perche i piani paralleli BG,CF, sono segati dal piano AC, le communi settioni BA, CD sono frà di loro parallele; dal che il quadrilatero ABCD è parallelogrammo. Nell'istesso modo proueremo, che tutti gli altri quadrilateri, che contengono il solido CG, sono parallelogrammi, che era da dimostrarsi nel primo luogo.



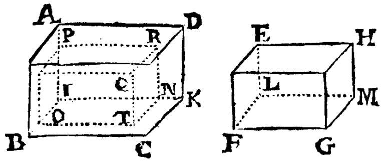
Di nuouo dico che i parallelogrammi opposti BG,CF sono frà di loro simili, ed vguali. Perche i lati AB, BH, che concorrono in B, sono paralleli à i lati DC, CE, che concorrono in C, e non sono nel medesimo
b 10. del 11. piano (stante che sono ne i piani opposti) sarà l'angolo ABH [b] vguale all'angolo DCE. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli del parallelogrammo BG, sono vguali à i corrispondenti angoli del parallelogrammo CF; e perciò i parallelogrammi BG,CF, sono equiangoli. In
c 34. del 1. oltre nel parallelogrammo AC il lato AB [c] è vguale al lato DC, e nel parallelogrammo BE il lato BH è vguale all'opposto CE, è perciò AB à BH sarà come DC à CE: ma AB è vguale à GH, ed il lato CD è vguale ad EF, sarà BH ad HG come CE ad EF; e sarà HG à GA come EF ad FD: per la qual cosa i lati intorno à gli angoli vguali sono proportionali; ed in conseguenza i parallelogrammi BG,CF sono frà di loro simili. Si tirino le rette AH, DE. Perche i due lati AB,BH, sono vguali à i due lati DC,CE, e l'angolo ABH è vguale all'angolo DCE, sarà la base AH vguale alla ba-
d 4. del 1. se DE, ed il triangolo ABH [d] vguale al triangolo DCE, come ancora il
e 34. del 1. doppio, cioè il parallelogrammo BG, [e] sarà vguale al doppio, cioè al parallelogrammo CF. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri parallelogrammi opposti sono simili, ed vguali. E questo è quel solido, ch'Eu-

clide chiama nella 30. defin. di questo. Parallelepipedo. Se il solido dunque contenuto da piani paralleli &c. ch'era da dimostrarsi.

S C O L I O.

De i parallelepipedi simili, quello, che hà la base maggiore, è maggiore dell'altro, che hà la base minore.

Siano i simili parallelepipedi ABCD,EFGH, le di cui basi siano i simili parallelogrammi BK, FM, e sia la base BK maggiore della base FM. Dico che il parallelepipedo ABCD è maggiore del parallelepipedo EFGH. Perche i piani BK,FM, sono frà loro simili, e per ipotesi il piano BK è maggiore del piano FM, sarà IK [a] maggiore di LM, ed IB maggiore di LF. Si faccia IN [b] vguale ad LM, e si faccia IO vguale ad LF, e si compisca il parallelogrammo ON. Di nuouo, perche i solidi BD, FH, sono simili, perciò i piani, che contengono il solido BD [c] saranno simili à i piani, che contengono il solido FH, cioè il piano BA sarà simile al piano FE, ed il piano AK simile al piano EM. Hor essendo il piano AB simile al piano EF, sarà BI ad IA [d] come FL ad LE: ma BI è maggiore di FL, sarà AI [e] maggiore di LE. Si faccia IP [f] vguale ad LE, e si compisca il parallelogrammo PO; co'i lati PI,IN, si compisca il parallelogrammo IR; si facciano i piani opposti, e sarà descritto il parallelepipedo POTR sopra la base ON. In oltre per la similitudine de i parallelepipedi BD, FH, l'angolo solido I sarà vguale all'angolo solido L, cioè l'angolo PIN [g] sarà vguale all'angolo ELM, l'angolo PIO vguale all'angolo ELF, e l'angolo OIN vguale all'angolo FLM. Hor perche i lati OI, IN sono vguali à i lati FL,LM, sarà OI ad IN come FL ad LM, l'angolo OIN è vguale all'angolo FLM, sarà il parallelogrammo ON simile, ed vguale al parallelogrammo FM. Similmente, essendo i lati OI,IP vguali à i lati FL,LE, e l'angolo OIP vguale all'angolo FLE, il parallelogrammo OP sarà simile, ed vguale al parallelogrammo FE: ed essendo i lati PI,IN, vguali à i lati EL,LM, e l'angolo PIN vguale all'angolo ELM, sarà il parallelogrammo IR simile, ed vguale al parallelogrammo LH: ma per l'antecedente propositione, gli opposti parallelogrammi sono simili, ed vguali; in conseguenza il parallelepipedo POTR [h] sarà vguale al parallelepipedo EFGH: ma il parallelepipedo ABCD è maggiore del parallelepipedo POTR, stante che lo contiene, sarà il parallelepipedo ABCD maggiore del parallelepipedo EFGH, ch'era da dimostrarsi.

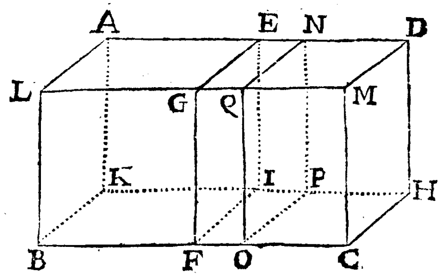


a Scol. alla 20. del 6.
b 3. del 1.
c 9. defin. del 11.
d 1. defin. del 6.
e 14. del 5.
f 3 del 1.
g 9. defin. del 11.
h 10. defin. del 11.

L E M M A.

Quando vn piano, segando vn parallelepipedo, è parallelo à i piani opposti, se diuide la base in due parti vguali, diuide il parallelepipedo in due parallelepipedi simili,

ed vguali; e se diuide la base in due parti ineguali, quel parallelepipedo sarà maggiore, il quale è posto sopra la base maggiore.



Sia il parallelepipedo AB CD, segato dal piano EF, parallelo al piano CD, ouero AB ed il piano EF seghi prima la base BH in due parti vguali. Dico che i parallelepipedi BE, FD, sono frà di loro vguali. Perche i piani EF, DC sono paralleli, le communi
a 16.del 11. *settioni FI, CH* [a] *saranno frà di loro parallele, dal che l'an-*
b 29.del 1. *golo BFI* [b] *sarà vguale all'angolo BCH, e l'angolo KIF, vguale all'angolo*
c 34.del 1. *KHC; si che i parallelogrammi BI, FH* [c] *saranno equiangoli. E perche i pa-*
d 1.del 6. *rallelogrammi BI, FH, hanno vna medesima altezza, perciò sono* [d] *come le basi BF, FC: ma i parallelogrammi BI, FH, si suppongono vguali, sarà la base*
e 14. del 5. *BF* [e] *vguale alla base FC, e la proportione di BF ad FI sarà come quella di*
f 1. defin. del 6. *FC à CH: per la qual cosa i parallelogrammi BI, FH,* [f] *sono frà loro simili, ed vguali. In oltre, perche i parallelogrammi BG, GC, hanno le basi vguali*
g 36.del 1. *BF, FG, e sono frà le medesime parallele LM, BC, perciò sono* [g] *frà di loro vguali; e procedendosi, come prima si fece, si dimostrerà, che i parallelogrammi BG, FM, sono frà loro simili, ed vguali. Per la qual cosa i tre parallelogrammi FH, FM, FE, sono simili, ed vguali à i tre parallelogrammi FK, FI, FE. E perche gli opposti sono, per l'antecedente propositione, simili, ed vguali, in conse-*
h 10. defin. del 11. *guenza il parallelepipedo BE* [h] *sarà simile, ed vguale al parallelepipedo FD, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

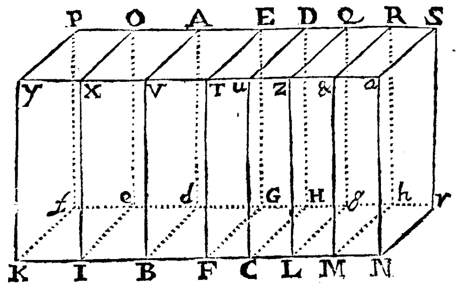
Di nuouo sia segato il parallelepipedo BD dal piano NO, parallelo à i piani AB, DC, in modo, che le base BP sia maggiore della base OH. Dico che il
K 10. del 1. *parallelepipedo BN sarà maggiore del parallelepipedo OD. Si diuida BC* [K] *in*
l Scol. alla 15. del 11. *due parti vguali in F, e per il punto F si faccia passare il piano FE,* [l] *parallelo al piano CD, quello sarà parallelo* [m] *al piano ON, e perciò continuati i pia-*
m Scol. alla 16. del 11. *ni FE, ON, mai scambieuolmente concorreranno; per la qual cosa il piano FE segarà i piani BQ, LN, AP, e le communi settioni FG, GE, EI, IF, caderanno nel luogo interposto frà i piani AB, NO, ed in conseguenza il solido FD sarà maggiore del solido OD: ma, per quel che si è prima dimostrato, il solido BE è simile, ed vguale al solido FD, sarà il solido BE maggiore del solido OD, e tutto il parallelepipedo BN sarà molto maggiore del parallelepipedo OD, ch'era da dimostrarsi.*

THEOREMA XXII. PROPOSITIONE XXV.

Se vn solido parallelepipedo è segato da vn piano equi-

distante

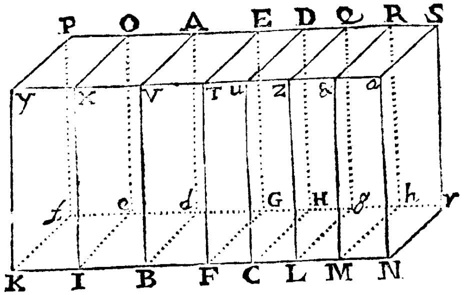
distante à i piani opposti; sarà la base alla base come il solido al solido.



Sia il parallelepipedo ABCD segato dal piano EF, equidistante à i piani opposti BA, CD. Dico che il solido ABFE al solido EFCD, è come la base BG alla base FH. S'intenda continuato il parallelepipedo ABCD, dall'vna, e l'altra parte, e nella retta FK si prendano quãte parti si vogliano, come BI,
IK, [a] ogn'vna vguale ad FB; e nella retta FN, si prendano quante parti si a 3.del 1.
vogliano, come CL, LM, MN, ogn'vna vguale ad FC; per li punti I, K, L, M, N, si facciano passare i piani KP, IO, LQ, MR, NS, [b] paralleli al b Scol. alla 15. del 11.
piano AB. Perche i solidi ABFE, EFCD, sono contenuti da piani paralleli, perciò sono parallelepipedi, e per l'antecedente propositione, i loro piani opposti sono parallelogrammi simili, ed vguali. Nell'istesso modo si prouerà, che tutti gli altri solidi BAOI, IOPK, DCLQ, QLMR, RMNS sono parallelepipedi, e che in ogn'vno i piani opposti sono parallelogrammi simili, ed vguali. In oltre perche i parallelogrammi Ke, Id, BG, sono sopra le vguali basi KI, IB, BF, e sono frà le medesime parallele
fG, KF, [c] perciò sono frà di loro vguali; e sono ancora simili, stante che c 36. del 1.
i lati opposti Kf, Ie, Bd, sono frà loro vguali, e paralleli, ed i lati KI, IB, BF, per costruttione, sono frà loro vguali; si che i parallelogrammi Ke, Id, BG, sono equiangoli, ed hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, cioè KI ad Ie, è come IB à Bd, ouero come BF ad FG. Similmente i parallelogrammi KX, IV, BT, sono sopra le vguali basi KI, IB, BF, e frà le medesime parallele YT, KF, e perciò sono frà di loro vguali. E procedendosi nel modo antecedente, si dimostrerà, che sono ancora fra loro simili. Et essendo i parallelogrammi KP, IO, BA, frà di loro simili, ed vguali, i tre parallelogrammi BG, BT, BA, del parallelepipedo BE, saranno vguali, e simili à i tre parallelogrammi Id, IV, BA, del parallelepipedo OIBA, e saranno ancora simili, ed vguali à i tre parallelogrammi KE, KX, IO, del parallelepipedo PKIO: ma questi in ogn'vno de i detti parallelepipedi sono vguali, e simili [f] à gli
opposti; perciò i parallelepipedi PKIO, OIBA, ABFE, sono frà di loro f 24.del 11.
vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i parallelepipedi EFCD, DCLQ, QLMR, RMNS, sono frà di loro vguali; e sarà il parallelepipedo PKFE multiplice del parallelepipedo ABFE, come la base KG è multiplice della base BG. E similmente tutto il parallelepipedo EFNS sarà multiplice del parallelepipedo EFCD, come la base Fr è multiplice della base FH. Se il lato KF è vguale ad FN, sarà la base KG vguale alla base Fr, e per l'antecedente Lemma, tutto il parallelepipedo PKFE

sarà

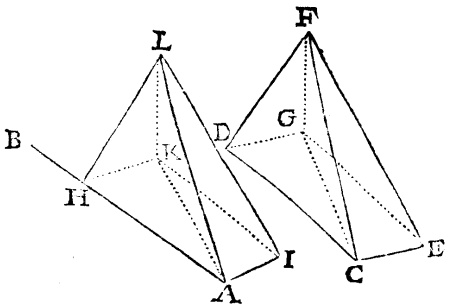
sarà vguale al parallelepipedo EFNS. Se poi KF è minore, ò maggiore di FN, sarà la base KG minore, ò maggiore della base Fr, e per l'antecedente Lemma, il parallelepipedo PKFE sarà minore, ò maggiore del parallelepipedo EFNS. Si considerino quattro quantità, la prima sia il parallelepipedo ABFE, la seconda il parallelepipedo EFCD, la terza sia la base BG, e la quarta la base FH. Gli vguali multiplici della prima, e terza, sono il parallepipedo PKFE, e la base KG, e gli vguali multiplici della seconda, e quarta, sono il parallelepipedo EFNS, e la base Fr. E perche se il parallelepipedo PKFE, ch'è multiplice della prima ABFE, è vguale al parallelepipedo EFNS, ch'è multiplice della seconda EFCD, ancora la base KG, ch'è multiplice della terza BG, è vguale alla base Fr, ch'è multiplice della quarta FH; e se il parallelepipedo PKFE è maggiore, ò minore del parallelepipedo EFNS, ancora la base KG sarà maggiore, ò minore della base Fr, per la 6. definitione del quinto, la prima, cioè il parallelepipedo ABFE, alla seconda, cioè al parallelepipedo EFCD, sarà come la terza, cioè la base BG, alla quarta, ch'è la base FH. Per la qual cosa il parallelepipedo ABCD sarà diuiso dal piano EF, in modo, che il parallelepipedo ABFE al parallelepipedo EFCD, sarà come la base BG alla base FH, ch'era da dimostrarsi.



PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XXVI.

Ad vna data retta linea, in vn punto in essa, costituire vn angolo solido, vguale ad vn angolo solido dato.

Sia data la retta AB, ed il punto in essa A, e sia dato l'angolo solido C, si vuole nel punto A, sopra la retta AB, costituire vn angolo solido, vguale all'angolo solido C. Nella retta CF si prenda qualunque punto F, dal quale si faccia
a 11. del 11. cadere a la retta FG perpendicolare al piano DCEG; si tirino le rette GD, GC, GE, FE, FD; poi alla
b 23. del 1. retta AB, nel punto A, si faccia l'angolo BAI b vguale all'angolo piano



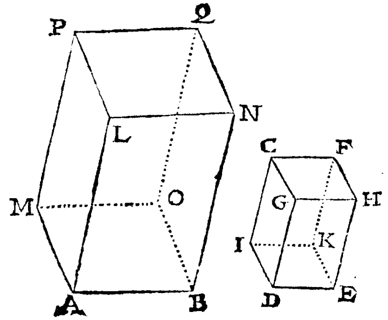
no DCE; e nel medesimo punto A, nel piano BAI, si costituisca l'angolo BAK, c vguale all'angolo DCG; sarà il rimanente angolo KAI vguale c 23. del 1.
al rimanente angolo GCE. Si faccia AK d vguale alla retta CG, poi nel d 3. del 1.
punto K si eleui la retta KL e perpendicolare al piano BAIK; si faccia KL f e 11. del 11.
vguale ad FG, si tiri la retta LA. Dico che l'angolo solido A, contenuto f 3. del 1.
da gli angoli piani LAB, LAI, BAI, è vguale al dato angolo solido C. Si faccia AH g vguale alla retta CD, e si tagli AI vguale à CE; dal pun- g 3. del 1.
to K si tirino le rette KH, KI; e dal punto L si tirino le rette LH, LI; e si considerino i due triangoli HAK, DCG, de'quali i due lati HA, AK, per costruttione, sono vguali à i due lati DC, CG, l'angolo HAK è vguale all'angolo DCG, h sarà la base HK vguale alla base DG. Similmente ne h 4. del 1.
i triangoli KAI, GCE, i due lati KA, AI, sono vguali à i due lati GC, CE, l'angolo KAI è dimostrato vguale all'angolo GCE, sarà la base k KI v- K 4. del 1.
guale alla base GE. In oltre, perche le rette FG, LK, sono perpendicolari à i piani DCEG, HAIK, gli angoli FGD, FGC, FGE, come ancora gli angoli LKH, LKA, LKI, l sono retti. Ne i triangoli LKI, FGE, essendo, l 3. defin. del 11.
per costruttione, il lato LK vguale al lato FG, e si è dimostrato il lato KI vguale al lato GE, e l'angolo LKI vguale all'angolo FGE, in conseguenza m la base LI sarà vguale alla base FE. Similmente ne i triangoli m 4. del 1.
FGC, LKA, i due lati FG, GC, per costruttione sono vguali à i due lati LK, KA, gli angoli FGC, LKA, sono retti, perciò la base LA n sarà vguale alla base FC. Di più ne i triangoli LKH, FGD, i due lati LK, KH, so- n 4. del 1.
no vguali à due lati FG, GD, gli angoli LKH, FGD, sono retti; sarà la base LH vguale alla base FD. Si considerino poi i triangoli LAI, FCE, de'quali i due lati LA, AI sono vguali à due lati FC, CE; la base LI è dimostrata vguale alla base FE; sarà l'angolo LAI o vguale all'angolo FCE. o 8. del 1.
Finalmente ne i triangoli LAH, FCD, i due lati LA, AH, sono vguali à i due lati FC, CD, la base LH è dimostrata vguale alla base FD, sarà l'angolo LAH p vguale all'angolo FCD: ma l'angolo BAI, per costruttione è vguale all'angolo DCE, i tre angoli piani dunque LAB, LAI, BAI, p 8. del 1.
che contengono l'angolo solido A, sono vguali à i tre angoli piani FCD, FCE, DCE, che contengono l'angolo solido C; e perciò l'angolo solido A è vguale all'angolo solido C, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

PROBLEMA V. PROPOSITIONE XXVII.

Sopra vna data retta linea descriuere vn parallelepipedo simile, e similmente posto ad vn dato parallelepipedo.

Sia data la retta linea AB, ed il solido parallelepipedo CDEF, e si voglia sopra la retta AB descriuere vn parallelepipedo simile, e similmente posto, al dato parallelepipedo CDEF. Nel punto A sopra la retta AB, per l'antecedente propositione, si costituisca l'angolo solido A, vguale all'angolo solido D, in modo, che l'angolo LAB sia vguale all'angolo GDE, l'angolo LAM sia vguale all'angolo GDI, e l'angolo MAB sia a 12. del 6. — b 22. del 5. — c Scol. alla 15. del 11.

vguale all'angolo IDE; poi si faccia come ED à DG, [a] così BA ad AL; e di nuouo si faccia come GD à DI, così LA ad AM; sarà per l'egualità ED à DI [b] come BA ad AM. Co'i due lati LA, AB, si compisca il parallelogrammo AN; co'i due MA, AB, si faccia il parallelogrammo AO; e co'i due LA, AM, si faccia il parallelogrammo AP. Per il punto B si faccia passare il piano BQ [c] parallelo al piano AP; per il punto M si faccia passare il piano MQ parallelo al piano AN; e per il punto P si faccia passare il piano PN parallelo al piano MB; e sarà descritto il parallelepipedo PABQ alla retta AB, quale Dico esser simile, e similmente posto al parallelepipedo dato CDEF. Perche l'angolo LAB è vguale all'angolo GDE, e la proportione di LA ad AB è come quella di GD à DE, sarà il parallelogrammo LB [d] simile, e similmente posto al parallelogrammo GE. Similmente perche l'angolo LAM è vguale all'angolo GDI, e la proportione di LA ad AM è come quella di GD à DI, sarà il parallelogrammo AP simile, e similmente posto al parallelogrammo DC. Ed oltre à ciò, essendo l'angolo BAM vguale all'angolo EDI, e la proportione di ED à DI è come quella di BA ad AM; il parallelogrammo AO sarà simile, e similmente posto al parallelogrammo DK; per la qual cosa i tre parallelogrammi EG, DC, DK, sono simili, e similmente posti à i tre parallelogrammi AN, AP, AO, i loro opposti [e] sono ancora simili, e perciò i parallelepipedi CDEF, PABQ, saranno simili, e similmente posti, che era da farsi, e dimostrarsi.

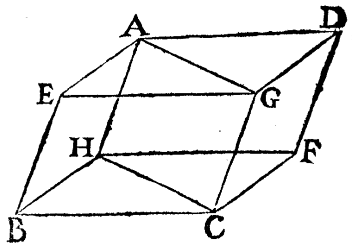


d 1. defin. del 6. — e 24. del 11.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIONE XXVIII.

Il piano, che sega vn parallelepipedo per le diagonali di due piani opposti, lo diuide in due parti vguali.

Sia il parallelepipedo ABCD, nel quale i piani opposti siano i parallelogrammi ED, BF, si tirino i diametri, ò diagonali, che siano le rette AG, HC. Perche i quadrilateri BG, BA sono parallelogrammi, sarà GC vguale, e parallela ad EB, e la retta AH sarà vguale, e



a 9. del 11. — b 33. del 1.

parallela alla medesima EB; dal che le rette AH, GC [a] sono frà di loro vguali, e parallele; e le rette AG, HC, che le congiungono, [b] sono frà di loro vguali, e parallele; e perciò saranno in vn medesimo piano; ed il quadrilatero AHCG sarà parallelogrammo. Dico, che il piano AHCG diuide il parallelepipedo BD in due parti vguali. Perche gli opposti parallelogrammi ED, BF, sono frà di loro simili, ed vguali, le loro metà saranno ancora [c] simili, ed vguali; e sarà il triangolo AEG simile, vguale, e parallelo al triangolo HBC; ed il triangolo AGD sarà simile, vguale, e parallelo al triangolo HCF. Nel parallelogrammo ED i lati opposti, e gli angoli opposti, [d] sono frà di loro vguali, e perciò la proportione di AE ad EG è come quella di GD à DA; si che i triangoli AEG, ADG sono frà loro equiangoli, hanno i lati intorno à gli angoli [e] vguali proportionali, e perciò sono [f] simili; e sarà il triangolo AEG simile, ed vguale al triangolo AGD. Per l'istessa ragione i triangoli HBC, HCF, sono frà loro simili, ed vguali, e tutti quattro i triangoli AEG, AGD, BHC, HCF, sono frà loro simili, ed vguali. Finalmente perche il parallelogrammo AB è simile, ed vguale al parallelogrammo DC, come ancora il parallelogrammo EC è simile, ed vguale al parallelogrammo HD; essendo il parallelogrammo AHCG commune, saranno i tre parallelogrammi AB, EC, AC, simili, ed vguali à i tre parallelogrammi CD, DH, AC; ed i triangoli AEG, HBC, sono simili, ed vguali à i triangoli AGD, HCF; e per la 10. definit. di questo, i prisma AHBG, AHCD, sono frà di loro simili, ed vguali. Per la qual cosa il piano AHCG, che passa per le diagonali AG, HC, diuide il parallelepipedo ABCD in due parti vguali, ch'era da dimostrarsi.

c 20. del 6. & 34. del 1. — d 34. del 1. — e 4. del 6. — f 1. definit. del 6.

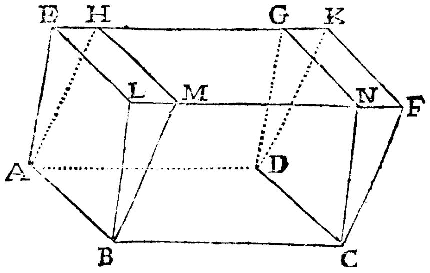
COROLLARIO.

Quando dunque vn piano sega vn parallelepipedo per le diagonali di due piani opposti, lo sega in due prismi di basi triangolari, e perciò ogni prisma di base triangolare è la metà del parallelepipedo, che hà la medesima altezza, la di cui base è il doppio della base triangolare di esso prisma.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIONE XXIX.

Se i solidi parallelepipedi hanno vna medesima base, e sono frà i medesimi piani paralleli, ed i lati, che si eleuano sopra la base in ciascuna di due faccie opposte, terminano nella medesima retta linea, quei solidi parallelepipedi sono frà di loro vguali.

Sopra la medesima base ABCD, e frà i medesimi piani paralleli EF, AC, siano collocati i parallelepipedi EBCG, HBCK, ed in ciascuna delle faccie oppoſte BF,AK,i lati eleuati ſopra la baſe cõcorrano nelle medeſime retteLF,EK,cioè i latiBL,BM,CN,CF,cõcorrano nellamedeſima retta LF; ed i lati AE,AH,DG, DK, nella faccia oppoſta concorrano colla medeſima retta EK. Dico,che i parallelepipedi EBCG,HBCK, ſono frà di loro vguali. Perche i parallelogrammi L B C N, MBCF, hanno la medeſima baſe BC, e ſono frà le mede-



a 35. del 1. ſime parallele LF, BC, [a] perciò ſono frà di loro vguali; detrattone il commune trapetio MBCN, reſta il triangolo LBM vguale al triangolo NCF. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà,che il triangolo EAH è vguale al triangolo GDK.
b 34. del 1. In oltre nel parallelogrammo LC i lati oppoſti LN,BC, [b] ſono frà di loro
c 34. del 1. vguali; e nel parallelogrammo BF il lato MF [c] è vguale all'oppoſto BC;
dal che LN ſarà vguale ad MF, e detrattane la commune MN, reſta LM
d 34. del 1. vguale ad NF. Nel parallelogrammo EB, i lati oppoſti EA,LB ſono [d] frà
di loro vguali,e nel parallelogrammo BH il lato AH è vguale all'oppoſto
BM; come ancora nel parallelogrammo EM i lati oppoſti EH, LM, ſono
frà di loro vguali, dal che i trè lati AE,EH,HA del triangolo EAH, ſono
vguali à i tre lati BL,LM,MB, del triangolo LBM; e per l'8.propoſitione
e 4. del 6. del primo, i triangoli AEH,BLM, ſono equiangoli, & vguali; e perciò, [e]
hanno i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, e per la 1. definit.
del 6. ſono frà di loro ſimili, ed vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà,
che i triangoli CNF,DGK,ſono frà di loro ſimili,ed vguali. E perche nel
g 34. del 1. parallelogrammo BF il lato BM [g] è vguale all'oppoſto CF,e nel parallelogrammo BN il lato BL è vguale all'oppoſto CN; eſſendoſi dimoſtrato
il lato LM vguale ad NF, i tre lati BL,LM,MB, del triangolo LBM, ſono
vguali à i tre lati CN, NF, FC del triangolo CNF; e perciò i triangoli
h 4. del 6. BLM,CNF,ſono equiangoli,haueranno i lati [h] intorno à gli angoli vguali
proportionali;per la qual coſa ſono frà di loro ſimili:ma furono dimoſtrati vguali, in conſeguenza ſono frà loro ſimili,ed vguali. Nell'iſteſſo modo
ſi dimoſtrerà,che i triangoli EAH,GDK, ſono frà loro ſimili,ed vguali. I
quattro triangoli dunque LBM,EAH,NCF,GDK,ſono frà loro ſimili,ed
vguali. Di nuouo perche i parallelogrammi EM,GF, ſono ſopra le vguali
K 36. del 1. baſi LM,NF,e frà le medeſime paralleleEK,LF, [K] perciò ſono frà di loro
l 29. del 1. vguali; & eſſendo GN parallela ad EL, ſarà l'angolo ELM [l] vguale all'
angolo GNF, e l'angolo NGK vguale all'angolo LEH; ſi che i parallelo-
m 34. del 1. grammi EM,GF, ſono equiangoli. E perche il lato EL [m] è vguale all'oppoſto GN, ſarà EL ad LM,come GN ad NF: per la qual coſa i parallelogrammi EM, GF ſono frà loro ſimili; furono dimoſtrati vguali, in conſeguenza ſono frà loro ſimili,ed vguali. Nel parallelepipedo EBCG,i piani
n 24. del 11. oppoſti EB, GC, [n] ſono frà loro ſimili, ed vguali: e nel parallelepipedo
HBCK,i piani oppoſti HB,KC,ſono ſimili,ed vguali,dal che i tre paralle-

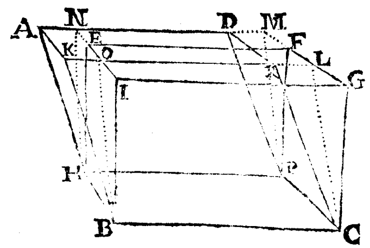
logrammi

logrammi EB,EM,HB,ſono ſimili,ed vguali à i tre parallelogrammi CG, GF,CK;ed i triangoli BLM,AEH,ſono ſimili,ed vguali à i triãgoli CNF, DGK; e per la 10.definitione di queſto, i priſma ABME,DCFG, ſono frà di loro vguali, ſe gli aggiunga vgualmente il ſolido HBCG, ne viene il parallelepipedo EBCG vguale al parallelepipedo HBCK, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XXV. PROPOSITIONE XXX.

Se i ſolidi parallelepipedi hanno vna medeſima baſe, e ſono frà i medeſimi piani paralleli, ed i lati, che ſi eleuano ſopra la baſe, in neſſuna delle faccie oppoſte terminano nella medeſima retta linea,quei parallelepipedi ſono frà di loro vguali.

Sopra la medeſima baſe HBCP, e frà i medeſimi piani paralleli AG, HC, ſiano collocati i parallelepipedi ABCD,EBCF, ed i lati eleuati alla baſe in neſſuna faccia concorrano colla medeſima retta linea, cioè, che i lati BK, BI, CR, CG, non ſiano nel medeſimo piano; E ſimilmente i lati HE,PF,non ſiano nel medeſimo piano co'i lati HA,PD;ne i lati BK, HA ſiano nel medeſimo piano co'i lati BI,HE; ne meno i lati CG,PF,ſiano nel medeſimo piano co'i lati CR, PD. Dico, che il parallelepipedo ABCDè vguale al parallelepipedoEBCF.Si prolũghino i latiKR,AD,IE fin che ſi ſeghino co'i lati GF, AD,cõtinuati,come inM,L,ed N; ſi tirino le rette HN, BO, CL, PM. Nel parallelogrammo EHBI, il lato IE è parallelo all'oppoſto HB; e nel parallelogrammo AB il lato AK è parallelo al medeſimo lato HB; e perciò le rette AK, EI,



ouero IN, [a] ſono frà di loro a 9. del 11.
parallele: Ma nel parallelogrammo AKRD, il lato KR è parallelo al lato AD, ſarà il
quadrilatero AKON [b] paral- b 35. defin. del 1.
lelogrammo,e ſarà AK [c] vguale ad NO:ma il lato AK è vguale al ſuo op- c 34. del 1.
poſto HB, ſarà NO vguale ad HB; e perche fù dimoſtrata la retta NO, parallela ad HB, ſarà NO vguale, e parallela ad HB; per la qual coſa le rette NH,OB,ſono frà di loro vguali,e parallele,ed il quadrilatero NHBO è parallelogrammo. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il quadrilatero MPCL è parallelogrammo. E perche il piano CF è parallelo al piano EB,ſarà tutto il piano MC parallelo al piano NB.Similmente, eſſendo il piano KBCR parallelo al piano AHPD, ſarà tutto il piano KBCL parallelo al piano AHPM; ed il ſolido,le di cui faccie oppoſte ſo-

 noi

d 30.defin. del 11. no i parallelogrammi NHBO, MPCL, cioè il solido MNHBOLCP, [d] sarà parallelepipedo. In oltre si considerino i due parallelepipedi, cioè ABCD, & MNHBOLCP, i quali hanno la medesima base HBCP, sono frà i medesimi piani paralleli AG, HC, ed i lati eleuati sopra la base in ciascuna delle due faccie opposte concorrono in vna medesima retta linea, cioè i lati HA, HN, PD, PM, concorrono nella medesima retta AM; come anco i lati BK, BO, CR, CL, concorrono nella medesima retta linea KL; e per l'antecedente proposit. i detti parallelepipedi sono frà di loro vguali. Finalmente i parallelepipedi EBCF, MNHBOLCP, hanno la medesima base HC, sono frà i medesimi piani paralleli AG, HC, ed i lati eleuati alla base, cioè HN, HE, BO, BI, concorrono nella medesima retta NI, ed i lati CG, CL, PF, PM, concorrono nella medesima retta MG, perciò [e]
e 29. del 11. sono frà di loro vguali. Per la qual cosa il parallelepipedo ABCD sarà vguale al parallelepipedo EBCF, come fù proposto dimostrare.

CONSETTARIO.

Dalle due antecedenti propositioni è manifesto, che quando due parallelepipedi hanno vna medesima base, e sono frà i medesimi piani paralleli, in qualunque modo siano collocati, sempre sono frà di loro vguali.

SCOLIO.

La conuersa alle due antecedenti propositioni è chiara da quel, che si è detto, cioè

Se i parallelepipedi vguali sono costituiti sopra d'vna medesima base, e collocati dalla medesima parte, quelli haueranno la medesim' altezza.

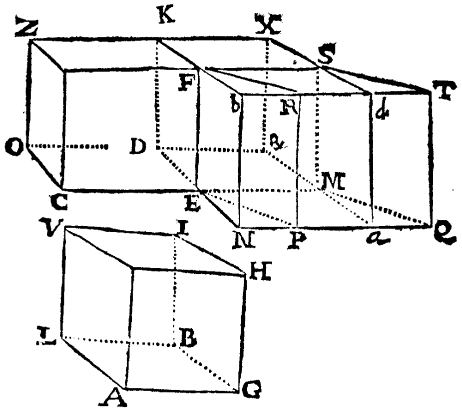
Perche se non haueranno la medesima altezza, vno di quelli sarà più alto dell'altro, se con vn piano equidistante alla base se ne leui la parte più alta, i rimanenti, che restano frà i piani paralleli, sarebbero, per quel che si è dimostrato, frà di loro vguali, ch'è contro all'ipotesi.

THEOREMA XXVI. PROPOSITIONE XXXI.

I solidi parallelepipedi, che hanno vguali basi, e la medesima, ò vguali altezze, sono frà di loro vguali.

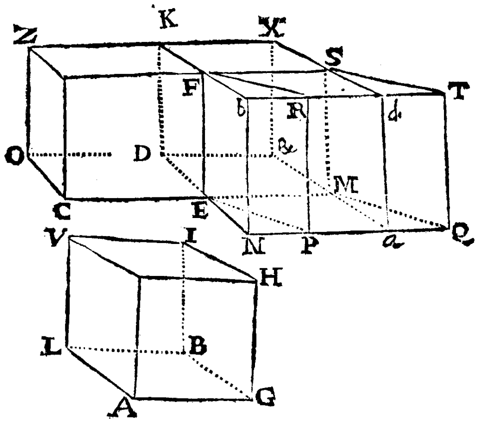
Sopra le vguali basi AB, CD, siano costituiti i parallelepipedi AI, CK, i quali habbiano vguali altezze. Dico, che i parallelepipedi AI, CK, sono frà di loro vguali. Supposto prima, che i lati GH, EF, siano perpendicolari alle basi AB, CD, saranno GH, EF, le loro vguali altezze: si prolunghi il

lato CE verso M, e si faccia EM vguale ad LB; nel piano OMP, sopra la retta EM, in punto E, si costituisca l'angolo MEP [a] vguale all'angolo BLA; si faccia EP vguale ad LA, e si compisca il parallelogrammo EQ; a 23. del 1.
poi colle due FE, EP, [b] si faccia il parallelogrammo ER, e colle due FE, EM, si faccia il parallelogrammo ES, e si compisca il parallelepipedo PQTS. Perche i lati ME, EP, per costruttione, sono vguali à i due lati BL, LA, sarà ME ad EP, come BL ad LA; fù fatto l'angolo MEP vguale all' angolo BLA, sarà il parallelogrammo EQ simile, ed vguale al parallelogrammo LG. Similmente, essendo EF, per ipotesi, vguale ad HG, ouero VL, ed il lato EP è fatto vguale ad LA, sarà FE ad EP, come VL ad LA; gli angoli FEP, VLA, sono vguali (stante che le rette FE, VL si suppongono perpendicolari à i piani CD, AB) sarà il parallelogrammo FP simile, ed vguale al parallelogrammo VA. Di più, perche FE è vguale ad VL, e la retta EM è vguale ad LB, sarà FE ad EM, come VL ad LB; gli angoli VLB, FEM, sono retti, sarà il parallelogrammo FM simile, ed vguale al parallelogrammo VB; e così i tre parallelogrammi EQ, FP, FM, sono simili, ed vguali à i corrispondenti tre parallelogrammi LG, VA, VB; gli opposti [c] sono simili, ed vguali, e b 3. del 1.



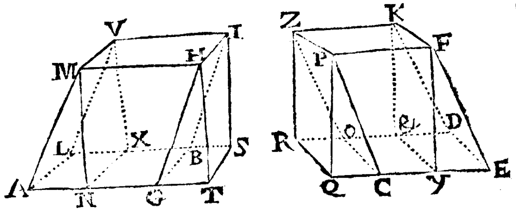
c 34. del 11. perciò i parallelepipedi FPQS, VAGI, sono frà di loro vguali. Si cõpisca il parallelepipedo KEMX. Perche le rette CE, EM, per costruttione, fanno vna sola retta linea, sarà il parallelogrammo CS vn solo piano, ed il solido ZCMX sarà vn solo parallelepipedo; si prolunghino le rette DE, & M, fin che concorrano colla retta PQ continuata in qualche punto N, ed a, si prolunghino le rette XS, KF, fin che concorrano con RT, come in b, & d; si tirino le rette bN, & da, e sarà costrutto il parallelepipedo FNaS. E perche i parallelepipedi FNaS, FPQS, hanno la medesima base ES, e sono frà i medesimi piani paralleli NT, ES, [d] perciò sono frà di loro vguali: ma d 19. & 30. del 11.
il parallelepipedo FPQS fù dimostrato vguale al parallelepipedo AI, sarà il parallelepipedo FNaS vguale al parallelepipedo AI. Di nuouo perche i parallelogrammi PM, NM, hanno la medesima base EM, e sono frà le medesime parallele NQ, EM, perciò sono [e] frà di loro vguali: ma il paral- e 36. del 1.
lelogrãmo PM fù dimostrato vguale al parallelogrãmo AB, ouero CD, sarà il parallelogrammo NM vguale al parallelogrammo CD; e, preso il parallelogrammo E&, come terza quantità, sarà il parallelogrammo NM al parallelogrammo E&, [f] come il parallelogrammo CD al medesimo f 7. del 5.
parallelogrammo E&. Si consideri il parallelepipedo NX, segato dal pia-

no ES equidistante al piano Nd, sarà il parallelepipedo NS al parallele-
g 25.del 11. pipedo EX g come la baseNM alla base E&;ma la base NM alla base E&
fù dimostrata essere come il parallelogrammo CD al parallelogrammo
E&, sarà il parallele-
pipedo NS al paralle-
h 11.del 15. lepipedo EX h come il
piano CD al piano E&.
Di più, essendo il paral-
lelepipedo CX segato
dal piano KE, parallelo
al piano CZ, sarà il pa-
rallelepipedoCK al pa-
K 25.del 11. rallelepipedo EX K co-
me la base CD alla ba-
se E&; ma la base CD
alla base E& fù dimo-
strata essere come il pa-
rallelepipedo NS al pa-
rallelepipedo EX; sarà
il parallelepipedo NS



l 11. del 15. al parallelepipedo EX, l come il parallelepipedo CK al medesimo pa-
m 9. del 5. rallelepipedo EX. Per la qual cosa i parallelepipedi NS, CK m sono frà
di loro vguali: fù dimostrato il parallelepipedo NS vguale al parallele-
pipedo AI; i parallelepipedi dunque AI, CK sono frà di loro vguali.

Siano di nuouo sopra le vguali basi AGBL, OCED, i parallelepipedi
VAGI,ZCEK, che habbiano vguali altezze, e non siano i lati GH, EF,
perpendicolari alle basi LAGB, OCED. Dico che i parallelepipedi
VAGI,ZCEK,sono frà
di loro vguali. Da i
n 11. del 11. punti M, H, I, V, n alla
base AB, continuata, si
facciano cadere le ret-
te perpendicolari MN,
HT,IS,VX, e da punti
Z, P, F, K, alla base
OCED, continuata, si
facciano cadere le per-



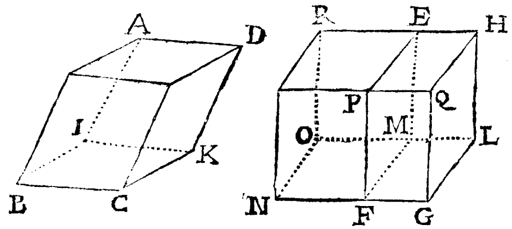
pendicolari ZR,PQ,FY,K&. Perche le altezze de i parallelepipedi sono
frà di loro vguali, tutte le dette perpendicolari saranno frà di loro vgua-
li. Si tirino le rette NX,TS,RQ,&Y, e saranno costrutti i due parallele-
pipedi VNTI, ZQYK, che hanno i lati eleuati perpendicolari alle basi.
Hor essendo la base XNTS vguale al piano opposto VMHI, ed il paral-
o 34.del 1. lelogrãmo VMHI o è vguale alla base LAGB,sarà la base LAGB vgua-
le alla base XNTS. Nell'istesso modo si prouerà, che la base &RQY è
vguale alla base OCED; per la qual cosa le basi XNTS, RQY&,sono frà
di loro vguali; i lati PQ,HT, sono perpendicolari alle basi,e per quel che
si è dimostrato nella prima parte, i parallelepipedi VNTI, ZQYK, sono

frà di loro vguali. Finalmente perche i parallelepipedi VAGI, VNTI,
hanno la medesima base VMHI, e sono frà i medesimi piani paralleli MI,
AS, o perciò sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si prouerà, che i o 29. & 30.
parallelepipedi ZQYK, ZCEK sono frà di loro vguali; mà i due paralle- del 11.
lepipedi VNTI,ZQYK, furono dimostrati vguali, i parallelepipedi dun-
que VAGI,ZCEK, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIONE XXXII.

I solidi parallelepipedi, che hanno vguali altezze, sono frà di loro come le basi.

Siano i due parallelepipedi ABCD, EFGH, i quali habbiano la me-
desima, ò vguali altezze. Dico che il parallelepipedo ABCD al paral-
lelepipedo EFGH, è come la base BK alla base FL. Al lato FM si ap-
* vguale alla base BK plichi il parallelogrammo NM* a in modo, che l'angolo FMO sia vguale a 45.del 1.
all'angolo GLM; à i
quali s'aggiunga v-
gualmente l'angolo
FML; i due angoli
FMO, FML, saranno
vguali à i due angoli
FML,GLM,ma i due
angoli FML,GLM, b b 29.del 11.
sono vguali à due
angoli retti, saranno
i due angoli FML,



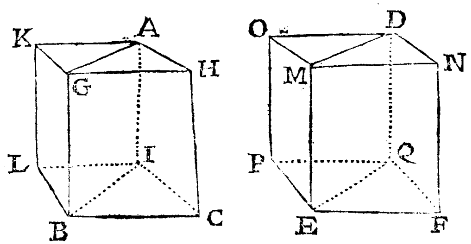
FMO, vguali à due angoli retti; e le rette OM, ML, c costituiranno la c 14 del 1.
sola retta linea OL; dal che i due parallelogrammi FO,FL,costituiscono
il solo piano NL: si compisca il parallelepipedo RNGH, il quale haue-
rà la medesima altezza, che hà il parallelepipedo ABCD. E perche la
base BK è vguale alla base NM, sarà il parallelepipedo ABCD d vguale d 31.del 1.
al parallelepipedo RNFE; e sarà il parallelepipedo ABCD al parallele-
pipedo EFGH, e come il parallelepipedo RNFE al medesimo parallele- e 7. del 5.
pipedo EFGH: ma i due RNFE, EFGH, f sono come le basi NM, FL; f 25.del 11.
sarà il parallelepipedo ABCD al parallelepipedo EFGH, come la base
NM, ouero BK, alla base FL, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO I.

Da quel che si è detto è manifesto, che se saranno due
Prismi di basi triangolari, i quali haueranno la medesima
altezza, il Prisma al Prisma è come la base triangolare dell'
vno alla base triangolare dell'altro.

Per esempio siano i Prismi di basi triangolari ABC, DEF, che habbiano

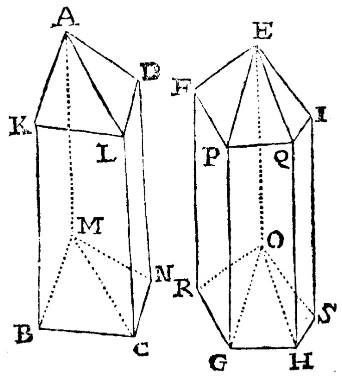
vguali altezze; co' i lati GH,HA, si faccia il parallelogrammo KH, e co' i lati BC, CI, si faccia il parallelogrammo LC, e si compisca il parallelepipedo KC, hauerà il parallelepipedo KC la medesima altezza, che hà il prisma ABC, e per la propositione 28. di questo, il parallelepipedo KC, sarà il doppio del prisma ABC. Di nuouo co' i lati MN, ND, si faccia il parallelogrãmo ON, e co' i lati EF, FQ si faccia il parallelogrammo PF; si compisca il parallelepipedo OF: e per le ragioni antedette, il parallelepipedo OF è il doppio del Prisma DEF, ed hà la medesima altezza, che hà il prisma DEF : ma i prismi ABC,DEF, per ipotesi, hanno vna medesima altezza; perciò i parallelepipedi KC,OF, haueranno vna medesima altezza; e per l'antecedente propositione, il parallelepipedo KC al parallelepipedo OF è come la base LC alla base PF:
a 15. del 5. *ma i parallelepipedi KC, OF, sono come i prismi ABC,DEF* [a] *(stante che sono il doppio de i prismi ABC,DEF) sarà dunque il prisma ABC al prisma DEF*
b 15. del 5. *come la base LC alla base PF: ma la base LC alla base PF* [b] *è come la metà, cioè il triangolo IBC, alla metà, ch'è il triangolo QEF; sarà il prisma ABC*
c 11. del 5. *al prisma DEF* [c] *come la base BIC alla base QEF, ch'è il nostro proposto.*



S C O L I O.

Quel che si è detto de i prismi di basi triangolari, si verifica ancora de i prismi, le di cui basi hanno più di tre lati.

Siano i prismi ABCD,ERGHI, di basi moltilatere, che habbiano vguali altezze. Dico che il prisma ABCD al prisma ERGH è come la base MBCN alla base ORGHS. Da gli angoli A, & E à gli angoli opposti de i poligoni AKLD, EFPQI, si tirino le rette AL, EP, EQ, e da gli angoli M, ed O, à gli angoli opposti delle basi, si tirino le rette MC, OG, OH. Per-
d 13. defini. del 11. *che nel prisma ERGHI i piani opposti EFPQI,ORGHS,* [d] *sono frà di loro simili, vguali, e paralleli; tirate le rette EP, FQ,OG,OH, i poligoni EFPQI,ORGHS,*
e 20. del 6. [e] *saranno diuisi in triangoli di numero vguale; ed i triangoli in vno saranno simili à i triangoli corrispondenti dell'altro; e perciò il triangolo EFP sarà simile al triangolo ORG; il triangolo EPQ sarà simile al triangolo OGH; ed il triangolo*



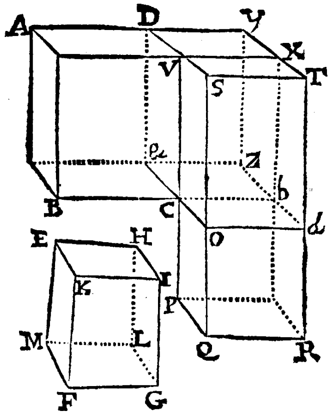
angolo EQI sarà simile al triangolo OHS. Nell'istesso modo si prouerà, che il triangolo ALD è simile al triangolo MCN, ed il triangolo AKL è simile
al triangolo MBC. In oltre perche i piani FG,PH,QS,ES,ER, [f] *per la natu-* f 13. defin. del 11.
ra del prisma, sono parallelogrammi, i lati opposti de' quali [g] *sono vguali, e pa-*
ralleli, saranno tutte le rette FR,PG,QH,IS,EO, frà di loro vguali, e paral- g 34. del 1.
lele; Hor essendo la retta PG vguale, e parallela ad EO, sarà EP [h] *vguale, e* h 33. del 1.
parallela ad OG, ed il quadrilatero EPGO sarà parallelogrammo. Similmente
essendo QH vguale, è parallela ad EO, sarà EQ [k] *vguale, e parallela ad OH,* K 33. del 1.
ed il quadrilatero EOHQ sarà parallelogrammo. E perche i tre lati EF,FP, PE, sono vguali à i tre lati OR,RG,GO, stante che sono lati opposti de i paral-
lelogrammi FG,GE,ER; perciò i triangoli EFP,ORG, [l] *sono frà loro vguali;* l 8. e 4. del 1.
furono dimostrati simili, e sono ne i piani paralleli FI, RS, perciò sono frà loro simili, vguali, e paralleli. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i triangoli EPQ, OGH, sono simili, vguali, e paralleli; e che i triangoli EQI, OHS, sono frà loro simili, vguali, e paralleli. Per la qual cosa i solidi EOGRFP, EOGHQP, EOSHQI, sono prismi di basi triangolari. Nell' istesso modo si dimostrerà, che i solidi AMBCLK, AMNCLD, sono prismi di basi triangolari. Si considerino i prismi ERGO, EGHO, i quali hanno vna medesima altezza, e per il Corollario antecedente, il prisma ERGO al prisma EGHO, è come la base ORG alla base OGH; e componendo, il prisma ERGHO al prisma
EGHO, [m] *è come la base ORGH alla base OGH: ma il prisma EGHO al* m 18. del 5.
prisma EHSO, per l'antecedente Corollario, è come la base OGH alla base OHS; sarà per l'vgualità, il prisma ERGHO al prisma EHSO [n] *co-* n 22. del 5.
me la base ORGHO alla base OHS; e componendo, tutto il prisma
ERGHSO al prisma EHSO [o] *è come la base ORGHS alla base OHS;* o 18. del 5.
ed inuertendo, il prisma EHSO à tutto il prisma ERGHSO, [p] *è come la* p Corol. alla 4. del 5.
base OHS à tutta la base ORGHS. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutto il prisma ABCD al prisma ACNM, è come la base MBCN alla base MCN: ma il prisma ACNM al prisma EHSO è come la base MCN alla base OHS (stante che per ipotesi, hanno altezze vguali) sarà, per l'egualità, il
prisma ABCD al prisma EHSO [q] *come la base MBCN alla base OHS: fù di-* q 22. del 5.
mostrato il prisma EHSO à tutto il prisma ERGHSO, come la base OHS à
tutta la base ORGHS; per l'egualità, [r] *sarà tutto il prisma ABCD al prisma* r 22. del 5.
ERGHSO, come la base MBCN alla base ORGHS, ch'era da dimostrarsi.

COROLLARIO II.

Quindi è che i prismi di vguali basi, se sono frà piani paralleli, sono ancora frà di loro vguali, stante che, essendo frà piani paralleli, sono sotto vna medesima altezza, e per quel che si è dimostrato, sono frà loro come le basi: Se dunque le basi sono frà di loro vguali, i prisma saranno ancora frà di loro vguali.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIONE XXXIII.

I simili solidi parallelepipedi hanno triplicata proportione, che i loro lati homologhi.



Siano i simili parallelepipedi ABCD, EFGH. Dico che il parallelepipedo ABCD al simile parallelepipedo EFGH hà triplicata proportione, che il lato homologo BC al lato homologo FG. Si prolunghi il lato BC verso b, e si faccia Cb [a] vguale ad FG, ouero KI; Similmente si prolunghi &C verso O, e si faccia CO vguale ad FM, ouero EK; e si continui VC verso P, e si faccia CP vguale ad EM, ouero KF; si compiscano i parallelogrammi Ob, CQ, Pb; e si faccia il parallelepipedo OCRd. Perche i parallelogrammi B&, KH sono simili, stante che i proposti parallelepipedi sono simili, sarà l'angolo BC& vguale all'angolo KIH, ouero KEH: ma l'angolo BC& è vguale all'angolo OCb, sarà l'angolo OCb vguale all'angolo KEH: E perche i lati bC, CO sono vguali à i lati HE, EK, la proportione di bC à CO sarà come quella di HE ad EK; dalche i parallelogrammi Ob, KH [b] sono frà di loro simili, ed vguali. Similmente essendo l'angolo VC& vguale all'angolo KFM, ouero KEM, e l'angolo VC& è vguale all'angolo PCO, sarà l'angolo PCO vguale all'angolo KEM. Nell'istesso modo si prouerà, che l'angolo bCP è vguale all'angolo HEM. E perche i lati OC, CP sono vguali à i lati KE, EM, sarà OC à CP come KE ad EM; dal che i parallelogrammi OP, KM, sono frà loro simili, ed vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i parallelogrammi bP, HM, sono frà loro simili, ed vguali; per la qual cosa tutto il parallelepipedo CQRb [c] sarà vguale al parallelepipedo EFGH. Co'i due lati VC, CO, si compisca il parallelogrãmo VO. Essẽdo VP vna sola retta linea, sarà VQ vn solo parallelogrammo, co' i due lati VC, Cb, si compisca il parallelogrammo VCbX, sarà tutto il parallelogrammo PX vn solo piano. Si compisca il parallelepipedo VOdX; sarà tutto il solido VQRX vn solo parallelepipedo. Si compisca il parallelepipedo ABbY. Perche la retta &CO è vna sola retta linea, sarà DO vn solo piano, ed il solido DOdY vn solo parallelepipedo.

Perche i parallelepipedi BD, FH, sono, per ipotesi, frà di loro simili, sarà la base B& [d] simile alla base MG, ouero EI; dalche la proportione di BC à C& [e] sarà come quella di HE ad EK: ma HE ad EK è come bC à CO, sarà BC à C& [f] come bC à CO; e permutando BC à Cb [g] sarà come &C à CO; ma BC à Cb è come il parallelogrammo B& [h] al parallelogram-

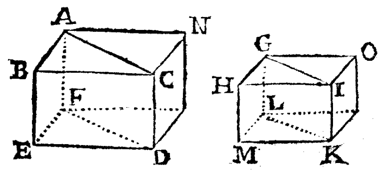
a 3. del 1.
b 1. defin. del 6.
c 10. defin. del 11.
d 9. defin. del 11.
e 1. defin. del 6.
f 11. del 5.
g 16. del 5.
h 1. del 6.

mo &b, e la proportione di &C à CO, [k] è come il parallelogrammo &b al parallelogrammo Cd; sarà il parallelogrammo B& al parallelogrammo &b come il medesimo parallelogrammo &b al parallelogrammo Cd; e perciò i parallelogrammi B&, &b, Cd, sono continui proportionali. E perche il parallelepipedo BD al parallelepipedo CY, [m] è come la base B& alla base CZ, ed il parallelepipedo CY al parallelepipedo OX, è come la base &b alla base Cd; essendo le basi B&, &b, Cd, continue proportionali, saranno i parallelepipedi BD, CY, OX, [n] continui proportionali. Di nuouo per la similitudine de i parallelepipedi BD, FH, i parallelogrammi CD, GH, ouero FE, sono simili; [o] e sarà VC à C& [p] come ME ad EK, cioè come PC à CO; e permutando, sarà VC à CP [q] come &C à CO; ma &C à CO [r] è come il parallelogrammo CD al parallelogrammo CS, e la proportione di VC, à CP è come il parallelogrammo CS al parallelogrammo CQ, sarà il parallelogrammo CD al parallelogrammo CS, [t] come il medesimo parallelogrammo CS al parallelogrammo CQ. Per la qual cosa i parallelogrammi DC, CS, CQ, sono continui proportionali: ma i parallelepipedi CY, OX, CR, [u] sono come le basi DC, CS, CQ, stante che hanno la medesima altezza; essendo le basi CD, CS, CQ, continue proportionali, saranno i parallelepipedi CY, OX, CR continui proportionali; e tutti quattro i parallelepipedi BD, CY, OX, CR sono cõtinui proportionali; ed haueremo quattro quantità, cioè la prima BD, la seconda CY, la terza OX, e la quarta CR, continue proportionali, e per il Lemma 3. dopo la 18. propositione del 6. la prima BD alla quarta CR hà triplicata proportione di quella, che hà la prima BD alla seconda CY: ma BD à CY è come la base B& alla base CZ, cioè come BC à Cb; hauerà BD à CR triplicata proportione, che BC à Cb: ma Cb è fatta vguale ad FG, ed il parallelepipedo CR è dimostrato vguale al parallelepipedo FH; hauerà il parallelepipedo BD al parallelepipedo FH triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo BC al lato homologo FG; ch'era da dimostrarsi.

k 1. del 6.
l 1. del 5.
m 32. del 11.
n 11. del 5.
o 9. defin. del 11.
p 1. defin. del 6.
q 16. del 5.
r 1. del 6.
t 11. del 5.
u 32. del 11.

SCOLIO.

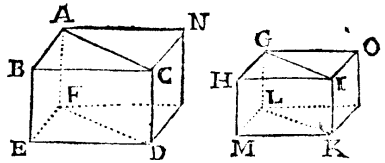
I simili prismi di basi triangolari sono in triplicata proportione de i loro lati homologhi.



Siano i simili prismi AED, GMK le di cui basi siano i triangoli FED LMK. Dico che il prisma AED al simile prisma GMK, hà triplicata proportione, che il lato homologo ED al lato homologo MK. Co i lati AB, BC, si faccia il parallelogrammo BN, e si compisca il parallelepipedo EN. Similmente si compisca il parallelepipedo MO perche i prismi AED, GMK, sono simili, sarà il piano EC [a] simile al piano MI, ed il piano EA simile al piano MG; e parimente il triangolo ABC sarà simile al trian-

a 9. defin. del 11.

golo GHI; dal che l'angolo ABC è vguale all'angolo GHI; e la proportione di AB à BC sarà come quella di GH ad HI; per la qual cosa i parallelogrammi BN, HO, sono frà loro simili. Hor essendo i piani EC, EA, BN, simili à i piani MI, MG, HO; e gli opposti sono simili, ed vguali;

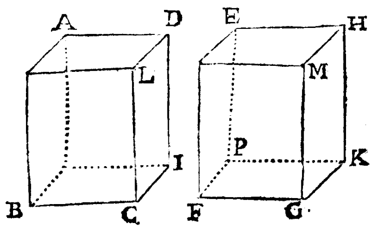


b 9. defin. del 11. *sarà il parallelepipedo EN* [b] *simile al parallelepipedo MO; e per l'antecedente propositione, il parallelepipedo EN al parallelepipedo MO hauerà triplicata proportione, che*

c 15. del 5. *il lato homologo ED al lato homologo MK: ma i parallelepipedi EN, MO,* [c] *sono come le loro metà, cioè come i prismi AED, GMK; hauerà il prisma AED al prisma GMK triplicata proportione, che il lato homologo ED al lato homologo MK, ch'era da dimostrarsi.*

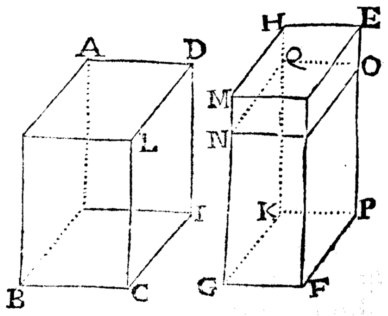
THEOREMA XXIX. PROPOSITIONE XXXIV.

Gli vguali parallelepipedi hanno le basi reciproche all' altezze; e quei parallelepipedi, che hanno le basi reciproche all'altezze, sono frà di loro vguali.



Siano prima i parallelepipedi ABCD, EFGH frà di loro vguali, le di cui basi siano BI, FK. Dico che la base BI alla base FK, è come l'altezza del solido FH all'altezza del solido BD. Supposto prima, che i lati CL, GM, siano perpendicolari alle basi BI, FK; saranno i lati CL, MG, le altezze de i solidi BD, FH. Hor se l'altezze CL, GM, sono vguali, saranno i paral-

a 31. del 11. lelepipedi BD, FH, [a] come le basi: ma i parallelepipedi BD, FH, sono supposti vguali, perciò le basi BI, FK saranno frà di loro vguali; e sarà la base BI alla base FK, come l'altezza GM all'altezza CL.



Se l'altezze GM, CL, non sono frà di loro vguali, vna delle due sarà maggiore; supposto che l'altezza GM sia maggiore di

b 3. del 1. CL. Si faccia GN [b] vguale à CL, e dal punto N si faccia

c Scol. alla 15. del 1. passare il piano NO [c] parallelo alla base GP. Perche i parallelepipedi ABCD, NGFO, hanno vguali altezze, perciò so-

d 32. del 11. no [d] come le basi BI, GP; e perche il piano NO è parallelo al

piano GP, sarà il parallelepipedo GE al parallelepipedo GO, [e] co- e 25. del 11.

me il piano GH al piano GQ, cioè [f] come GM à GN. In oltre, per- f 1. del 6.

che i solidi parallelepipedi BD, GE, per ipotesi, sono frà di loro vguali, preso il solido GO come terza quantità, sarà il solido BD al solido GO, [g] come il solido GE al medesimo solido GO: ma il solido GE al so- g 7. del 5.

lido GO è come GM à GN, sarà il solido BD al solido GO, [h] come MG h 11. del 5.

ad NG: si disse, che il solido BD al solido GO è come la base BI alla base GP; sarà la base BI alla base GP, [l] come l'altezza MG all'altezza NG: l 11. del 5.

ma NG è fatta vguale ad LC, sarà la base BI alla base GP, come l'altezza MG all'altezza CL, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo, supposto che le basi siano reciproche all'altezze, cioè che la base BI alla base GP sia come l'altezza GM all'altezza CL. Dico che i solidi parallelepipedi DB, GE sono frà di loro vguali. Se le altezze CL, GM sono frà di loro vguali, essendo la base BI alla base GP come l'altezza GM all'altezza CL, e l'altezza GM è posta vguale all'altezza CL; sarà la base BI vguale alla base FK, ed il parallelepipedo BD [m] vguale al m 31. del 11.

parallelepipedo FH, ch'era da dimostrarsi.

Se l'altezze non sono vguali, sia l'altezza GM maggiore dell'altezza

CL; si faccia, come prima, CN [n] vguale à CL, e dal punto N si faccia n 3. del 1.

passare il piano NO, [o] parallelo alla base GP; sarà il solido GE al solido o Scol. alla 15. del 11.

GO, [p] come GM à GN; ed i parallelepipedi BD, GO, hauendo vguali p 25. del 11.

altezze, [q] saranno come le basi BI, GP. Perche, per ipotesi, la base BI al- q 32. del 11.

la base GP è come l'altezza MG all'altezza LC, ouero NG, e la proportione di MG ad NG è come il solido GE al solido GO; sarà la base BI alla base GP [r] come il solido GE al solido GO: ma il solido BD al solido r 11. del 5.

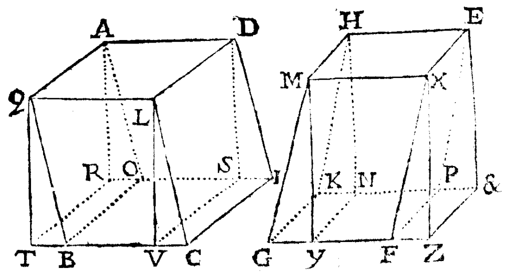
GO è come la base BI alla base GP; sarà il solido BD al solido GO, [t] co- t 11. del 5.

me il solido GE al medesimo solido GO; e perciò [u] i parallelepipedi BD, u 9. del 5.

GE, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

Siano di nuouo i parallelepipedi ABCD, EFGH, le di cui basi siano OB CI, KGFP, ed i lati eleuati alle basi, cioè CL, GM, non siano perpendicolari alle dette basi. Da i punti A, D, L, Q al piano della base OBCI [x] si x 11. del 11.

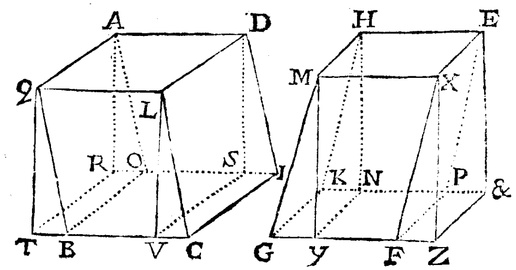
facciano cadere le perpendicolari AR, QT, DS, LV, e da i punti H, M, X, E, si facciano cadere le rette MY, HN, E&, XZ, perpendicolari al piano della base KGFP; le perpendicolari LV, MY &c. saranno le altezze de i proposti parallelepipedi ABCD, EFGH. Nel solido ATVD, si tirino le rette TV, RS, TR, VS, e



nel solido HYZE si tirino le rette YZ, Z&, &N, NY, e saranno descritti i parallelepipedi ATVD, HYZE, le di cui basi sono TV SR, NYZ&. Nel parallelepipedo ABCD la base OBCI [y] è vguale all'opposto parallelogrammo QD; e y 24. del 11.

nel parallelepipedo ATVD la base RTVS è vguale al medesimo parallelogrammo opposto QD, e perciò le basi RTVS, OBCI, sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le basi KGFP, NYZ&, sono frà di loro vguali. In oltre, perche i parallelepipedi ABCD, ATVD, hanno la medesima base QD, e sono frà i medesimi piani paralleli, perciò [z] sono frà di loro vguali; e per simile ragione i parallelepipedi EFGH, EZYH, sono frà di loro vguali. Se dunque supponiamo il parallelepipedo ABCD vguale al parallelepipedo EFGH, sarà il parallelepipedo ATVD vguale al parallelepipedo HYZE. E perche i lati LV, MY, sono perpendicolari alle basi, per quel che si è dimostrato nella prima parte, la base RTVS alla base KGFP, sarà come l'altezza MY all'altezza LV: ma la base RTVS è dimostrata vguale alla base OBCI; e la base KGFP fù dimostrata vguale alla base NYZ&, sarà la base OBCI alla base KGFP, come l'altezza MY all'altezza LV, e perciò le basi sono reciproche all'altezze, ch'era da dimostrarsi.

z 29. & 30. del 11.



Se poi la base OBCI alla base KGFP è come l'altezza MY all'altezza LV. Dico che i parallelepipedi ABCD, EFGH, sono frà di loro vguali. Perche la base OBCI alla base KGFP, è come l'altezza MY all'altezza LV; e la base OBCI è dimostrata vguale alla base RTVS; come ancora la base KGFP è dimostrata vguale alla base NYZ&; sarà la base RTVS alla base NYZ&, come l'altezza MY all'altezza LV; e per quel che sopra si è dimostrato, i parallelepipedi ATVD, HYZE, sono frà di loro vguali: ma il parallelepipedo ATVD fù dimostrato vguale al parallelepipedo ABCD; ed il parallepipedo HYZE fù dimostrato vguale al parallelepipedo EFGH; i parallelepipedi ABCD, EFGH saranno frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

S C O L I O.

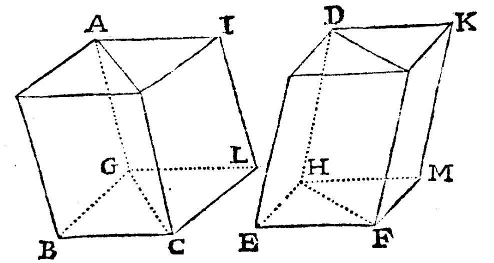
Se i prismi di basi triangolari sono frà loro vguali, hanno le basi reciproche all'altezze; e se le basi sono reciproche all'altezze, i prismi sono frà di loro vguali.

Siano i prismi ABC, DEF, le di cui basi siano i triangoli BGC, EHF, e siano prima i prismi frà di loro vguali. Dico che la base BGC alla base EHF è come l'altezza del prisma DEF all'altezza del prisma ABC. Si compiscano i parallelepipedi BI, EK. Perche i prismi ABC, DEF, sono frà

loro

loro vguali, i loro dupli, cioè i parallelepipedi BI, EK, [a] sono frà loro vguali; e sarà la base BL alla base EM, [b] come l'altezza del parallelepipedo EK all'altezza del parallelepipedo BI: ma la base BL alla base EM è come il triangolo BGC [c] al triangolo EHF, che sono loro metà; ed i parallelepipedi BI, EK, hanno le medesime altezze de i prismi; in conseguenza la base BGC alla base EHF sarà come l'altezza del prisma DEF all'altezza del prisma ABC.

a 28. del 11.
b 34. del 11.
c 34. del 1. & 15. del 5.



Di nuouo Dico che, se la base BGC alla base EHF è come l'altezza del prisma DEF all'altezza del prisma ABC, i prismi ABC, DEF, sono frà loro vguali. Perche i prismi ABC, DEF, hanno l'istessa altezza de i parallelepipedi BI, EK, ed il triangolo BGC al triangolo EHF [d] è come il doppio al doppio, cioè come il parallelogrammo BL al parallelogrammo EM; sarà il piano BL al piano EM, come l'altezza del parallelepipedo EK all'altezza del parallelepipedo BI; e per l'antecedente propositione, i parallelepipedi BI, EK, sono frà di loro vguali; e le loro metà, cioè i prismi ABC, DEF, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

d 34. del 1. & 15. del 5.

THEOREMA XXX. PROPOSITIONE XXXV.

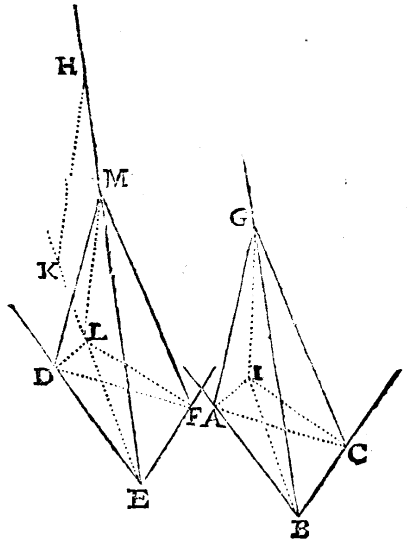
Se saranno due angoli piani, à i vertici de'quali siano inclinate due rette linee, che facciano i corrispondenti angoli, con quelle, che contengono i proposti angoli piani frà loro vguali; e da due qualunque punti, presi nelle rette inclinate, cadano due perpendicolari à i piani, doue sono gli angoli proposti; e da i punti, doue le perpendicolari cadono, ed i vertici de i proposti angoli, si tirino due rette linee; gli angoli contenuti da queste, e dall'inclinate, sono frà di loro vguali.

Siano gli angoli piani ABC, DEF, ed à i vertici E, & B, siano inclinate le rette BG, EH, in modo, che gli estremi H, & G, siano eleuati in alto; e sia l'angolo HED vguale all'angolo GBA, e l'angolo HEF sia vguale all'angolo GBC; e presi nelle rette EH, BG, due qualunque punti H, & G, da i quali si facciano cadere le rette HK, GI, [a] perpendicolari à i piani DEF, ABC; e da i punti L, ed I, à i punti E, & B, siano tirate le rette LE, IB.

a 11. del 11.

Dico,

Dico, che l'angolo HEL è
vguale all'angolo GBI. Se
la retta HE non è vguale
alla retta GB, si tagli dalla
b 3. del i. maggiore EH b la parte EM
vguale alla retta GB; dal
punto M si tiri la retta ML
c 31. del i. c parallela ad HK; saranno
d 34. defin. del 1. le rette HK, ML d in vn medesimo piano, e perciò, continuata la retta ML concorrerà con EK in qualche
punto L. Hor essendo ML
parallela ad HK, e la retta
HK è perpendicolare al
piano DEF, sarà la retta
e 8. del 11. ML e perpẽdicolare al medesimo piano DEF: dal pũto L nel piano DEF si ti-
f 12. del 1. rino le rette LD, LF, f ad
angoli retti con le rette
ED, EF; e dal punto I nel
piano ABC si tirino le rette IA, IC ad angoli retti colle rette AB, BC; e si tirino le rette MD, MF,
GA, GC. Perche la retta ML è perpendicolare al piano DEF, gli angoli
g 3. defin. del 11. MLF, MLE, MLD g sono retti. Similmente perche la retta GI è perpendicolare al piano ABC, gli angoli GIC, GIB, GIA, sono retti. Nel trian-
h 47. del 1. golo rettangolo MLE il quadrato di ME h è vguale à i quadrati de i due
K 47. del 1. lati ML, LE: ma il quadrato di LE K è vguale à i quadrati delle due ED,
DL (stante che l'angolo EDL è retto) sarà il quadrato di ME vguale à i
quadrati delle tre ML, LD, DE: ma i quadrati delle due ML, LD, sono
vguali al quadrato di MD; sarà il quadrato di ME vguale à i quadrati de
l 48. del 1. i due lati MD, DE; per la qual cosa l'angolo MDE l sarà retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo GAB è retto. Di nuouo perche il
m 47. del 1. quadrato di ME m è vguale à i quadrati de i due lati ML, LE, ed il quadrato di LE è vguale à i quadrati de i due lati LF, FE; sarà il quadrato di
ME vguale à i quadrati delle tre ML, LF, FE: E perche i quadrati delle
n 47. del 1. due ML, LF, n sono vguali al quadrato di MF, sarà il quadrato di ME
o 48. del 1. vguale à i quadrati de i due lati MF, FE; dal che l'angolo MFE o sarà
retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo GCB è retto. Si considerino i triangoli MEF, GBC. Perche l'angolo MEF, per ipotesi, è vguale all'angolo GBC, e l'angolo MFE è vguale all'angolo GCB (stante che
p 32. del 1. gli habbiamo dimostrati retti) sarà il rimanente angolo EMF p vguale al
q 4. del 1. restante angolo BGC; e sarà ME ad EF q come GB à BC: ma ME è fatta
r 14. del 5. vguale alla retta GB, in conseguenza EF r sarà vguale à BC. Similmente
t 4. del 6. sarà EM ad MF t come BG à GC; ma EM è vguale à BG, sarà ancora MF
u 14. del 5. u vguale a GC. In oltre si considerino i due triangoli MDE, GAB, de i



quali gli angoli MED, GBA, per ipotesi, sono frà di loro vguali; gli angoli MDE, GAB, sono vguali, perche sono retti; saranno i rimanenti an-
goli DME, AGB x frà di loro vguali; e la proportione di ME ad ED y x 32. del 1. y 4. del 6.
sarà come quella di GB à BA; fù fatta ME vguale alla retta GB, sarà
dunque DE z vguale ad AB. Parimente EM ad MD a è come BG à GA; z 14. del 5. a 4. del 6.
ma EM è vguale à GB, b sarà MD vguale ad AG. Si considerino i due b 14. del 5.
triangoli DEF, ABC. Perche i due lati DE, EF, sono stati dimostrati
vguali a i due lati AB, BC, e l'angolo DEF, per ipotesi, è vguale all'angolo ABC; sarà la base DF c vguale alla base AC; l'angolo EDF sarà c 4. del 1.
vguale all'angolo BAC; e l'angolo EFD vguale all'angolo BCA. Da gli
angoli retti EDL, BAI, se ne leuino gli vguali angoli EDF, BAC, restano
gli angoli LDF, IAC, frà di loro vguali. Similmente da gli angoli retti
LFE, ICB, se ne leuino gli vguali angoli EFD, BCA, resta l'angolo LFD
vguale all'angolo ICA. Ne i triangoli LDF, IAC, il lato DF è dimostrato
vguale al lato AC, gli angoli LDF, LFD, sono vguali à i due angoli IAC,
ICA; sarà il lato LD d vguale al lato IA; e sarà LF vguale ad IC. Ne i d 26. del 1.
triangoli LDE, IAB, perche i due lati LD, DE, sono vguali à i due lati IA,
AB; e gli angoli LDE, IAB, sono frà loro vguali, stante che sono retti;
sarà la base LE e vguale alla base IB. Oltre a ciò ne i triangoli MLD, e 4. del 1.
GIA, perche gli angoli MLD, GIA, sono retti, sarà il quadrato di MD f f 47. del 1.
vguale à i quadrati de i due lati ML, LD; ed il quadrato di GA, sarà
vguale à i quadrati di GI, IA: ma il quadrato di MD è vguale al quadrato di GA, stante che le rette MD, GA, le habbiamo dimostrate vguali;
perciò i quadrati delle due ML, LD, saranno vguali à i quadrati de i due
lati GI, IA; leuatone i quadrati delle vguali DL, IA, resta il quadrato di
ML vguale al quadrato di GI; e la retta ML sarà vguale alla retta GI.
Finalmente si considerino i due triangoli MLE, GIB, de' quali il lato
ME, per costruttione, è vguale al lato GB, il lato LE è dimostrato vguale
al lato IB, saranno i due lati ME, EL, vguali à i due lati GB, BI; la base
ML è dimostrata vguale alla base GI, sarà l'angolo MEL g vguale all'an- g 8. del 1.
golo GBI, come fù proposto dimostrare.

COROLLARIO.

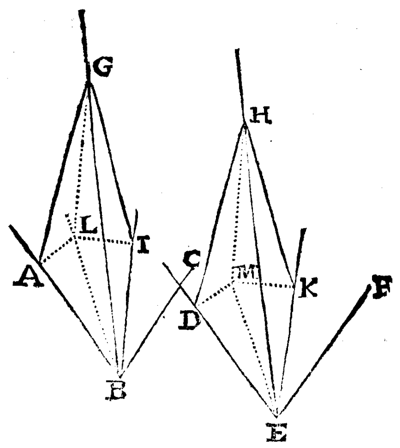
Sarà dunque manifesto, che se ne i vertici di due vguali angoli piani ABC, DEF, saranno inclinate à quel piano due rette linee, come EM, BG, che facciano i corrispondenti angoli con le rette, che contengono l'angolo piano, frà di loro vguali; cioè, che l'angolo MEF sia vguale all'angolo GBC; e l'angolo MED vguale all'angolo GBA; e siano fatte le rette EM, BG, frà di loro vguali; le rette ML, GI, che cadono perpendicolari à i piani DEF, ABC, sono frà di loro vguali.

SCOLIO.

Aggiungo quì il seguente Theorema molto necessario alle cose da dimostrarsi.

Se l'angolo piano ABC è vguale all'angolo piano DEF, & à i vertici B, ed E, siano inclinate le rette GB, HE, in modo, che l'angolo GBC sia vguale all'angolo HEF, e l'angolo GBA sia vguale all'angolo HED; e da i punti B, ed E, ne i piani ABC, DEF, siano tirate le rette BI, EK, in modo, che l'angolo IBC sia vguale all'angolo KEF. Dico, che l'angolo GBI è vguale all'angolo HEK.

a 3. del 1. *Nelle rette eleuate BG, EH si prendano due parti vguali, a come BG, EH,*
b 11. del 11. *e da i punti G, ed H b si facciano cadere rette linee perpendicolari à i piani ABC, DEF: Se quelle cadono nelle rette BI, EK, come fanno le rette GI, HK, per l'antecedente propositione, gli angoli GBI, HEK, sono frà di loro vguali. Se poi le perpendicolari cadono fuori delle rette BI, EK, come fanno le rette GL, HM; si tirino le rette LB, ME; sarà, per l'antecedente proposit. l'angolo GBL vguale all'angolo HEM. Da i punti L, ed*
c 12. del 1. *M, si tirino le rette c LI, LA, MK, MD, ad angoli retti colle rette BI, BA, EK, ED; e si tirino le rette GI, GA, HK, HD. Essēdo le rette GL, HM, perpendicolari à i piani ABC, DEF, gli angoli GLB, GLI, GLA, HME, HMK, HMD,*
d 3. definit. del 1. *d sono retti. Si considerino i triangoli rettangoli GLB, HME. Perche gli angoli GBL, HEM, sono frà di loro*
e 32. del 1. *vguali, e gli angoli GLB, HME, sono retti; sarà il rimanente angolo BGL e vguale al rimanente angolo EHM; dal che i triangoli GLB, HME, sono*
f 4. del 6. *equiāgoli; e la proportione di GB à BL f sarà come quella di HE ad EM: ma*
g 14. del 5. *GB è vguale ad HE, sarà BL g vguale ad EM. Similmente BG à GL h sarà*
h 4. del 6. K 14. del 5. *come EH ad HM; ma GB è vguale ad EH, K sarà GL vguale ad MH. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che ED è vguale ad AB, e che DH è vguale ad AG, e si considerino i due triangoli GLA, HMD. Perche*
l 47. del 1. *gli angoli GLA, HMD, sono retti, sarà il quadrato di GA l vguale à i quadrati*



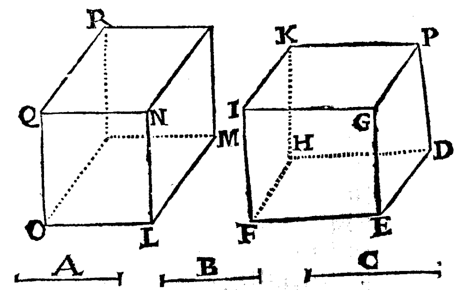
drati

drati de i lati GL, LA; ed il quadrato di HD è vguale à i quadrati de i lati HM, MD: ma il quadrato di GA è vguale al quadrato di HD (stante che GA è dimostrata vguale ad HD) i quadrati de i due lati GL, LA, saranno vguali à i quadrati de i due lati HM, MD: se ne leuino i quadrati delle vguali GL, HM, resta il quadrato di LA vguale al quadrato di DM, ed il lato AL sarà vguale ad MD. Ne i triangoli ABL, DEM, i due lati AB, BL, sono stati dimostrati vguali à i due lati DE, EM, la base AL è vguale alla base MD, sarà l'angolo ABL m vguale all'angolo DEM. In oltre, essendo, per m 8. del 1.
ipotesi, l'angolo DEF vguale all'angolo ABC, e l'angolo FEK vguale all'angolo CBI, sarà il rimanente angolo KED n vguale al rimanente angolo IBA; n 32. del 1.
da i quali se ne leuino gli vguali angoli ABL, DEM, resta l'angolo LBI vguale all'angolo MEK. Ne i triangoli MEK, LBI, gli angoli LIB, MKE, per costruttione, sono retti; gli angoli LBI, MEK, sono stati dimostrati vguali, i rimanenti angoli BLI, EMK, o sono frà di loro vguali, ed i triangoli LBI, o 32. del 1.
MEK, sono equiangoli; e sarà LB à BI, p come ME ad EK: ma LB è dimo- p 4. del 6.
strata vguale ad ME, sarà BI q vguale ad EK. Similmente BL ad LI r sarà q 14. del 5. r 4. del 6.
come EM ad MK, il lato BL è vguale ad EM, sarà LI t vguale ad MK. Si t 14. del 5.
considerino i triangoli GLI, HMK, de' quali i due lati GL, LI, sono stati dimostrati vguali à i due lati HM, MK, l'angolo GLI è vguale all'angolo HMK, stante che sono retti, sarà la base GI u vguale alla base HK. Finalmente, per- u 4. del 1.
che i due lati GB, BI, del triangolo GBI, sono vguali à i due lati HE, EK, del triangolo HEK; la base GI è dimostrata vguale alla base HK, sarà l'angolo GBI x vguale all'angolo HEK, ch'era da dimostrarsi. x 8. del 1.

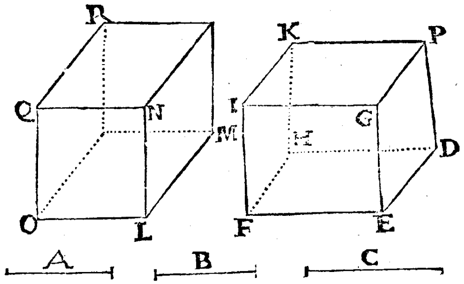
THEOREMA XXXI. PROPOSITIONE XXXVI.

* come A, B, C, Se tre linee rette* sono proportionali, il solido parallelepipedo contenuto da quelle tre rette linee è vguale al parallelepipedo equilatero, che si descriue sopra la media, equiangolo all'altro.

Si costituisca l'angolo solido E, con tre angoli piani, presi ad arbitrio, come sono i tre angoli DEF, DEG, FEG. Si faccia poi ED a vguale ad a 3. del 1.
A; si faccia EG vguale alla media B; e si faccia EF vguale à C; si compisca il parallelepipedo IEDK, il quale sarà contenuto dalle tre rette ED, EF, EG, vguali alle tre rette A, B, C. Di nuouo si esponga la retta LM; e nel punto L si costituisca l'angolo solido L, b vguale all'angolo solido E, cioè, che b 23. del 11.
l'angolo piano MLO sia vguale all'angolo DEF, l'angolo MLN sia vguale all'angolo DEG, e l'angolo GEF vguale all'angolo



c 3. del 1. NLO. Si faccia ogn'vna delle rette LM,LN, LO, [c] vguale alla media B, e si compisca il parallelepipedo QLMR; il quale sarà equilatero, stante che tutti i lati de i parallelogrammi, che lo contengono, sono vguali frà loro; e sarà equiangolo,per costruttione,al parallelepipedo IEDK. Dico che i parallelepipedi QLMR, IEDK, sono frà di loro vguali. Perche la proportione di A à B è come quella di B à C,essendo le tre A,B,C,vguali alle tre DE,ML,EF,sarà DE ad ML come ML, ouero LO ad EF: ma,per costruttione,l'angolo FED è vguale all'angolo OLM, i parallelogrammi dunque OM,FD, hanno intorno à gli angoli vguali i lati re-
d 14. del 6. ciprochi, e perciò sono [d] frà di loro vguali. Si considerino gli vguali angoli piani OLM,FED, à i vertici de'quali,cioè à i punti L, ed E, sono eleuate le rette vguali NL, GE, & l'angolo GED è vguale all'angolo NLM; come ancora l'angolo GEF è vguale all'angolo NLO; e per il corollario antecedente, le rette, che da i punti N, & G, cadono perpendicolari à i piani OLM, FED, sono frà di loro vguali; per la qual cosa l'altezze de i parallelepipedi QLMR,IEDK,sono frà di loro vguali: furono dimostrate le basi OM, FD, frà di loro vguali; i parallelepipedi
e 31. del 11. dunque QLMR,IEDK, [e] sono frà di loro vguali,ch'era da dimostrarsi.



S C O L I O.

La conuersa dell'antecedente propositione si dimostra facilmente nel seguente modo

Se il parallelepipedo contenuto da tre rette linee è vguale, ed equiangolo al parallelepipedo equilatero, descritto sopra la linea intermedia, quelle tre rette linee sono proportionali.

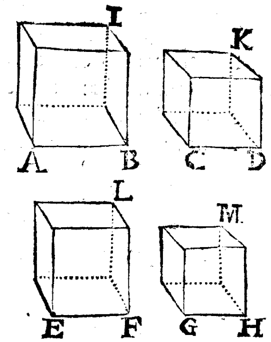
Sia il parallelepipedo IEDK contenuto dalle tre rette A, B, C, il quale sia equiangolo,ed vguale al parallelepipedo equilatero QLMR, descritto sopra la media B. Dico,che le tre rette A,B,C,sono proportionali. S'intenda fatta la costruttione dell'antecedente propositione, e si dimostri, come iui si fece, che i parallelepipedi QLMR, IEDK, hanno vguali altezze, dal che il solido LR al
a 32. del 11. *solido KE [a] sarà come la base OM alla base FD: ma i solidi RL,KE si suppon-*
b 14. del 5. *gono vguali,perciò le basi OM,FD, [b] sono frà di loro vguali. E perche l'angolo OLM è vguale, per ipotesi, all'angolo FED, perciò i parallelogrammi OM,*

FD,

FD, [c] haueranno intorno à gli angoli vguali i lati reciprochi; e sarà FE ad c 14. del 6.
LM, come OL ad ED. Ma OL, per ipotesi, è vguale ad LM, sarà EF ad LM, come la medesima LM ad ED, cioè sarà la retta C alla retta B, come la medesima B ad A, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIONE XXXVII.

Se quattro linee rette sono proportionali, i parallelepipedi simili, e similmente descritti sopra di esse, sono proportionali: e se i parallelepipedi simili, e similmente posti, sono proportionali, i loro lati homologhi sono proportionali.



Habbia prima AB à CD la medesima proportione, che hà EF, à GH, ed i parallelepipedi AI,CK, descritti sopra le due AB, CD, siano simili, è similmente posti, cioè che le due AB,CD, siano loro lati homologhi; e sopra le due EF, GH,siano descritti i parallelepipedi EL, GM, simili, e similmente posti. Dico che il parallelepipedo AI al parallelepipedo CK, è come il parallelepipedo EL al parallelepipedo GM. Perche i solidi parallelepipedi AI,CK,sono simi-
li, hauerà il solido AI al solido CK [a] tri- a 33. del 11.
plicata proportione di quella, che hà il lato homologo AB al lato homologo CD: ma, per ipotesi, AB à CD è come EF à GH, hauerà il solido AI
al solido CK [b] triplicata proportione di quella, che hà EF à GH: ma il b 11. del 5.
solido parallelepipedo EL al simile parallelepipedo GM [c] hà la medesi- c 33. del 11.
ma triplicata proportione di quella, che hà EF, à GH; hauerà il parallelepipedo AI al parallelepipedo CK l'istessa proportione, che hà il parallelepipedo EL al parallelepipedo GM, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo. Di nuouo, supposto che il parallelepipedo AI al simile parallelepipedo CK sia come il parallelepipedo EL al simile parallelepipedo GM. Dico che AB à CD è come EF à GH. Perche i parallelepipedi AI, CK, si suppongono simili, e similmente posti, hauerà il parallelepipedo AI al
parallelepipedo CK [d] triplicata proportione di quella, che hà il lato ho- d 33. del 11.
mologo AB al lato homologo CD: ma, per ipotesi, il solido AI al solido CK è come il solido EL al solido GM, hauerà il solido EL al solido
GM [e] triplicata proportione di quella, che hà AB à CD. E perche il pa- e 11. del 5.
rallelepipedo EL al simile parallelepipedo GM [f] hà triplicata proportio- f 33. del 11.
ne di quella, che hà EF à GH; hauerà AB à CD l'istessa proportione,che hà EF à GH, ch'era da dimostrarsi.

THEO-

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIONE XXXVIII.

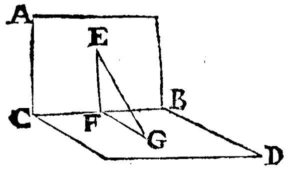
Se vn piano è perpendicolare ad vn altro piano, e da qualche punto preso in vno di quei piani si faccia cadere vna retta perpendicolare all'altro piano, quella caderà nella loro commune settione.

Sia il piano AB, perpendicolare al piano CD, e la loro commune settione sia la retta CB; e preso nel piano AB qualunque punto E, dal quale si faccia cadere vna retta perpendicolare al piano CD. Dico che quella cade nella commune settione CB. Se non cade nella commune settione CB, cada fuori, se è possibile, e sia quella la retta EG; dal punto G si tiri la retta GF [a] perpendicolare alla retta CB, e si tiri la retta EF. Perche i piani CD, AB, si congiungono ad angoli retti, e la retta GF, ch'è nel piano CD, fà angoli retti colla commune settione CB; per la definitione 4. di questo, la retta GF sarà perpendicolare al piano AB, e perciò l'angolo GFE [b] sarà retto. Similmente perche la retta EG è perpendicolare al piano CD, l'angolo EGF [c] sarà retto; per la qual cosa, nel triangolo EGF, gli angoli EGF, EFG, non sono minori di due angoli retti, ch'è contro alla 17. propositione del primo. Non dunque la perpendicolare cade fuori della commune settione CB, ma cade in essa commune settione CB, come fà la retta EF, ch'era da dimostrarsi.

a 12. del 1.

b 3. defin. del 11.

c 3. defin. del 11.

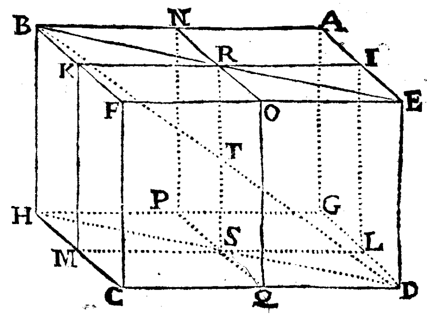


THEOREMA XXXIV. PROPOSITIONE XXXIX.

Se i lati di due piani opposti d'vn parallelepipedo sono diuisi in due parti vguali, la commune settione de i piani, che passano per le opposte diuisioni, e la diagonale d'esso parallelepipedo, si segano scambieuolmente in due parti vguali.

Sia il parallelepipedo ABCD, la di cui diagonale sia BD, ed i lati de i due piani opposti BE, HD, siano diuisi in due parti vguali ne i punti O, I, N, K, Q, L, P, M; e per le opposte diuisioni passino i piani KMLI, NPQO, i quali si seghino scambieuolmente, e la commune settione sia la retta RS. Dico che la retta RS, e la diagonale BD, si segaranno scambieuolmente in due parti vguali. Si tirino le rette RB, RE, SD, SH. Perche DL è vguale, e paparallela ad MC, sarà CD [a] vguale, e parallela ad ML. Similmente perche CQ è vguale, e parallela ad HP, sarà PQ [b] vguale, e parallela ad HC, e sarà ancora [c] parallela à GD; dal che i quadrilateri QM, QL, [d] sono parallelogrammi, e sarà CQ [e] vguale ad MS, e la retta QD vguale ad SL: ma CQ, per ipotesi, è vguale à QD, sarà MS vguale ad SL. E perche la retta LD, per ipotesi, è vguale ad MH, i due lati DL, LS, del triangolo DLS, saranno vguali à i due lati HM, MS, del triangolo HMS; l'angolo DLS [f] è vguale all' angolo HMS (stante che DG è parallela ad HC) sarà la base DS [g] vguale alla base HS, e l'angolo LSD vguale all'angolo MSH; vgualmente se gli aggiunga l'angolo MSD, i due angoli HSM, MSD, saranno vguali à i due angoli MSD, DSL: ma i due angoli MSD, DSL, [h] sono vguali à due angoli retti; i due angoli dunque HSM, MSD, sono vguali à due angoli retti; e perciò le rette HS, SD, [K] costituiscono vna sola retta linea. Nell'istesso modo si prouerà, che la retta BR è vguale alla retta RE, e che le due BR, RE costituiscono vna sola retta linea. In oltre perche i lati ED, BH, sono vguali, e paralleli al lato FC, i due BH, ED, [l] saranno frà di loro vguali, e paralleli: per la qual cosa le rette BE, HD, [m] che congiungono gli estremi, sono frà di loro vguali, e parallele, e le loro metà BR, SD, sono frà di loro vguali, e parallele. E perche le parallele BE, HD, sono segate dalle rette BD, RS, [n] perciò sono in vn medesimo piano; ed in cõseguenza le rette BD, RS, si segano scambieuolmẽte in qualche punto T. Di più, essendo le rette BE, HD, parallele, e sono segate dalla retta BD, gli angoli alterni TDS, TBR, [o] sono frà di loro vguali. Si considerino i triangoli TRB, TSD. Perche l'angolo TDS è vguale all' angolo TBR, e gli angoli al vertice STD, RTB, [p] sono frà di loro vguali, i due angoli STD, SDT, saranno vguali à i due angoli RTB, RBT; il lato SD è dimostrato vguale al lato RB; i due rimanenti lati ST, TD, [q] saranno vguali à i restanti due lati RT, TB; cioè ST sarà vguale ad RT, e la retta DT sarà vguale à TB, ch'era da dimostrarsi.

a 33. del 1.



b 33. del 11.

c 30. del 1.

d 35. defin. del 1.

e 34. del 1.

f 29. del 1.

g 4. del 1.

h 13. del 1.

K 14. del 1.

l 9. del 11.

m 33. del 1.

n 7. del 11.

o 29. del 1.

p 15. del 1.

q 26. del 1.

COROLLARIO.

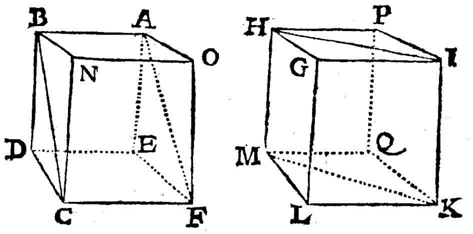
Appare da quel che si è detto, che tutte le diagonali d'vn parallelepipedo si segano scambieuolmente in due parti vguali in vn sol punto; Come per essempio nel punto T, doue tutti sono segati dalla commune settione RS in due parti vguali.

THEO-

THEOREMA XXXV. PROPOSITIONE XXXX.

Se due prismi hanno vguali altezze, e di essi vno habbia per base vn parallelogrammo, e l'altro vn triangolo, ed il parallelogrammo sia il doppio del triangolo; quei due prismi saranno frà di loro vguali.

Siano i due prismi vgualmente alti ABCDEF, GHIKLM, il primo de' quali habbia per base il parallelogrammo DCFE, e la base dell'altro sia il triangolo MLK; e sia il parallelogrammo DCFE il doppio del triangolo MLK. Dico che il prisma ABCDEF è vguale al prisma GHIKLM. Co'i due lati BD, DC, si compisca il parallelogrammo DN, ed haueremo i tre parallelogrammi DN, DF, DA. Si facciano gli opposti, in modo, che si compisca il parallelepipedo DO. Di nuouo co'i due lati ML, LK, si faccia il parallelogrammo LQ, e si compisca il parallelepipedo LP; haueranno i parallelepipedi CA, LP, le medesime altezze de' prismi, e perciò saranno



a 34. del 1. vgualmente alti. Perche il parallelogrammo LQ [a] è il doppio del triangolo MLK, ed il parallelogrammo CE, per ipotesi, è il doppio del medesimo triangolo MLK; sarà il parallelogrammo LQ vguale al parallelogrammo CE: ma le altezze de i proposti parallelepipedi, per ipotesi, sono frà loro vguali; i parallelepipedi dunque CA, LP, che hanno le basi
b 31. del 11. vguali, e l'altezze vguali, [b] sono frà di loro vguali. E perche il piano
c 28. del 11. BCFA diuide il parallelepipedo AC [c] in due parti vguali; ed il piano HMKI diuide il parallelepipedo LP in due parti vguali; si come tutto il parallelepipedo AC è vguale à tutto il parallelepipedo LP, così la metà dell'vno, cioè il prisma ABCDEF, è vguale alla metà dell'altro, cioè al prisma GHIKLM, come fù proposto dimostrare.

Fine del Vndecimo Elemento.

EVCLI-

EVCLIDE RESTITVTO

DA

VITALE GIORDANI

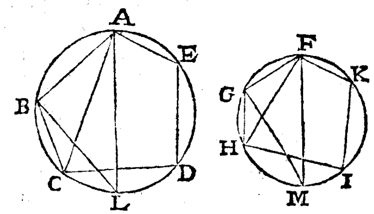
ELEMENTO DVODECIMO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

I poligoni simili descritti ne i circoli, sono frà di loro, come i quadrati de i diametri.

SIANO i poligoni simili ABCDE, FGHIK, descritti ne i circoli ABLD, FGMI, i di cui diametri siano AL, FM. Dico che il poligono ABCDE al poligono FGHIK è come il quadrato del diametro AL al quadrato del diametro FM. Perche i poligoni ABCDE, FGHIK, per ipotesi, sono simili, perciò [a] saranno equiangoli, ed i lati intorno à gli angoli vguali sono proportionali. Sia a 1. defin. del 6.
dunque l'angolo ABC vguale all'angolo FGH; si tirino le rette AC, FH. Essendo AB à BC, come FG à GH, i triangoli ABC, FGH [b] saranno equiangoli, e sarà l'angolo ACB vguale all'angolo b 6. del 6.
FHG. Si tirino le rette BL, GM. Gli angoli BCA, BLA, [c] che sono nella medesima portione BCDA, sono frà di loro vguali; e similmente gli angoli GHF, GMF, nella medesima portione GMKF, sono frà di loro vguali: ma gli angoli BCA, GHF, furono dimostrati vguali; gli angoli dunque BLA, GMF, saranno frà di loro vguali. E perche gli angoli LBA, MGF, ne i semicircoli ABL, FGM, [d] sono frà di loro vguali, stante che sono retti, saranno i due angoli ALB, ABL, del triangolo ALB, vguali à i due angoli FMG, FGM, del triangolo FMG; ed il rimanente angolo BAL [e] sarà vguale al restante angolo GFM; dal che i triangoli ABL, FGM, sono equiangoli; e sarà AL ad AB [f] come FM ad FG; e permutando, AL ad FM [g] sarà come BA ad FG. S'intendano sopra i diametri AL, FM, descritti due quadrati. Perche i quadrati sono poligoni simili, ed i poligoni simili

c 31. del 3.

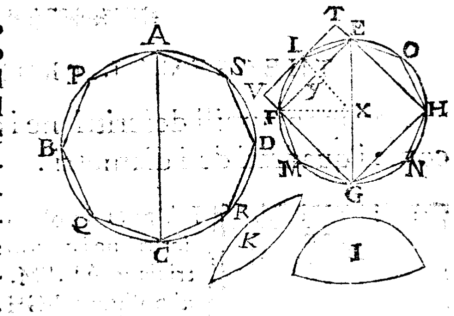


d 31. del 3.
e 32. del 1.
f 4. del 6.
g 16. del 5.

ABCDE,FGHIK sono descritti sopra i lati homologhi AB,FG, essendo AL ad FM, come AB ad FG, sarà il quadrato del diametro AL al quadrato del diametro FM, h come il poligono ABCDE al simile poligono
h 22.del 6. FGHIK, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

I circoli hanno l'istessa proportione, che i quadrati de i loro diametri.



Siano i due circoli ABCD, EFGH, i di cui diametri siano le rette AC, EG. Dico che il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG è come il circolo ABCD, al circolo EFGH; ouero, che il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG è come il circolo ABCD ad vna quantità vguale al circolo EFGH. Se il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG non è come il circolo ABCD ad vna quantità vguale al circolo EFGH, sia, se è possibile, il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, come il circolo ABCD ad vn altra quantità I, la quale ò sia minore, ouero maggiore del circolo EFGH; e supposto prima che la quantità I sia minore del circolo EFGH, per quanto è il piano K, saranno i due I, & K, insieme giunti, vguali al circolo EFGH.

a 6.del 4. S'iscriua nel circolo EFGH a il quadrato EFGH, il quale per lo Scolio alla 9. propositione del 4. sarà la metà del quadrato circoscritto intorno al medesimo circolo. Hor perche il quadrato circoscritto è maggiore del circolo, la metà del quadrato circoscritto sarà maggiore della metà del circolo EFGH: ma il quadrato EFGH è la metà del quadrato circoscritto; sarà il quadrato EFGH maggiore della metà del circolo
b 30. del 3. EFGH. Si diuidano gli archi FE,EH, HG, GF, b in due parti vguali ne i punti L,O,N,M, e si tirino le rette EL,LF,FM,MG,GN,NH,HO,OE; dal centro X al punto L si tiri la retta XL, la quale segarà la retta FE in
c 11. del 1. qualche punto Y; e nel punto L si ponga la retta VLT, c che faccia ango-
d Corol. alla 16. del 3. li retti colla retta XL; toccarà la retta VT d il circolo nel punto L; si ti-
ri la retta XF. Perche gli archi FL,LE, sono fra di loro vguali, gli angoli
e 27. del 3. LXF,LXE, e saranno frà di loro vguali. E perche i lati EX, XY, sono v-
f 4. del 1. guali à i due lati FX,XY, e gli angoli FXY,EXY, sono frà di loro vguali,
g 3. del 3. sarà FY f vguale ad EY, e perciò la retta XL g sega la retta FE ad angoli
h 28. del 1. retti in Y; per la qual cosa le rette VT,FE, h sono frà di loro parallele; e continuata la retta VT, fin che concorra co' i lati GF,HE, prolungati in
K 35. defin. del 1. T, ed V, sarà il quadrilatero VFET K parallelogrammo; il quale l sarà il
l 41. del 1. doppio del triangolo LFE. E perche il parallelogrammo VFET è maggiore

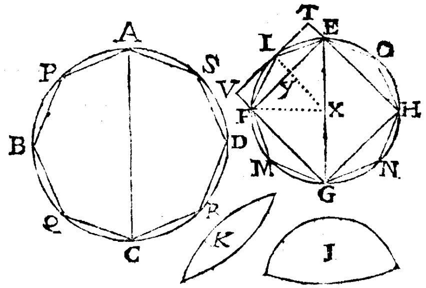
giore della portione FLE, la metà del parallelogrammo VFET sarà maggiore della metà della portione FLE: ma il triangolo FLE è la metà del parallelogrammo VFET, sarà il triangolo LFE maggiore della metà della portione FLE. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutti gli altri triangoli OEH,NHG,MGF, sono maggiori delle metà delle portioni EOH, HNG,GMF; e perciò tutti i detti triangoli, insieme giunti, saranno maggiori di tutte le portioni giunte insieme. Se di nuouo si diuidano gli archi EO,OH,HN &c. in due parti vguali, e si tirino le corde, che sottendono quei piccioli archi, saranno in quelle picciole portioni descritti altri triangoli, i quali giūti insieme, dimostraremo come prima si è fatto, che sarāno maggiori delle metà delle portioni, giunte insime, e cō quest'ordine si proceda nell'altre portioni, che restano fuori di questi triangoli. Hor dal circolo EFGH se ne detragga il quadrato EFGH, ch'è maggiore della metà; e dalle portioni, che restano, se ne leuino i triangoli, che sono maggiori della metà di esse portioni, e dall'altre portioni, che restano, se ne leuino gli altri triangoli, che sono più della metà di esse portioni, e con quest'ordine si proceda, fin che tutte le portioni vltime restate, giunte insieme, m siano minori della quantità K; e supposto che il tutto sia fatto, m 1.del 10.
e le portioni restate siano le notate EO,OH,HN,NG,GM,MF,FL,LE, le quali, giunte insieme, siano minori della quantità K. Perche le due K, ed I, giunte insieme, sono vguali al circolo EFGH, dalle due K, ed I, se ne leui la quantità K, e dal circolo se ne leuino le dette portioni EO,OH, HN,NG &c. che sono minori di K, resterà il poligono ELFMGNHO, maggiore della quantità I. S'iscriua nel circolo ABCD il poligono APBQCRDS simile al poligono ELFMGNHO; il che si fà nell'istesso modo, col quale si è iscritto il poligono ELFMGNHO nel circolo EF GH; per l'antecedente propositione, sarà il poligono APQRS al simile poligono ELMNO, come il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG: ma il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, per ipotesi, è come il circolo ABCD alla quantità I, sa-
rà il poligono APQRS al poligono ELMNO, n come il circolo A n 11.del 5.
BCD alla quantità I; e permutando, il poligono APQRS al circolo o 6.del 5.
ABCD, o sarà come il poligono ELMNO alla quantità I: ma il poligo-
no APQRS è minore del circolo ABCD, sarà il poligono ELMNO p mi- p 4.del 5.
nore della quantità I; fù dimostrato maggiore, sarà il poligono ELM NO maggiore, è minore della quantità I, ch'è impossibile. Nō dunque la quātità I è minore del circolo EFGH; e perciò il quadrato del diametro A C al quadrato del diametro EG nō è come il circolo ABCD ad vna quātità minore del circolo EFGH. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il quadrato del diametro EG al quadrato del diametro AC, non è come il circolo EFGH ad vna quantità minore del circolo ABCD.

Di nuouo, supposto che la quantità I sia maggiore del circolo EFGH. Si concepisca la quātità I al circolo ABCD essere come il circolo EFGH ad vn altra quantità, che per esempio sia K; permutando, sarà la quan-
tità I al circolo EFGH, q come il circolo ABCD alla quantità K: ma la q 16.del 5.
quantità I è posta maggiore del circolo EFGH, sarà il circolo ABCD r r 14. del 5.
maggiore della quantità K; cioè la quantità K sarà minore del circolo

ABCD. Perche il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, per costruttione, è come il circolo ABCD alla quantità I, inuertendo la quantità I al circolo ABCD [t] sarà come il quadrato del diametro EG al quadrato del diametro AC; ma la quantità I al circolo ABCD, per costruttione, è come il circolo EFGH alla quantità K, sarà il quadrato del diametro EG al quadrato del diametro AC, [u] come il circolo EFGH alla quantità K, minore del circolo ABCD, ch'è contro à quello, che si è dimostrato antecedentemente. Non dunque la quantità I è maggiore del circolo EFGH, ne meno, per quel che si è dimostrato, è minore, in conseguenza la quantità I sarà vguale al circolo EFGH. Hor essendo il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, come il circolo ABCD alla quantità I, e la quantità I è vguale al circolo EFGH, sarà il quadrato del diametro AC al quadrato del diametro EG, come il circolo ABCD al circolo EFGH, ch'era da dimostrarsi.

t Corol. alla 4. del 5.

u 11. del 5.



COROLLARIO.

Da quel che si è dimostrato è manifesto, che i circoli sono frà di loro come i simili poligoni iscritti in essi, stante che tanto i circoli, come i poligoni simili, descritti in essi, sono come i quadrati de i diametri.

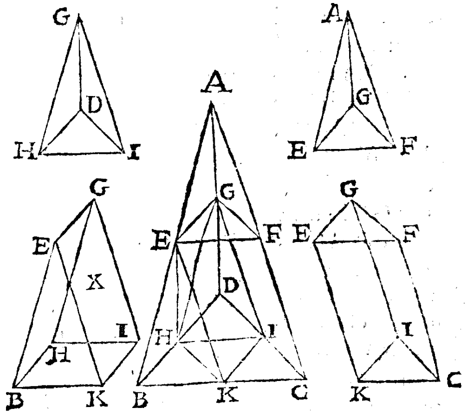
THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Ogni Piramide di base triangolare si diuide in due Piramidi di basi triangolari, simili, ed vguali frà di loro, e simili à tutta la Piramide; & in due prismi vguali, che giunti insieme, sono maggiori della metà della Piramide.

Sia la Piramide ABCD, la di cui base triangolare sia DBC, ed il vertice A; si diuidano tutti i lati di essa Piramide [a] in due parti vguali ne i punti E,F,G,K,I,H, e si tirino le rette EF,FG,GE,KI,IH,HK,IG,HG,KE, HE, e sarà diuisa la Piramide ABCD, nelle due Piramidi AEFG,GHID, le di cui basi sono i triangoli EGF,HDI, ed i vertici A, & G; e ne i due solidi EGIKBH,FGEKCI, i quali, come dimostreremo, sono prismi, cioè il prisma EGIKBH hà le faccie opposte EBK,GHI triangolari, e la base HBKI è parallelogrammo, e l'altro prisma FGEKCI hà per base il triangolo

a 10. del 1.

golo IKC, al quale è opposto il triangolo EGF; e questi due prismi sono separati dal parallelogrammo EGIK, ch'è piano commune dell'vno, e l'altro. Dico che le due Piramidi AEFG,GHID, sono fra di loro simili, ed vguali, ed ogn'vna è simile à tutta la Piramide ABCD, e che i due prisma EGIKBH, FGEKCI, sono frà di loro vguali, e giunti insieme, sono maggiori della metà della Piramide ABCD. Perche i lati AD,AB, sono diuisi in due parti vguali in G, ed E, sarà la proportione di AG à GD come quella di AE ad EB; per la qual cosa la retta EG [b] sarà parallela al lato BD. Similmente essendo i lati AB, BD, diuisi in due parti vguali in E,& H, per la medesima ragione sarà EH parallela à GD. Parimente essendo i lati DA, DB,DC, diuisi in due parti vguali in G,H, ed I, per le cose dette, la retta HG è parallela ad AB, la retta GI è parallela ad AC, e la retta HI è parallela al lato BC. E finalmente, essendo i lati CD,DB,BC, diuisi in due parti vguali in H,K, ed I, la retta KI sarà parallela à BD, e la retta HK è parallela à DC; e perciò tanto il quadrilatero EHDG, quanto il quadrilatero EBHG, ed il quadrilatero GICF, come il quadrilatero HBKI, è parallelogrammo; e sarà GD [c] vguale ad EH, la retta EG vguale ad HD, EG sarà vguale ad HB, e la retta GH vguale ad EB, ouero AE; e similmente HI sarà vguale à BK, la retta IG vguale ad FC, ouero AF, e la retta GF vguale ad IC, ouero DI. Si considerino i due triangoli AGE, GDH, de' quali i lati AG,GE, sono vguali à i due lati GD, DH, la base AE è vguale alla base GH, sarà il triangolo AGE [d] vguale, ed equiangolo al triangolo GDH; dalche i lati intorno à gli angoli vguali [e] sono proportionali, e perciò sono fra loro simili. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i triangoli AGF,GDI, sono frà loro simili, ed vguali. In oltre, perche le rette HD, DI, sono parallele alle due EG, GF, sarà l'angolo HDI [f] vguale all'angolo EGF. Ne i triangoli EGF,HDI, i due lati HD, DI, sono stati dimostrati vguali à i due lati EG, GF, e l'angolo HDI vguale all'angolo EGF, sarà la base HI [g] vguale alla base EF, i rimanenti angoli DHI,DIH, saranno vguali à i restanti angoli GEF,GFE, ed il triangolo DHI vguale al triangolo GEF. E perche i triangoli GEF, DHI, sono equiangoli, haueranno perciò [h] i lati intorno à gli angoli vguali proportionali, ed in conseguenza [K] saranno frà loro simili; si che i triangoli GEF,DHI, sono frà loro simili, ed vguali. Si considerino i triangoli AEF, GHI, de' quali i due lati EA, AF, per quel che si è dimostrato, sono vguali



b 2. del 6.

c 34. del 1.

d 8. e 4. del 1

e 4. del 6.

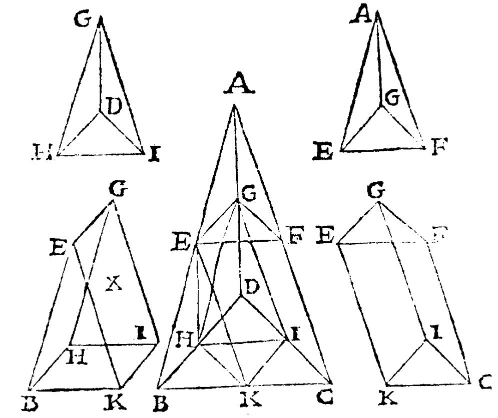
f 10. del 11.

g 4. del 1.

h 4. del 6.

K 1. defin. del 6.

à i due lati HG, GI, la baſe EF è vguale alla baſe HI, ſarà il triangolo
l 8, e 4. del 1. AEF [l] vguale, ed equiangolo al triangolo GHI, e perciò [m] ſono frà loro
m 4. del 6. ſimili, ed vguali. Hor eſſendo i quattro triangoli AGE, AGF, AEF,
EGF, ſimili, ed vguali à i quattro triangoli GDH, GDI, GHI, DHI, le
piramidi AEFG,GHID,
contenute da quelli, ſo-
no frà di loro ſimili, ed
vguali. Di più eſſendo
i lati HG,GI,IH, paral-
leli à i lati BA,AC, CB,
n 10. del 10. ſarà l'angolo HGI [n] v-
guale all'angolo BAC,
l'angolo GIH ſarà vgua-
le all'angolo ACB, e l'
golo GHI ſarà vguale
all'angolo ABC; dal che
i triangoli GHI, ABC,
ſono equiangoli, hanno
i lati intorno à gli ango-
o 4. del 6. li vguali [o] proportionali,
p 1. defin. del 6. e perciò [p] ſono ſimili frà



loro. Nel triangolo DAB la retta GH è dimoſtrata parallela ad AB, e
per il Coroll. alla 4. del 6, i triangoli DGH, DAB, ſono ſimili frà loro.
Parimente eſſendo GI parallela ad AC, ſarà il triangolo DIG ſimile al
triangolo DCA; ed eſſendo HI parallela al lato BC, ſarà il triangolo
DHI ſimile al triangolo DBC: ſi che i quattro triangoli GHI, GDH,
GDI,IDH, ſono ſimili à i quattro triangoli ABC, ADB,ADC,CDB; e
q 9. defin. del 11. perciò la piramide GHID [q] ſarà ſimile alla piramide ABCD. Di più, eſ-
ſendoſi dimoſtrato, che il triangolo DBC è ſimile al triangolo DHI, e
che il triangolo GEF è ſimile al medeſimo triangolo DHI, i triangoli
r 11. del 6. DBC,GEF, [r] ſaranno frà di loro ſimili. E perche le rette EG,GF,EF, ſo-
t 10. del 11. & 4. del 6. no parallele à i lati DB, DC, BC, ſarà il triangolo AGE [t] ſimile al trian-
golo ADB, il triangolo AGF ſimile al triangolo ADC, ed il triangolo
u 9. defin. del 11. AEF ſarà ſimile al triangolo ABC; dal che le piramidi AEGF, ABDC [u]
ſono ſimili frà di loro. Per la qual coſa le piramidi AEGF,GHDI, ſono
ſimili, ed vguali frà di loro, ed ogn'vna è ſimile à tutta la piramide ABC
D, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

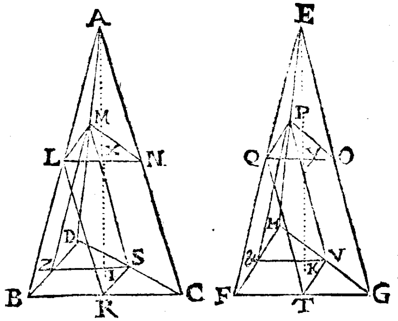
Di nuouo, perche i lati BA,BC, ſono diuiſi in due parti vguali in E, &
x 2. del 6. K, ſarà BK à KC come BE ad EA, e perciò le rette EK, FC [x] ſono frà di
y 9. del 11. loro parallele; fù moſtrata GI parallela ad FC, ſarà EK [y] parallela ad IG:
e perche le rette EG, GF, EF, furono dimoſtrate parallele alle tre BD,
DC, CB, i quadrilateri EKIG, GICF, EKCF ſono parallelogrammi, ed
z 34. del 1. in conſeguenza i loro lati oppoſti [z] ſono frà di loro vguali. Per la qual
a 8. & 4. del 1. coſa i lati EG, GF, EF, ſono vguali, e paralleli à i lati KI, IC, CK, ed i
triangoli GEF,IKC, [a] ſono frà loro equiangoli, vguali, e paralleli; ed eſ-
b 4. del 6. ſendo equiangoli, i lati intorno à gli angoli vguali [b] ſono proportionali,
c 1. defin. del 6. e perciò [c] ſono frà loro ſimili. Hor eſſendo i triangoli EGF, KIC, frà

loro ſimili, vguali, è paralleli, ed i quadrilateri EKIG,GFCI,FCKE, ſo-
no parallelogrammi, per la definitione 13. di queſto, il ſolido EGFCKI
è priſma. Similmente eſſendo i tre lati EB, BK, KE vguali, e paralleli à
i tre lati GH,HI,IG, i triangoli EBK, GHI [d] ſaranno ſimili, vguali, e pa- d 10. dell' 11. & 4. del 1, e 4. del 6.
ralleli. E perche i quadrilateri EKIG, EBHG, BHIK, furono dimoſtrati
parallelogrammi, per la citata definitione 13. di queſto, il ſolido GEB
KIH è ancora priſma, la di cui baſe è il parallelogrammo HBKI, il qua-
le è [e] il doppio del triangolo HKI, cioè il doppio del triangolo IKC. E e 34. del 1.
perche gli antedetti priſmi ſono frà i piani paralleli EGF, DBC, cioè
hanno vna medeſima altezza, eſſendo la baſe parallelogramma BI il dop- f 40. del 11.
doppio della baſe triangolare IKC, ſarà il priſma GEBKIH [f] vguale al
priſma GEFCIK. Finalmente nel parallelogrammo KD il lato HK [g] è g 34 del 1.
vguale al lato DI, fù dimoſtrato il lato BK vguale al lato HI, ed il lato
BH, per coſtruttione, è vguale al lato HD, i tre lati dunque BH,HK,KB, h 8, & 4. del 1.
ſono vguali à i tre lati HD,DI,IH, dal che i triangoli HBK, DHI, [h] ſono
frà loro equiangoli, ed vguali; ed eſſendo equiangoli, hanno i lati [K] in- K 4. del 6.
torno à gli angoli vguali proportionali, e perciò [l] ſono ſimili. Parimente l 1. defin. del 6.
eſſendo i quadrilateri EBHG, EHDG, parallelogrammi, ſarà EB [m] vgua- m 34. del 1.
le ad HG, ed il lato EH ſarà vguale al lato GD: ma BH è vguale ad HD,
i tre lati dunque EH,HB,BE, ſono vguali à i tre lati GD,DH,HG; e per n 8, & 4. del 1. e 4. del 6.
le ragioni antedette, ſarà il triangolo EHB [n] ſimile, ed vguale al trian-
golo GDH; ed oltre à ciò, eſſendo i tre lati EH, HK, KE, vguali à i tre
lati GD,DI,IG, ſaranno i triangoli EHK, GDI [o] frà loro ſimili, ed vgua- o 8, & 4. del 1. e 4. del 6.
li; e tutta la piramide EHBK [p] ſarà ſimile, ed vguale alla piramide GD p 10. defin. del 11.
HI. E perche il priſma GEBKIH, che hà la baſe parallelogramma, è
maggiore della piramide EBKH, ſtante che la contiene, ſarà il medeſi-
mo priſma maggiore della piramide GHID: ma il priſma EGFCKI di
baſe triangolare è vguale al priſma GEBKIH, ſarà il priſma di baſe trian-
golare EGFCKI maggiore della piramide GHID, cioè maggiore della
piramide AEFG. Per la qual coſa i due priſmi GEBKIH, GEFCKI,
giunti inſieme, ſono maggiori delle due piramidi GHID, AFEG; ed in
conſeguenza ſono maggiori della metà di tutta la piramide ABCD, il
che era da dimoſtrarſi.

LEMMA.

Se ſaranno due piramidi di baſi triangolari, e d'vguali altezze, ogn'vna delle quali ſia diuiſa in due piramidi ſimili, ed vguali frà loro, e ſimili à tutta la piramide, et in due priſmi vguali frà loro, che giunte inſieme, ſiano maggiori della metà della piramide, come ſi diſſe nell'antecedente propoſitione; ciaſcun priſma in vna, al corriſpondente priſma nell'altra, ſarà come la baſe di tutta la piramide alla baſe dell'altra piramide.

Siano le piramidi ABCD, EFGH, le di cui basi triangolari siano DBC, HFG, e l'altezze vguali siano le perpendicolari AI, EK, ed ogn'vna di esse piramidi sia diuisa in due piramidi, e due prismi, secondo le conditioni dell'antecedente propositione. Dico che il prisma LMNCRS al prisma OPQGTV è come la base della piramide ABCD alla base della piramide EFGH; cioè come la base DBC alla base HFG. Perche i piani LMN, BDC, per quel che fù dimostrato nell'antecedente propositione, sono paralleli, perciò segano le rette AI, AC, [a] proportionalmente, e sarà AN ad NC come AX ad XI: ma AN, per costruttione, è vguale ad NC, sarà AX vguale ad XI. Nell'istesso modo si prouerà, che EY è vguale ad YK; e perche tutta l'altezza AI è supposta vguale all'altezza EK, perciò la metà XI sarà vguale alla metà YK; dal che i prismi LMNCRS, OPQGTV, sono [b] come le basi RSC, VTG. Si dimostri, come si fece nell'antecedente propositione, che le rette RS, TV, sono parallele à i lati DB, HF, sarà il triangolo DBC [c] simile al triangolo SRC, ed il triangolo HFG sarà simile al triangolo VTG. In oltre perche i lati BC, FG, sono diuisi in due parti vguali in R, & T, sarà BC à CR come FG à GT, per la qual cosa il triangolo DBC al simile triangolo SRC sarà come il triangolo FHG [d] al simile triangolo VTG; e permutando, il triangolo DBC al triangolo HFG è come il triangolo SRC [e] al triangolo VTG: ma il triangolo SRC al triangolo VTG è come il prisma LMNCRS al prisma OPQGTV; [f] come il triangolo GTV; sarà il prisma LMNCRS al prisma OPQGTV, come il triangolo DBC al triangolo HFG: Ma i prismi LMNCRS, OPQGTV, sono vguali à i prismi MLRBZS, PQTF&V, il prisma ancora MLRBZS al prisma PQTF&V sarà, come la base BDC alla base FHG, ch'era da dimostrarsi.



a 17. del 11.

b Corol. alla 32. del 11.

c Corol. alla 4. del 6.

d 22. del 6.

e 16. del 5.

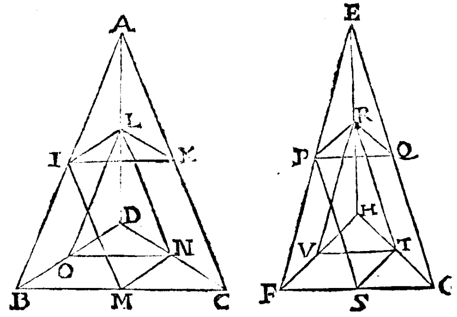
f 11. del 5.

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se saranno due piramidi di vguali altezze, che habbiano le basi triangolari, ed ogn'vna di esse sia diuisa in due piramidi simili, ed vguali frà loro, e simili à tutta la piramide, & in due prismi vguali, che, giunti insieme, siano maggiori della metà di tutta la piramide; ed ogn'vna di quelle piramidi, che risulta da tal diuisione, sia diuisa in due altre piramidi, e due prismi, come la prima; e le piramidi, che risultano da questa diuisione, siano similmente diuise in due piramidi, e due prismi, come prima, e con quest'

quest'ordine in infinito; tutti i prismi, che risulteranno da queste diuisioni in vna piramide, giunti insieme, à tutti i prismi nell'altra piramide, sono come la base della piramide alla base dell'altra piramide.

Sopra le basi triangolari DBC, HFG, siano costituite le piramidi ABCD, EFGH, di vguali altezze, ed ogn'vna sia diuisa, come nella terza propositione, in due piramidi simili, ed vguali, e simile à tutta la piramide, & in due prismi frà loro vguali, che giunti insieme, siano maggiori della metà di tutta la piramide, e le piramidi in vna di esse siano le notate AIKL, LOND, e nell'altra siano EPQR, RVTH; parimente i prismi in vna di esse siano i notati LIBMNO, ILKCMN, e nell'altra siano RPFSTV, PRQGST; e di nuouo ogn'vna delle piramidi AIKL, LOND, EPQR, RVTH, sia similmente diuisa in due piramidi, e due prismi, come prima; ed ogn'vna delle piramidi, che risultano da questa diuisione, si diuida parimente in due piramidi, e due prismi, nell'istesso modo di prima, e con quest'ordine si proceda in infinito. Dico che tutti i prismi, che si fanno nella piramide ABCD à tutti i prismi, che si fanno nella piramide EFGH, sono come la base DBC alla base HFG. Perche le piramidi AIKL, LOND sono frà di loro simili, ed vguali, sarà la base ILK [a] vguale alla base ODN: ma il triangolo ILK [b] è vguale al triangolo MNC, stante che sono le basi opposte del prisma, sarà il triangolo DON vguale al triangolo MNC. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il triangolo HVT è vguale al triangolo TSG. Si dimostri come si fece nell'antecedente Lemma, che il triangolo DBC al triangolo HFG è come il triangolo NMC al triangolo TSG, sarà ancora il triangolo DBC al triangolo HFG, come il triangolo LIK al triangolo PRQ, e sarà il triangolo DBC al triangolo HFG come il triangolo DON al triangolo HVT. Di nuouo il prisma ILKCNM al prisma PRQGST, per l'antecedente Lemma, è come la base DBC alla base HFG, ed il prisma LIBMNO al prisma RPFSTV è come la base BDC alla base HFG, saranno gli antecedenti insieme, cioè l'aggregato de i due prismi LIBCKD, à i conseguenti insieme, ch'è l'aggregato de gli altri due prismi RPFGQH, [c] come l'antecedente BDC al conseguente FHG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che i prismi nella piramide AIKL, giunti insieme, à i prismi nella piramide EPQR, giunti insieme, sono come la base ILK alla base PRQ, cioè come la base BDC alla base FHG: e similmente tutti i prismi nella piramide LOND à tutti i prismi nella piramide RVTH, [d] sono come la



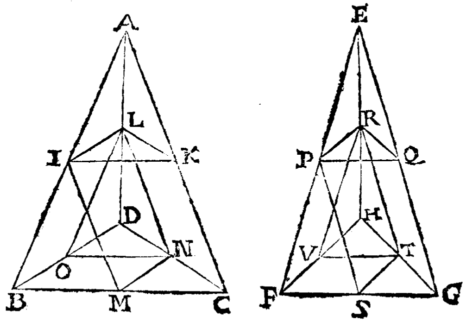
a 10. defin. del 11.

b 13. defin. del 11.

c 12. del 5.

d 12. del 5.

base ODN alla base HVT, cioè come la base BDC alla base FHG. Nell'istesso modo si prouerà, che tutti i prismi in ogn'altra piramide fatta in ABCD à tutti i prismi nella corrispondente piramide fatta in EFGH, essere come la base BDC alla base FHG, e per la 12. propositione del 5. tutti gli antecedenti insieme, che sono i prismi fatti nella piramide ABCD, à tutti i conseguenti insieme, che sono i prismi fatti nella piramide EFGH, saranno come l'antecedente BDC al conseguente FHG. Per la qual cosa tutti i prismi à tutti prismi sono come la base BDC alla base FHG, ch'era da dimostrarsi.

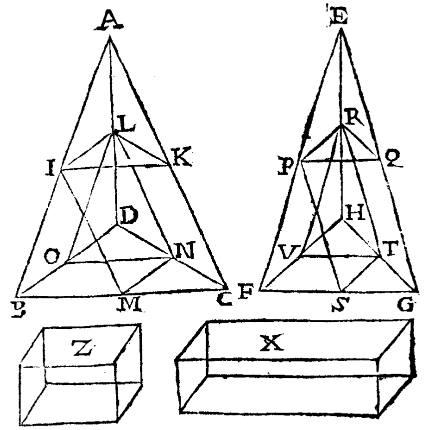


THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Le piramidi di basi triangolari, che hanno la medesima altezza, sono come le loro basi.

Sopra le basi triangolari DBC, HFG, siano costituite le piramidi d'vguali altezze ABCD, EFGH. Dico, che la base DBC alla base HFG è come le piramide ABCD alla piramide EFGH, cioè come la piramide ABCD ad vna quantità vguale alla piramide EFGH. Se la base BDC alla base HFG non è come la piramide ABCD ad vna quantità vguale alla piramide EFGH, s'intenda la base DBC alla base HFG essere come la piramide ABCD alla quantità X, la quale ò sarà minore, ò maggiore della piramide EFGH. Sia nel primo luogo la quantità X minore della piramide EFGH, per quanto è il solido Z, in modo, che i due solidi X, & Z, giunti insieme, siano vguali alla piramide EFGH. Si diuida la piramide EFGH nelle due piramidi EPQR, RVTH, simili, ed vguali frà di loro, ed ogn'vna simile à tutta la piramide EFGH, e ne i due prismi RPF STV, PRQGST, vguali frà di loro, e che, giunti insieme, siano maggiori della metà della piramide EFGH, nel modo, che si fece alla terza propositione di questo: E similmente sia diuisa ogn'vna delle piramidi EPQR, RVTH, in due piramidi, e due prismi, nel modo fatto alla citata 3. proposit. di questo, ed ogn'vna di quelle piramidi, che risultano da questa diuisione, si diuidano in due altre piramidi, e due prismi, come prima, e con quest'ordine si proceda fin che le piramidi, che risultano dall'vltima
a 1. del 10. diuisione, giunte insieme, a siano minori del solido Z: e supposto, che, fatta questa successiua diuisione, le piramidi restate siano EPQR, RVTH,

le quali, giunte insieme, siano minori del solido Z. Perche i due solidi Z, ed X, giunti insieme, sono vguali alla piramide EFGH, detratto da i due solidi Z, ed X, il solido Z, e dalla piramide EFGH detrattane le piramidi EPQR, RVTH, che sono minori del solido Z, restano i due prismi RPF STV, PRQGST, maggiori del solido X. Sia poi diuisa la piramide ABCD nel modo, ch'è stata diuisa la piramide EFGH, per l'antecedente propositione, i prismi, che sono nella piramide ABCD, à i prismi, che sono nella piramide EFGH, hanno l'istessa proportione, quale hà la base DBC alla base HFG: ma la base DBC alla base HFG è come la piramide ABCD al solido X, saranno i prismi, fatti nella piramide ABCD, à i prismi fatti nella piramide EFGH, b come la piramide ABCD al solido X; e permutando, i prismi nella piramide ABCD alla piramide ABCD, c saranno come i prismi nella piramide EFGH al solido X:



b 11. del 5.

c 16. del 5.

ma i prismi nella piramide ABCD sono minori della medesima piramide ABCD, saranno i prismi nella piramide EFGH d minori del solido X: e d 14. del 5.
perche i prismi nella piramide EFGH furono dimostrati maggiori del solido X, sarebbero i prismi della piramide EFGH maggiori, e minori del solido X. Non dunque il solido X è minore della piramide EFGH, e perciò la base DBC alla base HFG non è come la piramide ABC ad vna quantità minore della piramide EFGH. Nell'istesso modo si dimostrerà, che la base HFG alla base DBC non è come la piramide EFGH ad vna quantità minore della piramide ABCD.

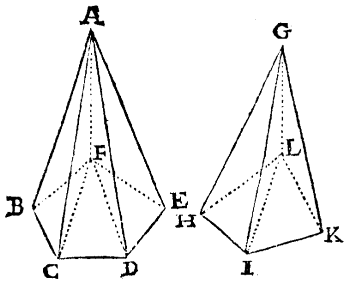
Di nuouo, supposto, che X sia maggiore della piramide EFGH, s'intenda come X alla piramide ABCD, così la piramide EFGH ad vn'altra quantità, che per essempio sia il solido Z; e permutando, sarà il solido X alla piramide EFGH, e come la piramide ABCD al solido Z: ma il soli- e 16. del 5.
do X, per suppositione, è maggiore della piramide EFGH, sarà la piramide ABCD f maggiore del solido Z, cioè il solido Z sarà minore della pirami- f 14. del 5.
de ABCD. In oltre, perche la base DBC alla base HFG, per ipotesi, è come la piramide ABCD al solido X, inuertendo, sarà il solido X alla piramide ABCD, g come la base HFG alla base DBC; ma il solido X alla g Coroll. al la 4. del 6.
piramide ABCD, per costruttione, è come la piramide EFGH al solido Z, sarà la base HFG alla base BDC, h come la piramide EFGH al solido h 11. del 5.
Z, ch'è minore della piramide ABCD; il che è contro à quel che si è dimostrato. Non dunque il solido X è maggiore della piramide EFGH, ne meno, per quel che si è dimostrato, è minore, & in conseguenza il solido X

è vguale alla piramide EFGH. E perche la base DBC alla base HFG è come la piramide ABCD al solido X, essendo il solido X vguale alla piramide EFGH, sarà la base DBC alla base HFG, come la piramide ABCD alla piramide EFGH, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Le piramidi di vguali altezze, che hanno le basi poligone, sono frà loro come le basi.

Siano le piramidi d'vguali altezze ABCDEF, GHIKL, le di cui basi FBCDE, LHIK siano di molti lati, cioè di più di tre lati. Dico, che la piramide ABCDEF alla piramide GHIKL è come la base BCDEF, alla base HIKL. Da gli angoli F, ed L, à gli angoli opposti si tirino le rette FC, FD, LI, in modo, che le basi BCDEF, HIKL siano diuise in triangoli, saranno diuise le piramidi ABCDEF, GHIKL, in tante piramidi di basi triangolari, per quanti triangoli sono nelle basi BCDEF, HIKL. Perche le piramidi ABCF, ACDF, di basi triangolari, hanno la medesim'altezza, per l'antecedente propositione, la piramide ABCF alla piramide ACDF, è come la base FBC alla base FCD; e componendo, la piramide ABCDF alla piramide



ACDF a sarà come la base BCDF alla base FCD: ma la piramide ACDF alla piramide d'vguale altezza ADEF, è come la base CDF alla base FDE; per l'vgualità, la piramide ABCDF alla piramide ADEF b sarà come la base BCDF alla base FDE e cōponēdo, tutta la piramide ABCDEF alla piramide ADEF, c sarà come la base BCDEF alla base FDE. Nell'istesso modo si prouerà, che la piramide GHIKL alla piramide GIKL è come la base HIKL alla base LIK; ed inuertēdo, la piramide GIKL alla piramide GHIKL, d è come la base LIK alla base HIKL. In oltre, perche la piramide ABCDEF alla piramide ADEF è come la base BCDEF alla base FDE, e la piramide ADEF alla piramide d'vguale altezza GIKL, è come la base FDE alla base LIK per l'vgualità, la piramide ABCDEF alla piramide GIKL, e sarà come la base BCDEF alla base LIK: ma la piramide GIKL alla piramide GHIKL è come la base LIK alla base HIKL; sarà, per l'vgualità, la piramide ABCDEF alla piramide GHIKL, f come la base BCDEF alla base HIKL, ch'era da dimostrarsi.

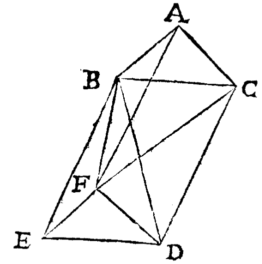
a 18. del 5.
b 22. del 5.
c 18. del 5.
d Coroll. alla 4. del 6.
e 22. del 5.
f 22. del 5.

THEO-

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Ogni prisma di basi triangolari si diuide in tre vguali piramidi di basi triangolari.

Sia il prisma ABCDEF, le di cui basi triangolari siano gli opposti triangoli ABC, FED. Dico, che il prisma ABCDEF si diuide in tre piramidi vguali di basi triangolari. Ne i tre parallelogrammi BEDC, DCAF, ABEF, si tirino le diagonali BD, CF, FB, sarà il triangolo BED a vguale al triangolo BDC; e nel parallelogrammo AFDC, il triangolo AFC sarà vguale al triangolo CFD. Si considerino le due piramidi, le di cui basi sono i triangoli BED, BDC, ed il vertice F; cioè le piramidi FBED, FDCB, le quali hanno vna medesima altezza; e sarà la piramide FEDB alla piramide FDCB, b come la base BED alla base BDC: ma le basi BED, BDC, sono state dimostrate vguali. Le piramidi dunque FEDB, FDCB c sono frà di loro vguali. Di nuouo si considerino due altre piramidi, le di cui basi sono i triangoli FDC, FCA, ed il vertice B, cioè le piramidi BDCF, BFCA, le quali hanno vna medesima altezza, sarà la piramide BFDC alla piramide BFCA, d come la base FDC alla base FCA: ma le basi FDC, FCA; per quel che si è dimostrato, sono frà di loro vguali, in conseguenza le piramidi BFDC, BFCA, e sono frà di loro vguali: ma la piramide BFDC fù dimostrata vguale alla piramide BFED; le tre piramidi dunque BFED, BFDC, BFCA, sono frà di loro vguali, ch'era dimostrarsi.



a 34. del 1.
b 5. del 12.
c 14. del 5.
d 5. del 12.
e 14. del 5.

COROLLARIO.

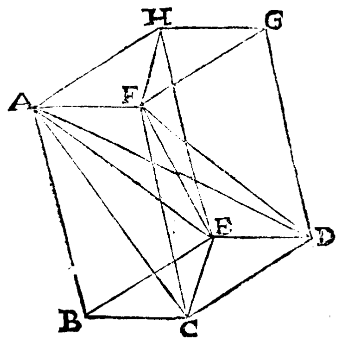
Dall'antecedente propositione si caua, che ogni piramide è la terza parte del prisma vgualmente alto, e che hà la medesima base.

Sopra la base poligona BCDE sia posta la piramide ABCDE, ed il prisma vgualmente alto ACDH, ed i piani opposti AG, BD, siano diuisi in triangoli di numero vguali colle rette HF, EC, sarà diuiso il prisma ACDH in tanti prismi di basi triangolari, per quanti sono i triangoli nella base BCDE; e sarà diuisa la piramide ABCDE in tante piramidi di basi triangolari, per quanti sono i triangolari in essa base BCDE; si tirino le rette DF, EF, e si considerino le due

trian-

piramidi ACDE, FCDE, le quali hanno la medesima base CDE, e sono sotto la medesim'altezza, perciò [f] sono frà di loro vguali: ma la piramide FCDE, per l'antecedente propositione, è la terza parte del prisma FCDGH, sarà la piramide ACDE la terza parte del prisma FCDGH; per la qual cosa la piramide di base triangolare è la terza parte del prisma vgualmente alto, e che hà la medesima base. In oltre, perche la piramide ABCE, per l'antecedente propositione, è la terza parte del prisma HAFECB, e la piramide ACDE è la terza parte del prisma FCDGH, sarà tutta la piramide ABCDE la terza parte di tutto il prisma ABCDGH. Il medesimo si dimostrerà se nella base BCDE saranno più triangoli, poiche in quanti triangoli è diuisa la base BCDE, in tanti prisma di basi triangolari sarà diuiso il prisma ABCDGH, ed in altretante piramidi sarà diuisa la piramide ABCDE, ogn'vna delle quali sarà la terza parte di quel prisma posto sopra la medesima base; e perciò tutta la piramide, composta di quelle piramidi di basi triangolari, sarà la terza parte di tutto il prisma, composto di quei prismi di basi triangolari. D'onde si conclude, che ogni piramide è la terza parte del prisma vgualmente alto, e che hà la medesima base, come si disse. Intendasi però di quei prismi, la di cui base sia vno di quei piani opposti, che nel prisma deuono essere simili, vguali, e paralleli.

f 5. del 12. & 14. del 5.

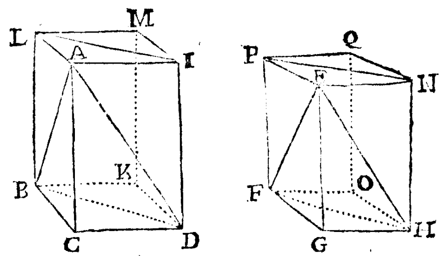


THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Le simili piramidi di basi triangolari sono in triplicata proportione de i loro lati homologhi.

Siano le simili piramidi ABCD, EFGH, le di cui basi siano i triangoli BCD, FGH, e siano le basi BCD, FGH, simili frà loro; per la similitudine delle piramidi, gli altri triangoli in vno saranno simili à gli altri triangoli nell'altro: sia dunque il triangolo ACD [a] simile al triãgolo EGH, il triangolo ABC simile al triãgolo EGF, ed il triangolo ABD simile al triangolo EFH. Dico, che la piramide ABCD alla piramide EFGH, hà triplicata proportione, che il lato homologo CD al lato homologo GH. Co'i lati AC, CD, si faccia il parallelogrammo CI; co'i

a 9. defin. del 11.



due AC, CB, si faccia il parallelogrammo CL, e co'i due lati BC, CD, si faccia il parallelogrammo CK; si compisca il parallelepipedo LCDM. Nell'istesso modo si compisca il parallelepipedo PGHQ. Si tirino le diagonali LI, PN. Il parallelogrammo LBDI [b] diuide il parallelepipedo LCDM ne i due prismi LAIDCB, LMIDKB, vguali frà loro, e di basi triangolari, e sarà tutto il parallelepipedo LCDM à tutto il parallelepipedo PGHQ, [c] come il prisma LAIDCB al prisma PENHGF. E perche la piramide ABCD [d] è la terza parte del prisma LAIDCB, e la piramide EFGH è la terza parte del prisma PENHGF, i detti prismi saranno vguali multiplici di esse piramidi, e sarà il prisma LAIDCB al prisma PENHGF, [e] come la piramide ABCD, alla piramide EFGH. In oltre, perche i triangoli ACD, EGH, sono frà loro simili, sarà l'angolo ACD [f] vguale all'angolo EGH, e la proportione di AC à CD, come quella di EG, à GH; per la qual cosa i parallelogrammi CI, GN, sono frà loro simili. Parimente essendo i triangoli ACB, EGF, frà loro simili, per le ragioni antedette, i parallelogrammi CL, GP, sono frà loro simili; ed essendo i triangoli BCD, FGH, frà loro simili, per l'istessa ragione i parallelogrammi CK, GO, sono frà loro simili; dal che i tre parallelogrammi CI, CL, CK, sono simili à i tre corrispondenti parallelogrammi GN, GP, GO; gli opposti sono simili à questi, e perciò il parallelepipedo LCDM [g] sarà simile al parallelepipedo PGHQ; e per la propositione 33. dell'11. il parallelepipedo LCDM al parallelepipedo PGHQ, hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo CD al lato homologo GH: ma il parallelepipedo LCDM al parallelepipedo PGHQ è come il prisma LAIDCB al prisma PENHGF, ed il prisma LAIDCB al prisma PENHGF, è come la piramide ABCD alla piramide EFGH, hauerà la piramide ABCD alla piramide EFGH, [h] triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo CD al lato homologo GH, il che era da dimostrarsi

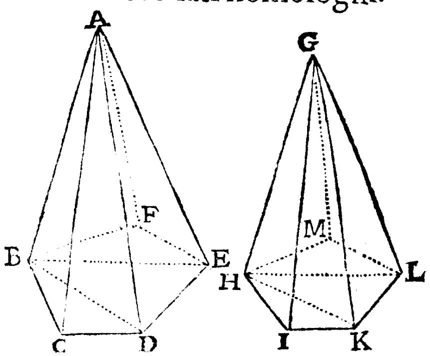
b 28. del 11.
c 15. del 5.
d 7. del 12.
e 15. del 5.
f 1. definit. del 6.
g 9. definit. del 11.
h 11. del 5.

SCOLIO.

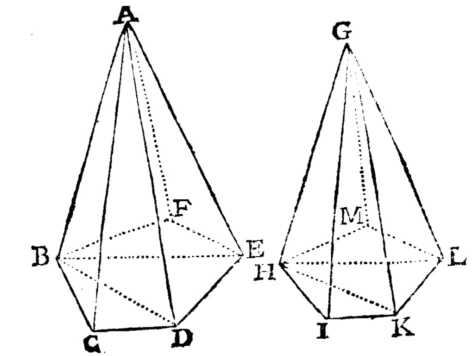
Coll'antecedente propositione facilmente si dimostra, che le piramidi simili, le di cui basi siano più di tre lati, sono in triplicata proportione de i loro lati homologhi.

Siano le piramidi ABCDEF, GHIKLM, simili frà di loro, le di cui basi siano i simili poligoni BCDEF, HIKLM. Dico, che la piramide ABCDEF alla piramide GHIKLM hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo FE al lato homologo LM. Perche i poligoni ABCDEF, HIKLM, sono simili sarà [a] *CD à DE come IK à KL, e sarà DE ad EF come KL ad*

a 1. definit. del 6.



LM ; e permutandoſi, ſarà CD ad IK , [b] *come DE à KL, e la proportione di*
b 16. del 5. *DE à KL ſarà come quella di EF ad LM . Si diuidano i poligoni ſimili*
c 20. del 6. *BCDEF, HIKLM* [c] *in triãgoli di numero vguale, colle rette BD, BE, HK, HL;*
ſarà il triangolo BCD ſimile al triãgolo HIK, il triangolo BDE ſarà ſimile al
triangolo HKL, ed il triangolo BEF ſarà ſimile al triãgolo HLM; e la propor-
tione di CB à BD ſarà come quella di IH ad HK; come ancora la proportione
di CD à DB ſarà come quella di IK à KH . Perche le propoſte piramidi ſono
d 9. definit. del 11. *ſimili , ſarà il triangolo ABC* [d] *ſimile al triangolo GHI, ed il triangolo ACD*
e 1. definit. del 6. *ſarà ſimile al triangolo GIK ; dal che la proportione di AB à BC* [e] *ſarà come*
quella di GH ad HI; ma CB à BD è come IH ad HK, per l'egualità, ſarà AB
à BD [f] *come GH ad HK.*
f 22. del 15. *Parimẽte GK à KI è come*
AD à DC, fù moſtrata CD
à DB eſſere come IK à
KH , ſarà per l'egualità ,
g 22. del 5. *AD à DB* [g] *come GK à*
KH ; ed inuertendo BD à
h Coroll. alla 4. del 5. *DA* [h] *ſarà come HK à*
KG. Hor eſſendo AB à BD
come GH ad HK, e la pro-
portione di BD à DA è co-
me quella di HK à KG ,
ſarà per l'egualità, AB ad
K 22. del 5. *AD* [K] *come HG à GK; dal*
che i triangoli ABD, GHK,
ſono equiangoli, hanno i la-



l 4. del 6. *ti* [l] *intorno à gli angoli vguali, e perciò* [m] *ſono frà loro ſimili. E perche i quattro* proportione
m 1. definit. del 6. *triangoli ABC, ACD, ADB, BCD, ſono ſimili à i quattro triangoli GHI, GIK,*
GKH, HIK, perciò le piramidi ABCD, GHIK, [n] *ſono frà loro ſimili . Nell'i-*
n 9. definit. del 11. *ſteſſo modo ſi prouerà, che la piramide ABDE è ſimile alla piramide GHKL; e*
che la piramide ABEF è ſimile alla piramide GHLM; ed hauerà la piramide
ABCD alla piramide GHIK [o] *triplicata proportione, che il lato homologo CD*
o 8. del 12. *al lato homologo IK : ma CD ad IK è come DE à KL, hauerà la piramide*
ABCD alla piramide GHIK [p] *triplicata proportione , che il lato DE à KL :*
p 11. del 5. *ma la piramide ABDE alla ſimile piramide GHKL* [q] *hà la medeſima tripli-*
q 8. del 12. *cata proportione, che hà il lato homologo DE al lato homologo KL , ſarà la pi-*
ramide ABCD alla piramide GHIK , [r] *come la piramide ABDE alla pira-*
r 11. del 5. *mide GHKL . Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che la piramide ABDE alla pira-*
mide GHKL è come la piramide ABEF alla piramide GHLM . Per la qual
coſa tutti gli antecedenti inſieme, che compongono la piramide ABCDEF , à
tutti i conſeguenti inſieme, che compongono la piramide GHIKLM, [t] *ſono come*
t 12. del 5. *vno antecedente, ch'è la piramide ABEF, ad vn conſeguente, ch'è la piramide*
GHLM. Ma la piramide ABEF alla ſimile piramide GHLM [u] *hà triplicata*
u 8. del 12. *proportione, che il lato homologo FE al lato homologo ML, hauerà tutta la pi-*
ramide ABCDEF à tutta la piramide GHIKLM [x] *triplicata proportione, che*
x 11. del 5. *il lato homologo FE al lato homologo ML, ch'era da dimoſtrarſi.*

COROL-

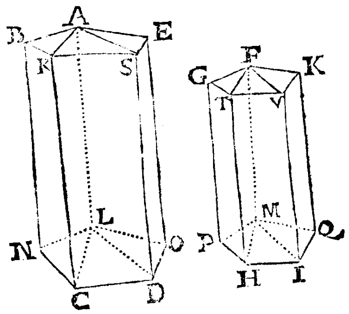
COROLLARIO.

Appare da quel che ſi è detto, che le piramidi ſimili , di baſi poligone , ſi diuidono in piramidi ſimili, di numero vguale .

SCOLIO.

Nell'iſteſſo modo ſi proua, che i priſmi ſimili , di baſi poligone , hanno triplicata proportione de i loro lati homologhi.

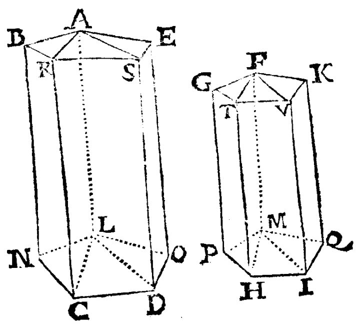
Siano i ſimili priſmi ABCDE, FG
HIK, di baſi poligone . Dico che il
priſma ABCDE al priſma FGHIK
hà triplicata proportione di quella ,
che hà il lato homologo DO al lato
homologo IQ. Perche i priſmi ſono
frà loro ſimili, perciò i piani, che con-
tengono vno di eſſi , [a] *ſono ſimili à i* a 9. defin. del 11.
corriſpondenti piani , che contengono
l'altro ; per il che le baſi NCDOL ,
PHIQM , BRSEA , GTVKF , ſono
frà loro ſimili. Si diuidano queſte
baſi colle rette LC, LD, MH, MI, AR,



AS, FT, FV, in triangoli di numero vguale, ſaranno i triangoli nelle baſi NO, b 20. del 6.
BE, [b] *ſimili à i corriſpondenti triangoli, che ſono nelle baſi PQ, GK ; ed i tri-*
angoli, che ſono nelle baſi BE , GK, ſaranno ſimili à i corriſpondenti triangoli
delle baſi NO, PQ, e ſarà l'angolo NCL [c] *vguale all'angolo PHM, e l'angolo* c 1. defin. del 6.
LCD vguale all'angolo MHI ; ed oltre à ciò la proportione di NC à CL ſarà
come quella di PH ad HM. In oltre perche i piani CB, CS, ſono ſimili à i cor-
riſpondenti piani HG, HV, ſarà l'angolo RCN [d] *vguale all'angolo THP , e* d 1. defin. del 6.
l'angolo RCD vguale all'angolo THI : ma per la ſimilitudine de' poligoni
NCDO, PHIQ, gli angoli NCD, PHI, ſono frà loro vguali, per lo Scolio al-
la 35. propoſitione del 11. ſarà l'angolo RCL vguale all'angolo THM. Nell'
iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'angolo CRA è vguale all'angolo HTF. E per-
che le rette RC, AL, come lati de i parallelogrammi CB, BL, [e] *ſono vguali, e pa-* e 34. del 1.
rallele al lato NB : ſarà RC vguale , e parallela ad AL ; dal che le due AR ,
LC, ſono [f] *vguali, e parallele, ed il quadrilatero ARCL* [g] *è parallelogrammo.* f 33. del 1. g 35. defin. del 1.
Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il quadrilatero FTHM è parallelogram-
mo. Di più, perche i piani CB, HG, ſono frà loro ſimili, ſarà RC à CN [h] *come* h 1. defin. del 6.
TH ad HP : ma NC à CL è come PH ad HM , per l'egualità , ſarà RC à
CL , [K] *come TH ad HM ; l'angolo RCL fù dimoſtrato vguale all'angolo* K 22. del 5.
THM , in conſeguenza il parallelogrammo ARCL [l] *ſarà ſimile al parallelo-* l 1. defin. del 6.
grammo FTHM. E perche i tre lati AB, BR, RA, ſono vguali à i tre lati LN, m 8. e 4. del 1.
NC, CL, i triangoli ABR, LNC, [m] *ſono frà loro vguali, furono dimoſtrati ſimi-*

 li,

li, in conseguenza sono simili, ed vguali, e sono ancora paralleli, stante che
n 13. defin. del 11. *i piani BE, NO sono paralleli; per la qual cosa il solido ABRCNL* [n] *è prisma*
Nell'istesso modo si dimostrerà, che il solido FGTHPM è prisma, e che tutti
gli altri ACDL, ADLO, FHIM, FIQM, sono prismi. E perche i triangoli
ABR, LNC, sono simili à i triangoli FGT, MPH, ed i parallelogrammi AB
o 9.defin. del 11. *NL, BNCR, ARCL, sono simili à i corrispondenti parallelogrammi FGPM,*
GPHT, FTHM; sarà il prisma ABRCNL [o] *simile al prisma FGTHPM.*
Nell'istesso modo si dimostrerà, che il prisma ACDL è simile al prisma FHIM
ed il prisma ADLO è simile al prisma FIMQ. Di nuouo perche le basi NO,
p 1.defin. del 6. *PQ sono simili; sarà NC à CD* [p] *come PH ad HI; e permutando, NC à*
q 16.del 5. *PH* [q] *sarà come CD ad HI; Similmente CD à DO sarà come HI ad IQ; e*
r 16. del 5. *permutando, CD ad HI* [r] *sarà come DO ad IQ. Finalmente perche il prisma*
di base triangolare ANLC al simile prisma FPMH, per lo Scolio alla 33. pro-
positione dell'11. hà triplicata proportione, che il lato homologo NC al lato ho-
mologo PH, e la proportione di NC à PH è come quella di CD ad HI, haue-
t 11. del 5. *rà il prisma ANLC al prisma FPMH* [t] *triplicata proportione di quella, che*
u Scol. alla 33. del 11. *hà CD ad HI: ma il prisma ACLD al simile prisma FHIM* [u] *hà la mede-*
sima triplicata proportione, che hà il
lato CD al lato HI, sarà il prisma
x 18. del 5. *ANLC al prisma FPMH,* [x] *come il*
prisma ACLD al prisma FHMI.
Nell'istesso modo si dimostrerà, che il
prisma ACLD al prisma FHMI è
come il prisma ADLO al prisma
FIMQ. Per la qual cosa tutti gli
antecedenti insieme, cioè i prismi, che
compongono tutto il prisma ABCDE,
à tutti i conseguenti insieme, che sono i
prismi, che compongono tutto il prisma
y 12. del 5. *FGHIK* [y] *saranno come vn' antece-*
dente ad vn conseguente, cioè come
z Scol. alla 33. del 11. *il prisma ADLO al prisma FIMQ. Ma il prisma ADLO al prisma FIMQ* [z]
hà triplicata proportione di quella, che hà il lato homologo DO al lato homolo-
& 11.del 5. *go IQ, hauerà tutto il prisma ABCDE à tutto il prisma FGHIK, & tripli-*
cata proportione di quella, che hà il lato homologo DO al lato homologo IQ,
che era da dimostrarsi.



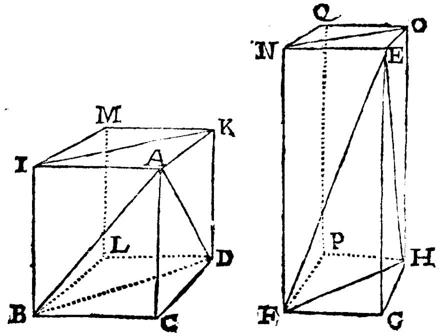
COROLLARIO.

Appare da quel che si è dimostrato, che i simili prismi di basi poligone, si diuidono in simili prismi di numero vguale.

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Le vguali piramidi di basi triangolari hanno le basi re-

ciproche alle altezze; e quelle piramidi di basi triangolari, delle quali le basi sono reciproche alle altezze, sono frà di loro vguali.



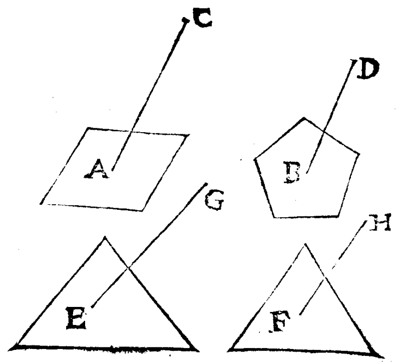
Siano le vguali piramidi, di basi triangolari, ABCD, EFGH. Dico che la proportione della base BCD alla base FGH, è come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD. Co' i lati AC, CB, si faccia il parallelogrammo CI, co'i lati AC, CD, si faccia il parallelogrammo CK, e co' i lati BC, CD, si faccia il parallelogrammo CL; e si compisca
il parallelepipedo CM. Nell'istesso modo si compisca il parallelepipedo
GQ; si tirino le rette IK, NO; ed haueremo ciascuno de i parallelepipe- a 28. del 11.
di CM, GQ,[a] diuiso in due prismi di basi triangolari, i quali hanno le me-
desime altezze delle proposte piramidi. E perche la piramide ABCD, b 7. del 12.
per ipotesi, è vguale alla piramide EFGH, i loro tripli, [b] cioè i prismi
IBCDKA, NFGHOE, sono frà di loro vguali; & i doppij di questi pris-
mi, cioè i parallelepipepi CM, GQ, [c] saranno frà di loro vguali: per la c 28.del 11.
qual cosa la base BCDL alla base FGHP [d] sarà come l'altezza del pa- d 34.del 11.
rallelepipedo GQ all'altezza del parallelepipedo CM: Ma la base BC
DL alla base FGHP [e] è come il triangolo BCD al triangolo FGH, e e 15. del 5.
l'altezze de i parallelepipedi, e delle piramidi sono le medesime; sarà
dunque il triangolo BCD, ch'è base della piramide ABCD, al triangolo f 11. del 5.
FGH, ch'è base della piramide EFGH, [f] come l'altezza della piramide
EFGH all'altezza della piramide ABCD, ch'era da dimostrarsi nel pri-
mo luogo.

Di nuouo, supposto che la base BCD alla base FGH sia, come l'al-
tezza della piramide EFGH all'altezza della piramide ABCD. Dico che
le piramidi ABCD, EFGH, sono frà di loro vguali. S'intenda fatta la g 15.del 5.
medesima costruttione. Perche il triangolo BCD al triangolo FGH [g] è
come il parallelogrammo CL al parallelogrammo GP, e per ipotesi, il
triangolo BCD al triãgolo FGH è come l'altezza della piramide EFGH
all'altezza della piramide ABCD, sarà il parallelogrammo CL al paral-
lelogrammo GP, come l'altezza della piramide EFGH all'altezza della
piramide ABCD, cioè come l'altezza del parallelepipedo GQ all'altez- h 34. del 11.
za del parallelepipedo CM; per la qual cosa i parallelepipedi GQ, CM, [h]
sono frà di loro vguali, e le loro metà, cioè i prismi IBCDKA, NFGH
OE, [K] sono frà di loro vguali. E perche le piramidi [l] sono le terze parti K 28.del 11.
de i prismi, essẽdo i prismi frà di loro vguali, le loro terze parti, cioè le pi- l 17. del 12.
ramidi ABCD, EFGH, sono frà di loro vguali, che era da dimostrarsi.

SCOLIO.

Il medesimo si dimostra nelle piramidi, è ne i prismi, che non hanno le basi triangolari.

Le piramidi vguali, ò prismi vguali, che non hanno le basi triangolari, le loro basi sono reciproche all'altezze; e se le basi sono reciproche all'altezze, quelle piramidi, ouero prismi, sono frà di loro vguali.



Siano A, & B, le basi di due piramidi vguali, ò di due prismi vguali, le di cui altezze siano AC, BD. Dico che la base A alla base B è come l'altezza BD all'altezza AC. Per la 25. propositione del 6. si faccia il triangolo E vguale alla base A, e si faccia il triangolo F vguale alla base B. Se i piani A, & B, sono basi di due piramidi, sopra la base E, si erigga vna piramide vgualmente alta alla piramide AC; e sopra la base F si erigga vna piramide vgualmente alta alla piramide BD; e se i piani A, & B, sono basi di due prisma, s'intenda eretto sopra la base E vn prisma, che habbia l'altezza AC, e sopra la base F s'intenda eretto vn prisma, che habbia l'altezza BD, in modo, che i piani verticali siano triangoli simili, vguali, e paralleli alle basi E, ed F. Perche le piramidi, ò prismi eretti alle basi A, ed E, hanno la medesima altezza, la loro proportione sarà [a] come quella delle basi: ma le basi A, ed E, per costruttione, sono frà loro vguali, perciò le piramidi, ouero i prismi eretti sopra le basi A, ed E, saranno frà loro vguali. Nell'istesso modo si prouerà, che le piramidi, ò prismi eretti sopra le basi B, ed F, sono frà di loro vguali. Se dunque le piramidi, ò prismi eretti alle basi A, & B, sono frà loro vguali, le piramidi ancora, ò prismi eretti sopra le basi E, ed F sono frà loro vguali: ma le piramidi vguali, e prismi vguali eretti sopra i triangoli E, ed F, [b] hanno le basi reciproche all'altezze, sarà la base E alla base F, come l'altezza FH all'altezza EG. Ma le basi E, ed F sono vguali alle basi A, & B, e l'altezze EG, FH, per costruttione, sono vguali all'altezze AC, BD: sarà la base A alla base B, come l'altezza BD all'altezza AC, che era da dimostrarsi nel primo luogo.

a 32. del 11. e suo Scol.

b 6. del 12. & Scol. alla 34. del 11.

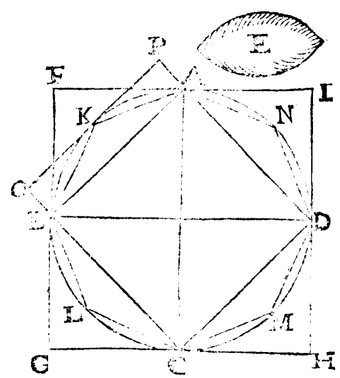
Di nuouo, supposto che la base A alla base B sia come l'altezza BD all'altezza AC. Dico che le piramidi, ouero prismi eretti sopra le basi A, & B, sono frà di loro vguali; cioè le piramidi vguali frà loro, ed i prismi vguali frà loro. S'intenda fatta la medesima costruttione di prima; e si dimostri, come sopra

pra si fece, che le piramidi erette alle basi E, F, sono vguali alle piramidi erette alle basi A, & B, e che i prismi eretti alle medesime basi E, F, sono vguali à i prismi eretti alle basi A, & B. Perche la base A alla base B, per ipotesi, è come l'altezza BD all'altezza AC, essendo le basi A, & B, vguali alle basi E, ed F, e l'altezze AC, BD, vguali all'altezze EG, FH, sarà la base E alla base F, come l'altezza FH all'altezza EG: per la qual cosa le piramidi erette alle basi triangolari E, ed F, come ancora i prismi eretti alle basi triangolari E, ed F, c sono frà loro vguali. Ma le piramidi erette sopra le basi E, ed F, furono dimostrate vguali alle piramidi erette sopra le basi A, & B, ed i prismi eretti alle medesime basi E, F, sono vguali à i prismi eretti sopra le basi A, & B, essendo le piramidi, ò prismi eretti sopra le basi E, ed F, frà di loro vguali, saranno le piramidi, ouero i prismi eretti sopra le basi A, & B, frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

c 9. del 12. & Scol. alla 34. del 12.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Ogni cono è la terza parte del cilindro, che hà la medesima base, e la medesima altezza,



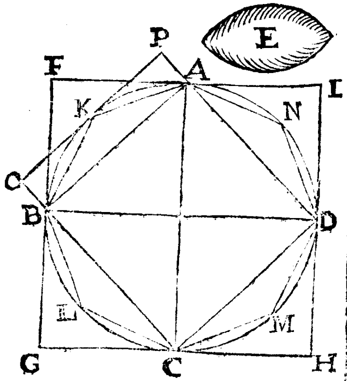
Habbia il cono, e cilindro, vna medesima altezza, è la commune base sia il circolo ABCD. Dico che il cono è la terza parte del cilindro. Se il cono non è la terza parte del cilindro, ne meno il cilindro sarà il triplo del cono, ma sarà ò maggiore, ò minore del triplo del cono. Sia prima il cilindro maggiore, che il triplo del cono per quanto è il solido E, sarà il triplo del cono, col solido E, vguale al cilindro. Si descriua [a] nel proposto circolo il quadrato ABCD, ed intorno al medesimo circolo si circoscriua [b] il quadrato FGHI, e per lo Scolio alla 9. propositione del quarto, il quadrato ABCD sarà la metà del quadrato circoscritto FGHI, e presi poi i quadrati ABCD, FGHI, come basi di due parallelepipedi, sopra i quali si concepiscano descritti due parallelepipedi, che habbiano la medesim'altezza, quale hà il cono, e cilindro proposto. Perche i parallelepipedi, che hanno la medesim'altezza [c] sono come le basi, però il parallelepipedo, la di cui base è il quadrato ABCD, al parallelepipedo, la di cui base è il quadrato FGHI, sarà come la base ABCD alla base FGHI: ma il quadrato ABCD è la metà del quadrato FGHI, il parallelepipedo dunque descritto sopra il quadrato ABCD, sarà la metà del parallelepipedo descritto sopra il quadrato FGHI. Hor perche il parallelepipedo sopra la base FGHI è maggiore del cilindro, che hà per base il circolo ABCD (stante che lo contiene) però la metà del parallelepi-

a 6. del 4.

b 7. del 4.

c 32. del 11.

lepipedo ſopra la baſe FGHI, ſarà maggiore, che la metà del cilindro deſcritto ſopra del circolo ABCD; ma il parallelepipedo ſopra la baſe ABCD è la metà del parallelepipedo ſopra la baſe FGHI,il parallelepipedo dũque ſopra il quadratoABCD ſarà maggiore della metà del cilindro,che hà per baſe il circolo ABCD.Si ſeghino d gli archi AB,BC,CD, DA, in due parti vguali, ne i punti K,L,M,N, e ſi tirino le rette AK, KB, BL,LC,CM,MD,DN,AN;E per il punto K ſi faccia paſſare e la retta OP in modo, che tocchi il circolo nel punto K, e continuata concorra co' i lati DA,CB,prolongati, come in O,& P, e ſi dimoſtri, come ſi fece nella 2.prop.di queſto,che OP è parallela ad AB.Sopra il triangolo AKB,e ſopra il rettangolo APOB, ſi concepiſcano deſcritti due priſmi, che ambidue habbiano l'iſteſſa altezza del cono,e cilindro propoſto. Perche il triangolo AKB è la metà del rettangolo APOB, il priſma,la di cui baſe è il triangolo AKB, ſarà la metà del priſma deſcritto ſopra la baſe A P O B (ſtante che i priſmi d'vguale altezza ſono f come le baſi.) E perche il piano APOB contiene la portione AKB del circolo,perciò il priſma,deſcritto ſopra il piano APOB, ſarà maggiore della portione del cilindro deſcritto ſopra la portione AKB; per la qual coſa la metà del priſma, deſcritto ſopra il piano APOB,ſarà maggiore della metà della portione del cilindro ſopra la portione AKB: ma il priſma deſcritto ſopra il triangolo AKB è la metà del priſma ſopra la baſe APOB; il priſma dũque ſopra il triangolo AKB ſarà maggiore; che la metà della portione del cilindro deſcritta ſopra la portione A KB. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che i priſmi deſcritti ſopra i triangoli BLC, CMD,DNA,ſono maggiori delle metà delle portioni del cilindro, le di cui baſi ſono le portioni BLC,CMD, DNA, del circolo, le quali hanno la medeſima altezza,che il cono, e cilindro propoſto; e per conſeguenza tutt' i priſmi, deſcritti ſopra i detti triangoli, inſieme giunti, ſono maggiori della metà di tutte le portioni del cilindro, deſcritte ſopra le dette portioni del circolo.Se di nuouo gli archi AK, KB, BL, LC &c. ſaranno diuiſi g in due parti vguali,e da i punti A,K,B,L,C &c. alle diuiſioni,ſiano tirate rette linee,e ſopra i triangoli coſtrutti ſi concepiſcano priſmi vgualmente alti col cono,e cilindro propoſto, ſi moſtrerà, come prima ſi fece,che tutti quei priſma di baſi triangolari,giunti inſieme,ſono maggiori delle metà delle portioni del cilindro propoſto,le quali hanno per baſi le portioni AK,KB,BL,LC,CM,MD,DN,NA del circolo. E con queſt' ordine ſi proceda in infinito. Se dunque dal cilindro deſcritto ſopra del circolo ABCD ſe ne leua più della metà; cioè ſe ne leui il parallelepipedo,deſcritto ſopra del quadrato ABCD; e dalle portioni,che reſtano del cilindro (le quali hanno per baſe le portioni AKB,BLC, CMD,DNA)



d 30. del 3.

e Corol.alla 17.del 3.

f Scolio alla 32.del 11.

g 30.del 3.

ſe

ſe ne leui vna quantità, che ſia più della metà, cioè ſe ne leuino i priſmi deſcritti ſopra i triangoli AKB,BLC, CMD, DNA; E ſimilmente dalle portioni del cilindro, che reſtano, ſe ne leui più della metà, nel modo, che antecedentemente ſi è fatto; e con queſt'ordine ſi proſeguiſca, ſempre leuando dalle portioni reſtate più della metà; ſi peruenirà finalmente à tal diminutione, che l'vltime portioni h del cilindro reſtate, giunte inſieme, ſaranno minori del ſolido E. Suppoſto che ſia fatta queſta continua detrattione, e le vltime portioni reſtate del cilindro ſiano quelle deſcritte ſopra le portioni AK,KB,BL, LC, CM, MD, DN, NA, le quali, giunte inſieme, ſiano minori del ſolido E. Perche il triplo del cono,che hà per baſe il circolo ABCD, col ſolido E, inſieme giunti, ſono vguali al cilindro, che hà per baſe il medeſimo circolo ABCD; ſe da queſto cilindro ſi leuino le antedette portioni reſtate, e dal triplo del cono,col ſolido E, ſe ne leui il ſolido E, ch'è maggiore delle portioni detratte dal cilindro; reſterà il priſma, la di cui baſe è il poligono AKBLCMDN, e che hà la medeſima altezza del cono, è cilindro, maggiore del triplo del detto cono. Per la qual coſa il cono, la di cui baſe è il circolo ABCD, ſarà minore della terza parte del priſma, che hà per baſe il poligono AKBLCMDN: ma la piramide deſcritta ſopra il medeſimo poligono, che hà la medeſima altezza col priſma, è la terza parte di eſſo priſma, come ſi è moſtrato alla 7. propoſitione, e ſuo Scolio; la piramide dunque, che hà per baſe il detto poligono, ſarà maggiore del cono di vguale altezza, che hà per baſe il circolo ABCD. Hor perche il circolo ABCD contiene il detto poligono, il cono, che hà per baſe il circolo ABCD, conterrà la piramide della medeſima altezza, che hà per baſe il poligono AKBLCMDN: ma ſi è dimoſtrato, che queſta piramide è maggiore del cono, la parte ſarebbe maggiore del tutto, ch'è impoſſibile. Non dunque il cilindro è maggiore, che il triplo del cono.

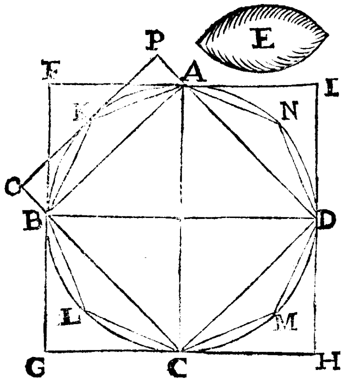
Suppoſto di nuouo, che il cilindro ſia minore, che il triplo del cono, ſarà dunque il cono maggiore della terza parte del cilindro. Hor ſia il cono maggiore della terza parte del cilindro, per quanto è il ſolido E; ſarà la terza parte del cilindro, col ſolido E, vguale al cono. Siano deſcritti i quadrati ABCD, FGHI, come prima, e ſopra di eſſi ſiano deſcritte due piramidi, che habbiano la medeſima altezza, che il cono, e cilindro. Perche le piramidi, che hanno la medeſima altezza, per la 6. propoſitione, ſono come le baſi; eſſendo il quadrato ABCD la metà del quadrato FGHI, la piramide ſopra la baſe ABCD,ſarà la metà della piramide ſopra la baſe FGHI. In oltre perche il quadrato FGHI contiene il circolo ABCD,però la piramide ſopra il quadrato FGHI ſarà maggiore, che il cono, che hà per baſe il circolo ABCD; e la metà della piramide ſopra la baſe FGHI, ſarà maggiore della metà del detto cono: ma la piramide, che hà per baſe il quadrato ABCD, è la metà della piramide ſopra del quadrato FGHI, ſarà la piramide, che hà per baſe il quadrato ABCD, maggiore, che la metà del cono ſopra del circolo ABCD. Si diuidano gli archi AB, BC, CD, DA, e ſi faccia tutta la coſtruttione di prima: poi ſopra il triangolo AKB, e ſopra il rettangolo APOB, s'intendano erette due piramidi, che habbiano la medeſima altezza, che il

h 1. del 10.

cono,

cono, e cilindro propoſto, cioè che il detto cono, e queſta piramide habbiano vn medeſimo vertice. Perche le piramidi, che hanno la medeſima altezza, per la propoſ. 6. ſono come le baſi, eſſendo il triangolo AKB la metà del rettangolo APOB, ſarà la piramide ſopra il triangolo AKB la metà della piramide ſopra il rettangolo ABOP. Hor perche il rettangolo ABOP è maggiore della portione AKB del circolo; la piramide ſopra il rettangolo APOB, che hà la medeſima altezza del cono, ſarà maggiore della portione del cono, che hà per baſe la portione AKB del circolo; e la metà della piramide ſopra APOB, ſarà maggiore, che la metà della parte del cono ſopra la portione AKB del circolo. Ma la piramide ſopra AKB è vguale alla metà della piramide ſopra APOB; la piramide dunque ſopra AKB ſarà maggiore, che la metà della parte del cono ſopra la portione AKB dèl circolo. Nell' iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che l'altre piramidi ſopra i triangoli BLC, CMD, DNA, ſono maggiori, che le metà delle parti del cono, le quali hanno per baſi le portioni BLC, CMD, DNA, del circolo; e ſaranno tutte le dette piramidi di baſi triangolari inſieme, maggiori delle metà delle parti antedette del cono, inſieme giunte. Se di nuouo gli archi AK, KB, BL, LC, CM, MD, DN, NA, ſi diuidano in due parti vguali, e da i punti A,K,B,L,CM,D,N, alle diuiſioni, ſi tirino rette linee, le piramidi deſcritte ſopra i triangoli coſtrutti, le quali habbiano la medeſima altezza col cono, inſieme giunte, ſi moſtreranno maggiori, che le metà delle parti del cono, le quali hanno per baſe le portioni AK,KB,BL,LC,CM,MD,DN,NA, inſieme giunte. E con queſt'ordine ſi procederà in infinito. Se dunque dal cono, che hà per baſe il circolo ABCD, ſe ne leua vna quantità maggiore della metà, cioè ſe ne leui la piramide deſcritta ſopra il quadrato ABCD; e dalle parti reſtate del cono, cioè quelle, che hanno per baſe le portioni AKB, BLC, CMD, DNA, del circolo, ſe ne leui vna quantità maggiore della metà, cioè ſe ne leuino le piramidi, che hanno per baſe i triangoli AKB, BLC, CMD, DNA; e di nuouo dalle parti reſtate del cono, ſe ne leui vna quantità maggiore della metà, e con queſt'ordine, facendo ſempre la detrattione dalle parti reſtate, per vna quantità maggiore della metà, finalmente K reſteranno tali portioni di Cono, che inſieme giunte, ſaranno minori del ſolido E. Suppoſto, che ſia fatta la continua detrattione, e le parti reſtate del cono ſiano quelle, che hanno per baſe le portioni AK,KB,BL,LC,CM,MD,DN,NA, del circolo, le quali, giunte inſieme, ſiano minori del ſolido E. Hor perche la terza parte del Cilindro, inſieme col ſolido E, è poſta vguale al cono, che hà per baſe il circolo ABCD, ſe dal cono ſe ne leuano le dette parti reſtate; e dalla terza parte del cilindro,

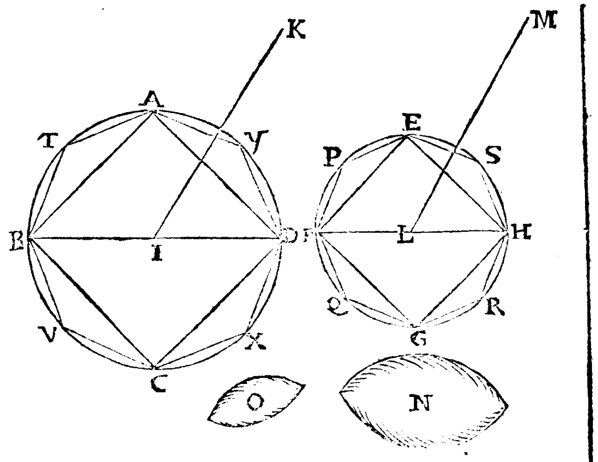
K 1. del 10.



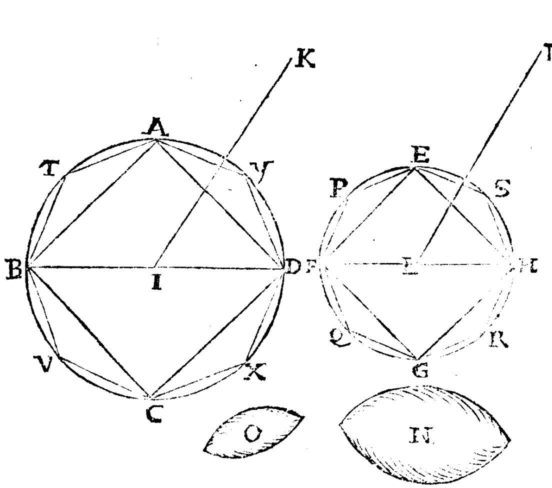
col ſolido E, ſe ne leua il ſolido E, ch'è maggiore delle dette parti detratte dal cono; reſterà la piramide, la di cui baſe è il poligono AKBLCMDN, che hà la medeſima altezza, che il cilindro, maggiore della terza parte del cilindro, per la qual coſa il triplo di queſta piramide ſarà maggiore di tutto il cilindro. E perche il triplo della piramide, per la 7. propoſ. e ſuo Scolio, è vguale al priſma, che hà la medeſima baſe, ed altezza con eſſa piramide; però il priſma, deſcritto ſopra del poligono AKBLCMDN, ſarà maggiore, che il cilindro, la di cui baſe è il circolo ABCD, ed hà la medeſima altezza col detto priſma. Ma il poligono, che è baſe del detto priſma, è contenuto dal circolo ABCD, ch'è baſe del cilindro, però il priſma, che hà per baſe il poligono AKBLCMDN, ſarà contenuto dal cilindro della medeſima altezza, che hà per baſe il circolo ABCD: per la qual coſa il detto priſma ſarà minore del cilindro: ma è ſtato moſtrato maggiore, ſarebbe maggiore, e minore, ch'è impoſſibile. Non dunque il Cilindro è maggiore, che il triplo del cono, ne meno, per quel che ſi è moſtrato, è minore, e perciò il cilindro, che hà per baſe il circolo ABCD, ſarà il triplo del cono della medeſima altezza, e che hà per baſe il medeſimo circolo ABCD. Per la qual coſa il detto cono ſarà la terza parte del cilindro, della medeſima altezza, e baſe, ch'era da dimoſtrarſi.

THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

I Coni, e Cilindri, che hanno la medeſima altezza, ſono frà loro come le baſi.



Siano eſpoſti i coni, e Cilindri, le di cui baſi ſiano i circoli ABCD, EFGH, e l'altezze vguali IK,LM. Dico che la baſe ABCD alla baſe EFGH è come il cono al cono; ed ancora come il cilindro al cilindro; cioè che la baſe ABCD alla baſe EFGH, è come il cono, ò cilindro KBCDA, ad vna quantità vguale al cono, ò cilindro MFGHE. Se la baſe ABCD alla baſe EFGH non è come il cono, ò cilindro KBCDA ad vna quantità vguale al cono, ò cilindro MFGHE, ſia la baſe ABCD alla baſe EFGH, come il cono KBCDA alla quantità N, ſarà il ſolido N, ò maggiore, ò minore del cono MFGHE. Suppoſto prima, che il ſolido N ſia minore del cono MFGH E, per quanto è il ſolido O, in modo, che i due ſolidi N, ed O, inſieme giunti, ſiano vguali al cono EFGHM. Nel circolo EFGH ſi deſcriua a il quadrato EFGH; ſi diuidano gli archi EF, FG, GH, HE, b in due parti vguali ne i punti P, Q, R, S; ſi tirino le rette EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE; e ſi dimoſtri, come



ſi fece nella ſeconda parte dell'antecedente propoſitione, che ſe dal cono EFGHM ſe ne detrae la piramide, che hà per baſe il quadrato EFGH, e l'altezza LM, e dalle parti reſtate del cono, ſe ne detraggono le piramidi, che hanno per baſe i triangoli EPF, FQG, GRH, HSE, e l'altezza ML; e dall'altre parti reſtate dal cono ſe ne detrae ſimilmente più della metà, e con queſt'ordine in infinito, finalmente ſi peruerrà à tanta diminutione, che le parti reſtate del cono, inſieme giunte, c ſaranno minori del ſolido O. Suppoſto che ſia fatta la continua detrattione, e le parti reſtate del cono ſiano quelle, che hanno per baſe le portioni EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE, del circolo, le quali, giunte inſieme, ſono minori del ſolido O. E perche il cono EFGHM è vguale à i due ſolidi N, ed O, giunti inſieme, ſe dal cono EFGHM ſi leuano le antedette parti, reſtate, e da i ſolidi N, ed O inſieme, ſi leui il ſolido O, ch'è maggiore delle parti detratte dal cono, reſterà la piramide, che hà per baſe il poligono EPFQG RHS, e l'altezza LM, maggiore del ſolido N. Suppoſto queſto.

Si deſcriua nel circolo ABCD il poligono ATBVCXDY ſimile al poligono EPFQGRHS, e ſi tirino i diametri BD, FH. Perche per la 6. propoſitione, le piramidi della medeſima altezza ſono come le baſi, però la piramide ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM, ſarà come il poligono ATBVCXDY al poligono EPFQGRHS: ma il poligono al poligono, per il Corollario alla 2. propoſitione di queſto, è come il circolo ABCD al circolo EFGH; ſarà la piramide alla piramide, come d il circolo ABCD al circolo EFGH. Et eſſendo, per ipoteſi, il circolo ABCD al circolo EFGH, come il cono ABCDK al ſolido N; la piramide dunque ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM, ſarà come il cono ABC DK al ſolido N; e permutando, la piramide ATBVCXDYK al co-

a 6. del 4.

b 30. del 3.

c 1. del 10.

d 11. del 5.

ABCDK, e ſarà come la piramide EPFQGRHSM al ſolido N: ma la piramide ATBVCXDYK è minore del cono ABCDK (ſtante che è contenuta da eſſo cono nell'iſteſſo modo, che il poligono è contenuto dal circolo,) però * ſarà f minore del ſolido N: la piramide EPFQGRHSM fù antecedentemente moſtrata maggiore, ſarà la piramide EPFQGRHSM maggiore, è minore del ſolido N, ch'è impoſſibile. Non dunque il ſolido N è minore del cono EFGHM; onde è impoſſibile, che il circolo ABCD al circolo EFGH ſia come il cono ABCDK ad vna quantità minore dell' cono EFGHM. Nell'iſteſſo modo ſi moſtrerà eſſere impoſſibile, che il circolo EFGH al circolo ABCD ſia come il cono EFGHM ad vn altra quantità minore del cono ABCDK.

Sia di nuouo il ſolido N maggiore del cono EFGHM. S'intenda come il ſolido N al cono ABCDK, così il cono EFGHM ad vn altra quantità, che ſia il ſolido O; e permutando, il ſolido N al cono MFGHE g ſarà come il cono KBCDA al ſolido O: ma il ſolido N è poſto maggiore del cono MFGHE, ſarà il cono KBCDA h maggiore del ſolido O; cioè il ſolido O ſarà minore del cono KBCDA. In oltre perche il circolo ABCD al circolo EFGH, per ipoteſi, è come il cono ABCDK al ſolido N, inuertendo, il circolo EFGH al circolo ABCD K ſarà come il ſolido N al cono ABCDK: ma, per coſtruttione, il ſolido N al cono ABCDK è come il cono EFGHM al ſolido O, ſarà il circolo EFGH al circolo ABCD, l come il cono EFGHM al ſolido O: ma il ſolido O è dimoſtrato minore del cono ABCDK; il circolo dunque EFGH al circolo ABCD, ſarà come il cono EFGHM ad vna quantità minore del cono ABCDK, che è contro quello, che ſi è concluſo nella prima parte. Non dunque il ſolido N è maggiore del cono EFGHM, ne meno, per quel che ſi è moſtrato, è minore; ſarà dunque il ſolido N vguale al cono EFGHM. Ed eſſendo il circolo ABGD al circolo EFGH, come il cono ABCDK al ſolido N, & il ſolido N è moſtrato vguale al cono EFGH; ſarà il circolo ABCD al circolo EFGH come il cono ABCDK al cono EFGHM, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.

Perche per l'antecedente propoſ. il cono è la terza parte del cilindro, che hà la medeſima altezza, e baſe, ne ſegue il cilindro, che hà per baſe il circolo ABCD, e l'altezza IK, eſſere multiplice del cono ABCDK, come il cilindro, che hà per baſe il circolo EFGH, e l'altezza LM, è multiplice del cono EFGHM; e perciò il cilindro, la di cui baſe è ABC D, al cilindro, la di cui baſe è EFGH, m ſarà come il cono ABCDK al cono EFGHM: ma ſi è dimoſtrato, che il cono ABCDK al cono EFG HM è come il circolo ABCD al circolo EFGH; ſarà il cilindro, che hà per baſe il circolo ABCD, e l'altezza IK, al cilindro, la di cui baſe è il circolo EFGH, e l'altezza LM, come il circolo ABCD al circolo EFGH; cioè come la baſe alla baſe. Per la qual coſa i coni, e cilindri, che hanno la medeſima altezza, ſono come le loro baſi, ch'era da dimoſtrarſi.

e 16. del 5.

* la piramide EPFQG RHSM

f 14. del 5.

g 16. del 5.

h 14. del 5.

K Corol. alla 4. del 5.

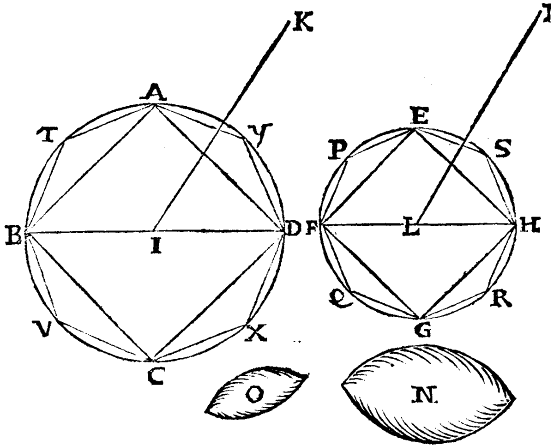
l 11. del 5.

m 15. del 5.

COROLLARIO.

Perche il cono KABCD al cono MEFGH è come il circolo ABCD al circolo EFGH, ed il cilindro. la di cui base è il circolo ABCD, al cilindro, la di cui base è il circolo EFGH, è parimente come il circolo ABCD al circolo EFGH; sarà il cono ABCDK al cono EFGHM, come [n] il cilindro, la di cui base è il circolo ABCD, e l'altezza IK, al cilindro, la di cui base è il circolo EFGH, e l'altezza LM. D'onde è manifesto, che i cilindri, i quali hanno le medesime basi, che i coni, e le medesime altezze, sono frà di loro come i coni.

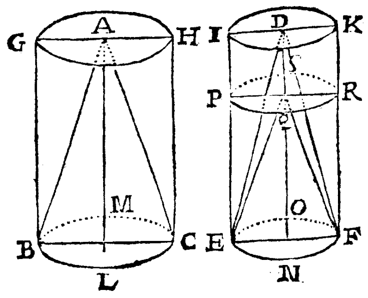
n 11. del 5.



SCOLIO DEL CLAVIO.

I coni, e cilindri, che sono come le basi, hanno vna medesima altezza.

Habbia il cono ABC al cono DEF, ouero il cilindro GBCH al cilindro IEFK, l'istessa proportione, che hà la base BLCM alla base ENFO. Dico che i coni ABC, DEF, ouero i cilindri GBCH, IEFK, hanno la medesima altezza. Se non hanno la medesima altezza, vno de i due sarà più alto. Supponiamo, che il più alto sia il cono DEF, ouero il cilindro IEFK. Sia segato il cono DEF, ò cilindro IEFK,



da

* parallelo alla base ENFO

da qualche piano PQRS talmente, che l'altezza interposta frà i piani PQRS, ENFO, sia vguale all'altezza del cono ABC, ouero del cilindro GBCH. Si considerino i coni, cioè ABC, ed il cono, la di cui base è il circolo ENFO, ed il vertice nel piano PQRS, i quali hanno le medesime basi, ed altezze co'i cilindri GBCH, PEFR, e per il Coroll. antecedente, il cono ABC al cono interposto frà i piani PR, EF, sarà come il cilindro GBCH al cilindro PEFR: ma il cono ABC al cono interposto frà i piani PR, EF, [a] è come la base BLCM alla base ENFO (stante che hanno la medesima altezza) sarà il cilindro GBCH al cilindro PEFR, [b] come la base BC alla base EF: ma la base BC alla base EF, per ipotesi, è come il cilindro GBCH al cilindro IEFK, sarà dunque il cilindro GBCH al cilindro PEFR, [c] come il medesimo cilindro GBCH al cilindro IEFK; imperciòche i cilindri PEFR, IEFK, [d] sono frà di loro vguali; la parte sarà vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il cono DEF è più alto, che il cono ABC, ma hanno la medesima altezza, che era prima da dimostrarsi.*

a 11. del 12.
b 11. del 5.
c 11. del 5.
d 9. del 5.

Di nuouo perche i cilindri GBCH, PEFR, hanno per costruttione, la medesima altezza, per la propos. antecedente, il cilindro GBCH al cilindro PEFR sarà come la base BLCM alla base ENFO: ma, per ipotesi, la base BLCM alla base ENFO è come il cilindro GBCH al cilindro IEFK; il cilindro dunque GBCH al cilindro IEFK [e] sarà come il medesimo cilindro GBCH al cilindro PEFR; dal che i cilindri PEFR, IEFK [f] sono frà di loro vguali, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il cilindro IEFK è più alto, che il cilindro GBCH, ma hanno la medesima altezza. Per la qual cosa i coni, e cilindri, che sono come le basi, hanno la medesima altezza, ch'era da dimostrarsi.

e 11. del 5.
f 9. del 5.

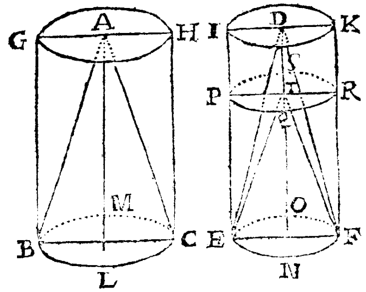
COROLLARIO.

Da qui è manifesto, che i coni, ò cilindri, i quali hanno la medesima altezza, e le basi vguali, sono frà di loro vguali, stante che i coni, ò cilindri, che hanno la medesima altezza, sono come le basi, si che se le basi sono vguali, quei coni, ò cilindri saranno frà di loro vguali.

E ancora manifesto, che gli vguali coni, ò cilindri, che hanno vguali basi, ò la medesima, haueranno vna medesima altezza.

Nell'antecedente figura siano i coni vguali ABC, DEF, ouero i cilindri vguali GBCH, IEFK, che habbiano le vguali basi BC, EF. Dico che hanno la medesima altezza. Se non hanno la medesima altezza, vno sarà più alto dell'altro, supposto che il cono DEF, ouero il cilindro IEFK, sia il più alto. Si faccia passare il piano PR, che seghi il cono, ò cilindro, e sia equidistante alla base EF talmente, che l'altezza interposta frà i piani PQRS, ENFO, sia vguale all'altezza del cono ABC, ò del cilindro GBCH; sopra la base EF si concepisca eleuato il cono TEF, il di cui vertice sia nel piano PQR.

Perche



Perche i coni ABC,TEF, ed i cilindri GBCH, PEFR hanno vna medesima altezza, e per la propositione antecedente, il cono ABC al cono TEF, ed il cilindro GBCH al cilindro PEFR, sarà come la base BC alla base EF: e perche le basi sono frà di loro vguali, però il cono ABC sarà vguale al cono TEF, ed il cilindro GBCH vguale al cilindro PEFR: ma per ipotesi, il cono ABC è vguale al cono DEF, ed il cilindro GBCH è vguale al cilindro IEFK, ne segue il cono TEF essere vguale al cono DEF, ed il cilindro PEFR vguale al cilindro IEFK, la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque il cono DEF ò cilindro IEFK, e più alto: ma hanno la medesima altezza.

Di più gli vguali coni, è cilindri, che hanno la medesima altezza, hanno le basi vguali, stante che, per l'antecedente propositione, i coni, e cilindri, che hanno la medesima altezza, sono come le basi. Se dunque i coni sono frà di loro vguali, ò i cilindri sono frà di loro vguali, le basi ancora saranno frà di loro vguali.

THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

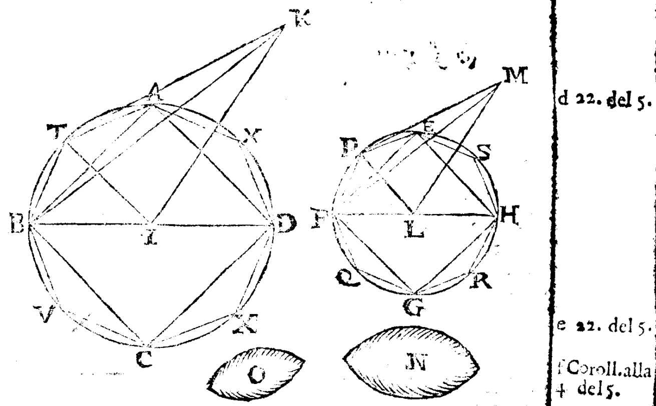
I simili coni, e cilindri hanno triplicata proportione, che i diametri delle loro basi.

Siano le basi de i simili coni, e cilindri, i circoli ABCD, EFGH, le assi IK, LM, & i diametri delle basi siano BD, FH; e supposto prima, che li proposti coni, e cilindri siano retti. Dico, che il cono al cono, & il cilindro al cilindro, hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH. Se il cono al cono, & il cilindro al cilindro, non hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, si prenda qualche solido N talmente, che il cono ABCDK al solido N habbia triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH; il solido N ò sarà minore, ò maggiore, ò vguale al cono EFGHM.

Supposto prima, che il solido N sia minore del cono EFGHM, per quanto è il solido O; sì che i due solidi O, & N, insieme giunti, siano vguali al cono EFGHM. Si faccia la medesima costruttione, e dimostratione, come nell'antecedente propositione, e si dimostri la piramide, la di cui base è il poligono EPFQGRHS, ed il vertice M, essere maggiore del solido N. Si tirino poi le rette BK, TK, PM, FM, i triangoli KTB, MPF, saranno due di quelli, che contengono le piramidi ATBVCXDYK, EPFQOGRHSM; si tirino le rette TI, PL. Perche i coni ABCDK, EFGHM, sono simili, per la 24. definit. dell'11. la proportione dell'asse KI al diametro BD sarà come l'asse ML al diametro FH; e presa la metà de i consequenti, per lo scolio dopo la propos. 22. del quinto, KI ad IB sarà come ML ad LF: ma gli angoli KIB, MLF, sono retti, stante che i coni sono sup-

no sup-

no supposti retti, saranno i triangoli KIB, MLF [a] equiangoli, cioè l'angolo KBI vguale all'angolo MFL, e l'angolo BKI vguale all'angolo LMF; e sarà KB à BI [b] come MF ad FL. Per l'istessa ragione i triangoli KIT, MLP sono simili, e sarà KT, à TI come MP à PL. In oltre perche i poligoni ATBVCXDY, EPFQGRHS, per costruttione, sono simili, gli archi TB, PF saranno frà loro simili; e perciò gli angoli TIB, PLF sono frà loro vguali; dal che i triãgoli isosceli ITB, LFP, sono frà di loro simili, e la proportione di IB à BT [c] sarà come quella di LF ad FP, come ancora IT à TB sarà come LP à PF. Hor essendosi dimostrato, che KB à BI, è come MF ad FL, e la proportione di BI à BT è come quella di FL ad FP, per l'egualità, sarà KB à BT, [d] come MF ad FP. Similmente essendosi dimostrato, che KT à TI è come MP à PL, e la proportione di TI à TB è come quella di PL à PF, per l'egualità, sarà KT à TB [e] come MP PF; ed inuertendo, BT à TK [f] sarà come FP à PM. Parimẽte essendosi dimostrato KB à BT, come MF ad FP, ed è BT à TK, come FP à PM per l'egualità, BK à KT [g] sarà come MF ad FP; dal che i triãgoli KTB, MPF, sarãno frà loro [h] simili. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutti gli altri triãgoli, che circõdano la piramide ATBVCXDYK, sono simili à i corrispõdenti triãgoli, che circondano la piramide EPFQGRHSM. E perche i poligoni, che sono basi di esse piramidi, sono simili per costruttione, i lati di essi poligoni saranno di moltitudine vguali; dal che i triangoli simili, che circondano le dette piramidi, sono di numero vguale, e per la 9. definit. dell'11. le piramidi saranno frà di loro simili; e per l'8. prop. di questo, saranno in triplicata proportione de i loro lati homologhi; cioè la piramide KBIT alla piramide MFLP hà triplicata proportione, che il lato BT al lato homologo FP. Di più perche i triãgoli ITB, LPF, sono simili, sarà TB à BI [K] come PF ad FL; e permutando, TB à PF [l] sarà come BI ad FL: ma BI ad FL è come il doppio BD al doppio FH, però TB à PF [m] sarà come BD ad FH. E perche la piramide alla piramide si disse hauere triplicata proportione, che TB à PF; e la retta TB à PF è come BD ad FH, hauerà la piramide alla piramide triplicata proportione, che BD ad FH: ma il cono ABCDK al solido N si disse hauere la medesima proportione triplicata, che hà BD ad FH; la piramide dunque ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM è come il cono ABCDK [n] al solido N: e permutando, la piramide ATBVCXDYK al cono ABCDK [o] sarà come la piramide EPFQGRHSM

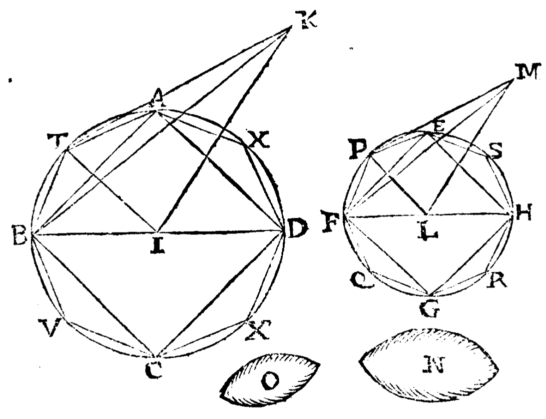


a 6. del 6.
b 4. del 6.
c 1. defin. del 6.
d 22. del 5.
e 22. del 5.
f Coroll. alla 4 del 5.
g 22. del 5.
h 4 definit. del 6.
K 1. definit. del 6.
l 16. del 5.
m 11. del 5.
n 11. del 5.
o 16. del 5.

al so-

al solido N.Ma la piramide ATBVCXDYK è minore del cono ABCDK
(stante,che la base della piramide è contenuta dalla base del cono)sarà la
piramide EPFQGRHSM p minore del solido N. E perche fù mostrata
p 14. del 5 maggiore,sarebbe maggiore,è minore del solido N,ch'è impossibile.Non
dunque il solido N è minore del cono EFGHM.Per la qual cosa è impos-
sibile,che il cono ABCDK habbia triplicata proportione ad vna quantità
minore del cono EFGHM,di quella,che hà BD ad FH.E nell'istesso modo
si dimostrerà essere impossibile,che il cono EFGHM,habbia ad vna quãti-
tà minore del cono ABCDK triplicata proportione di quella, che hà FH
à BD.

Di nuouo, supposto che N sia maggiore del cono EFGHM. Perche i
triangoli FLP,BIT,sono simili,sarà PF à TB, q come FL à BI, e duplican-
q 1. definit. del 6. do gli conseguenti, PF a TB sarà come FH à BD. In oltre,perche il cono
ABCDK al solido N hà triplicata proportione,che BD ad FH,e per quel
che si è mostrato la piramide ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM, hà parimẽte triplicata proportione, che BD ad FH, sarà il cono ABCDK al solido N come la piramide ATBVCXDYK alla piramide EPFQGRHSM; ed inuertendo, il solido N al cono ABCDK, sarà come la piramide EPFQGRHSM alla piramide AT



BVCXDYK: ma la piramide EPFQGRHSM alla simile piramide ATBV
CXDYK,per l'8. propositione,hà triplicata proportione,che il lato PF al
t 11. del 5. lato homologo TB, hauerà il solido N al cono ABCDK t triplicata pro-
portione, che PF à TB: ma PF à TB è dimostrata essere come FH à BD,
ne segue la proportione del solido N al cono ABCDK essere triplicata
della proportione,che hà FH à BD.Supposto questo.S'intenda come il so-
lido N al cono ABCDK, così il cono EFGHM ad vn'altra quantità, che
sia il solido O. Se dunque il solido N al cono ABCDK è come il cono EF
GHM alla quantità O,& il solido N è posto maggiore del cono EFGHM,
u 14. del 5. sarà ancora il cono ABCDK u maggiore del solido O. Hor essendosi di-
mostrata la proportione del solido N al cono ABCDK essere triplicata,
che la proportione di HF è DB, & il solido N al cono ABCDK, per co-
struttione, è come il cono EFGHM al solido O; hauerà il cono EFGHM
al solido O triplicata proportione, che HF à DB: ma il solido O è dimo-

strato

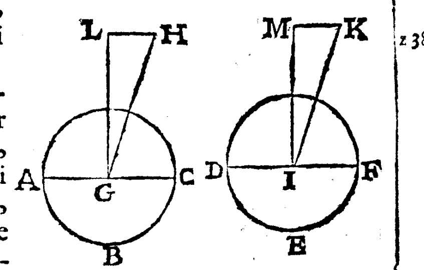
strato minore del cono ABCDK, il cono dunque EFGHM hauerà ad vn
solido minore del cono ABCDK triplicata proportione di quella, che hà
HF à DB;contro à quello,che s'è concluso nella prima parte.Non dunque
il solido N è maggiore del cono EFGHM, ne meno è minore, in conse-
guenza il solido N sarà vguale al cono EFGHM.

Finalmente perche il cono ABCDK al solido N hà triplicata propor-
tione, che BD ad FH, & il solido N è vguale al cono EFGHM, hauerà il
cono ABCDK al cono EFGHM triplicata proportione di quella, che hà
il diametro BD al diametro FH.

E perche il cono x è la terza parte del cilindro,che hà la medesima ba- x 10. del 12.
se, ed altezza; la proportione dunque del cono al cono sarà come il cilin-
dro al cilindro: ma si è dimostrata la proportione del cono al cono essere
triplicata,che la proportione de i diametri delle basi; ne segue la propor-
tione del cilindro al cilindro essere triplicata, che la proportione del dia-
metro della base al diametro della base. Per la qual cosa i coni, & i cilin-
dri simili, sono in triplicata proportione, che i diametri delle basi, ch'era
da dimostrarsi nel primo luogo.

Di nuouo si dimostrerà col P.Clauio, che i simili cilindri scaleni, sono in triplicata proportione de i diametri delle loro basi.

Siano le basi de i simili coni,e cilindri scaleni, i circoli ABC,DEF,e le
assi siano GH,IK. Dico,che il cono ABCH al cono DEFK, & il cilindro
al cilindro hà triplicata proportione di quella, che hà il diametro AC al
diametro DF. Si concepiscano sopra le medesime basi ABC, DEF, due
coni, e cilindri retti, i quali habbiano la medesim'altezza co'coni, e cilin-
dri scaleni, le di cui assi siano GL, IM. Si faccia passare vn piano per le
rette LG, GH, ed vn'altro per le rette IM, IK, i quali seghino le basi
ABC, DEF, per le rette AC, DF; perche i punti G, & I sono i centri de
i circoli, però le rette AC, DF, saranno i diametri di essi circoli; & es-
sendo le assi LG,MI perpendicolari à i piani ABC,DEF, i piani, che pas-
sano per le rette LG, GH, y ed MI, IK, sono retti, cioè perpendicolari y 19. del 11.
alle basi ABC, DEF; per la qual cosa le perpendicolari, che cadono
da i punti H,& K, sopra le basi ABC,
DEF, z caderanno nelle communi z 38. del 11.
settioni GC, IF, e gli angoli HGC,
KIF,saranno le inclinationi, che fan-
no le assi alle basi ABC, DEF; e per
la similitudine de i coni, e cilindri,
gli angoli HGC, KIF saranno frà di
loro vguali.Ma gli angoli CGL,FIM,
sono ancora frà loro vguali, stante
che sono retti; i restanti angoli dun-

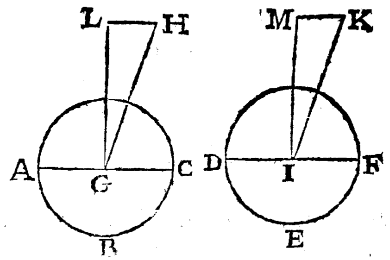


que HGL, KIM, sono a frà di loro vguali. Si tirino le rette LH, MK. a 32. del 1.
Perche i coni, e cilindri retti,si sono posti hauere la medesim'altezza,che
i scaleni, però le rette LH, MK, sono parallele à i diametri AC, DF; dal
che gli angoli in L,ed M,sono retti,ed i restanti angoli H,& K,sono frà di

loro

b 32. del 1. c 4. del 6. loro vguali. Si che i triangoli GHL,IKM, [b] ſono equiangoli, e la proportione di GH à GL ſarà come [c] quella di IK ad IM; e permutando, GH ad IK, ſarà come [d] GL ad IM. Di nuouo perche i coni, e cilindri ſcaleni ſono ſuppoſti ſimili, la proportione di HG ad AC, [e] ſarà come KI à DF; e permutando, HG ad IK ſarà come AC ad FD: [f] ma GH ad IK è dimoſtrata eſſere come LG ad MI, ſarà dunque LG ad MI [g] come AC à DF; e permutando, LG ad AC [h] ſarà come MI ad FD. Per la qual coſa i coni, e cilindri retti, le di cui baſi ABC, DEF, e le aſſi LG, MI, ſarãno frà loro ſimili, e per quel che ſi è moſtrato nella prima parte, la proportione del cono retto ABCL al cono retto DEFM, e del cilindro retto al cilindro retto, ſarà triplicata, che la proportione del diametro AC al diametro DF. Hor perche i coni, e cilindri ABCL, ABCH, hanno la medeſim'altezza, e ſono ſopra la medeſima baſe ABC, per il Coroll. all'11. propoſitione di queſto, il cono retto ABCL ſarà vguale al cono ſcaleno ABCH, ed il cilindro ABCL ſarà vguale al cilindro ABCH. E per l'iſteſſa ragione il cono DEFM ſarà vguale al cono DEFK, ed il cilindro DEFM ſarà vguale al cilindro DEFK. Per la qual coſa il cono ABCL al cono DEFM ſarà come il cono ABCH al cono DEFK; ed il cilindro ABCL al cilindro DEFM, ſarà come il cilindro ABCH al cilindro DEFK. Ma ſi è dimoſtrato il cono, ò cilindro ABCL, al cono, ò cilindro DEFM, hauere triplicata proportione di quella, che hà il diametro AC al diametro DF, ne ſegue il cono ABCH al cono DEFK, ed il cilindro ABCH al cilindro DEFK, hauere triplicata proportione, che il diametro AC al diametro DF; e perciò i ſimili coni, e cilindri, ò che ſiano retti, ouero ſcaleni, hanno triplicata proportione, che i diametri delle baſi, ch'era da dimoſtrarſi.

d 16. del 5.
e 1. definit. del 6.
f 16. del 5.
g 11. del 15.
h 16. del 5.



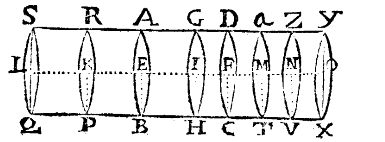
THEOREMA XIII. PROPOSITIONE XIII.

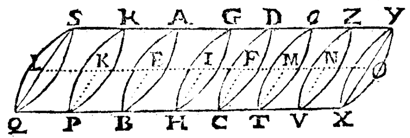
Se il cilindro è ſegato da vn piano equidiſtante alle baſi, il cilindro al cilindro ſarà come l'aſſe all'aſſe.

Sia il cilindro ABCD ſegato dal piano GH, parallelo à gli oppoſti piani AB, CD, il quale ſegarà ancora l'aſſe EF in qualche punto I. Dico, che il cilindro ABHG al cilindro GHCD è come l'aſſe EI all'aſſe IF. S'intenda continuato il propoſto cilindro da ambe due le parti, e con eſſo ſia prolungato il rettangolo EBCF; e nell'aſſe EF [a] ſiano preſe quante parti ſi vogliano EK, KL, vguali ad EI, e ſiano ancora preſe le parti FM, MN, NO, ciaſcuna vguale ad IF; e da i punti I, K, L, M, N, O, ſi tirino le rette IH, KP, LQ, MT, NV, OX, parallele alla retta EB, ouero FC, le quali tutte [c] ſaranno vguali, e parallele frà di loro. Si concepiſca poi muouerſi il rettangolo LQXO intorno all'aſſe LO, poſto immobile, il lato QX nella intiera reuolutione, per la definitione 21. dell'11. deſcriuerà le ſuperficie cilindrica, e le rette LQ, KP, IH, MT, NV OX, per il terzo poſtulato, deſcriueranno i circoli QS, PR, HG, TA, VZ, XY: e per la definit. 21. dell'11. il

a 3. del 1.
b 31. del 1.
c 34. del 1.

ſolido SQXY ſarà cilindro, e le portioni, SQPR, RPBA, ABHG, GHCD, DCTa, aTVZ, ZVKY, ſono cilindri di baſi vguali, ſtante che i circoli, che hanno i ſemidiametri vguali ſono frà di loro vguali. E perche le parti LK, KE, EI, per coſtruttione, ſono vguali, ed vgualmente inclinate à i circoli SQ, RP, GH, però i cilindri SQPR, RPBA, ABHG, haueranno vguali altezze; hanno, per quel che ſi è detto, baſi vguali, e per il Coroll. alla propoſ. 11. ſono frà di loro vguali. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che i cilindri GHCD, DCTa, aTVZ, ZVXY, ſono frà di loro vguali. Per la qual coſa la retta LI ſarà multiplice di EI, come il cilindro QHGS è multiplice del cilindro ABHG. E per l'iſteſsa ragione la retta IO ſarà multiplice di IF, come il cilindro GHXY è multiplice del cilindro GHCD. Hor ſe LI è vguale ad IO, i cilindri SQHG, GHXY, haueranno vguali altezze; ſono poſti ſopra vguali baſi, e per il Corollario all'11. propoſitione, ſono frà di loro vguali. Similmente ſe LI è maggiore di IO, il cilindro SQHG ſarà maggiore del cilindro GHXY; e ſe LI è minore di IO, il cilindro SQHG ſarà minore del cilindro GHXY. Si conſiderino quattro quantità, la prima ſia EI, la ſeconda IF, la terza il cilindro ABHG, e la quarta il cilindro GHCD. Perche LI, multiplice della prima, ſe è maggiore di IO, multiplice della ſeconda, ancora il cilindro SQHG, multiplice della terza, è maggiore del cilindro GHXY, multiplice della quarta; e ſe LI è vguale, ò minore di IO, anco il cilindro SQHG ſarà vguale, ò minore del cilindro GHXY: per la 6. defin. del 5. libro, la proportione dell'aſſe EI, prima quantità, all'aſſe IF, ſeconda quantità, ſarà come il cilindro ABHG, terza quantità, al cilindro GHCD, quarta quantità. Per la qual coſa ſe vn cilindro è ſegato da vn piano, che ſia parallelo alle baſi oppoſte, quello ſarà ſegato in due cilindri, talmente, che il cilindro al cilindro ſarà come l'aſſe all'aſſe; ch'era da dimoſtrarſi.

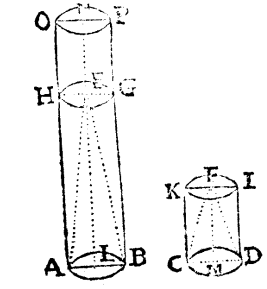




THEOREMA XIV. PROPOSITIONE XIV.

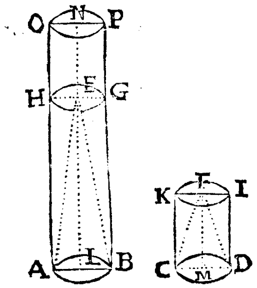
I coni, e cilindri poſti ſopra vguali baſi ſono come le loro altezze.

Siano prima ſopra le baſi vguali AB, CD, due coni retti EBA, FDC, e due cilindri retti HABG, KCDI, le di cui aſſi, ò altezze ſiano le rette LE, MF. Dico, che il cono EBA al cono FCD, ed il cilindro HABG al cilindro KCDI è come l'altezza LE all'altezza MF. S'intenda continuato il cilindro HABG verſo HG, e l'aſſe LE verſo N; [a] ſi tagli EN vguale ad MF, ed

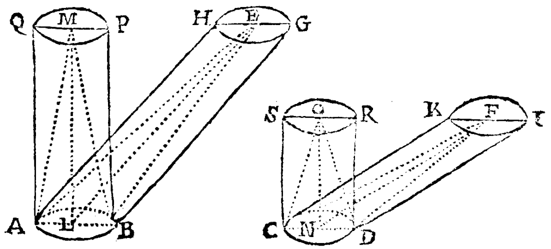


a 3. del 1.

intorno al centro N s'intenda il circolo OP, equidistante al circolo HG, e per la defin. 21. il solido OHGP è cilindro. Perche i circoli HG,CD sono frà di loro vguali, e le assi NE,FM, per costruttione, sono frà di loro vguali, per il Coroll. alla propositione 11. i cilindri KCDI, OHGP, saranno frà di loro vguali; e perciò il cilindro HABG al cilindro OHGP, sarà
b 7. del 5. come il medesimo cilindro HABG b al cilindro KCDI: ma il cilindro HABG al cilindro OHGP, per l'antecedente propositione, è come l'asse LE all'asse EN, sarà
c 11. del 5. il cilindro HABG al cilindro KCDI, c come l'asse LE all'asse EN, cioè all'asse MF. Finalmente essendo il cono EAB la terza
d 10. del 12. parte d del cilindro HABG, ed il cono FCD è la terza parte del cilindro KCDI, ne segue il cilindro HABG al cilindro KC
e 15. del 5. DI, essere e come il cono EAB al cono FCD: ma si è dimostrato, che il cilindro HABG al cilindro KCDI, è come l'asse EL all'asse FM, il cono dunque EA B, al
f 11. del 5. cono FCD, f è come l'asse LE all'asse FM. Per la qual cosa i coni retti, e cilindri retti, che hanno vguali basi, sono come le loro altezze, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.



Supposto di nuouo, che i coni EAB, FCD, ed i cilindri HABG, KCDI, posti sopra le vguali basi AB,CD, siano scaleni; le di cui altezze siano ML,ON. Dico, che il cono EAB al cono FCD, ed il cilindro HABG al cilindro KCDI è come l'altezza ML all'altezza ON. Sopra le basi AB, CD, siano costrutti i coni retti MAB,OCD, ed i cilindri retti QABP, SCDR, i quali habbiano le medesime altezze ML, ON, e per quel che si è dimostrato nella prima parte, il cono retto MAB al cono retto OCD, come ancora il cilindro retto QABP al cilindro retto SCDR, è come l'altezza ML all'altezza ON. In oltre perche i cilindri QABP, HABG, sono posti sopra la medesima base AB, & hanno la medesima altezza, per il Coroll. all'11. propositione, sono frà di loro vguali; e per l'istessa ragione i cilindri SCDR,KCDI, sono frà di loro vguali; dal che il cilindro QABP al cilindro SCDR, sarà come il cilindro HABG al cilindro KCDI: ma il cilindro QABP al cilindro SCDR, per quel che si è dimostrato nella prima parte, è come l'altezza ML all'altezza ON, il cilindro dunque HABG al cilindro KCDI, sarà come l'altezza ML all'al-



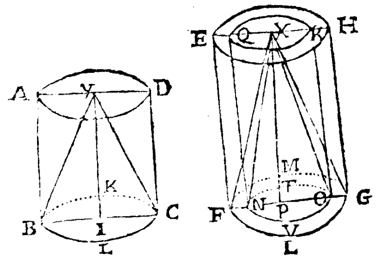
tezza

tezza ON. Di più perche il cilindro HABG, per la 10. proposit. di questo, è il triplo del cono EAB, ed il cilindro KCDI è il triplo del cono FCD, sarà il cilindro HABG al cilindro KCDI, come il cono EAB al cono g 15. del 5.
FCD; ma si è dimostrato il cilindro HABG al cilindro KCDI, essere come l'altezza ML all'altezza ON; sarà il cono EAB al cono FCD, h come h 11. del 5.
l'altezza ML all'altezza ON. Per la qual cosa i coni, e cilindri che hanno, vguali basi, sono frà di loro come le altezze, ch'era da dimostrarsi.

S C O L I O.

La conuersa facilmente la faremo nel seguente modo.

I coni, e cilindri, i quali hanno l'istessa proportione, che le loro altezze, se non hanno la medesima base, haueranno le basi vguali.



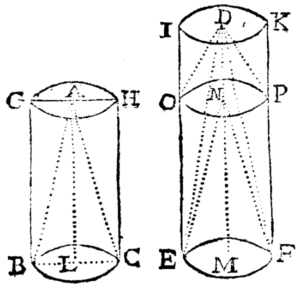
Siano i cilindri ABCD, EFGH, ed i coni YBC, XFG, le di cui altezze siano le rette YI, XP, ed habbia il cilindro ABCD al cilindro EFGH, ouero il cono YBC al cono XFG, l'istessa proportione, che le loro altezze. Dico che le basi BC, FG sono frà di loro vguali: Se le basi non sono frà di loro vguali, vna sarà maggiore dell'altra: supposto che la base FG sia maggiore della base BC, sarà dunque il semidiametro PG maggiore del semidiametro IC. Si tagli PO vguale ad IC; nel piano MFLG, intorno al centro P coll'interuallo PO, si descriua il circolo NVOT, sopra la base NVOT s'intenda eleuato il cilindro QNOR all'altezza XP, e sopra la medesima base NVOT, alla medesima altezza XP, sia descritto il cono XNVOT. Perche i cilindri ABCD, QNOR, sono sopra le vguali basi BC, NO, per l'antecedente propositione, il cilindro ABCD al cilindro QNOR sarà come l'altezza YI all'altezza XP: mà, per ipotesi, il cilindro ABCD al cilindro EFGH, è come l'altezza YS alla medesima altezza XP; sarà dunque il cilindro ABCD al cilindro QNOR a come il medesimo cilindro ABCD a 11. del 5.
al cilindro EFGH; dal che i cilindri QNOR, EFGH b sono frà di loro vguali; la parte vguale al tutto, ch'è impossibile. Non dunque la base FG è maggiore della base BC, mà sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, ch'essendo il cono YBC al cono XFG, come l'altezza YI all'altezza XP, le basi FG, BC, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi. b 9. del 5.

THEOREMA XV. PROPOSITIONE XV.

Gli vguali coni, e cilindri, hanno le basi reciproche

alle

alle altezze; e quei coni, e cilindri, che hanno le basi re-
ciproche alle altezze, sono frà di loro vguali.



Siano gli vguali coni ABC,DEF,e gli
vguali cilindri GBCH, IEFK, le di cui
basi BC,EF, e le altezze AL, DM. Dico
che la base BC alla base EF è come l'al-
tezza DM all'altezza AL. Se le altezze
AL,DM,sono frà di loro vguali, saranno
i cilindri GBCH,IEFK, come le basi: ma
p 11,del 12. i cilindri GBCH,IEFK,[p] per ipotesi,sono
frà loro vguali, saranno le basi BC, EF
frà di loro vguali; per la qual cosa la ba-
se BC alla base EF sarà come l'altezza
DM all'altezza AL, che era da prouarsi.

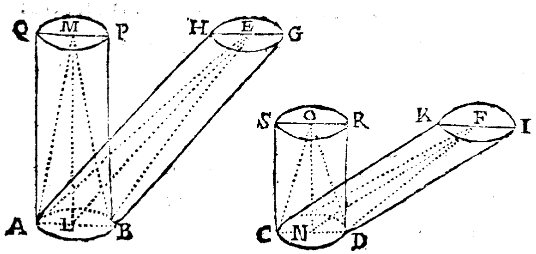
Se le altezze AL, DM, sono ineguali; sia la maggiore DM; si tagli da
a 3.del 1. DM [a] la parte NM, vguale ad AL, e per il punto N si concepisca passare
il piano OP, equidistante al piano EF, in modo che ne risulti il cilindro
OEFP, e per la 14.propositione, il cilindro IEFK al cilindro OEFP, sarà
come l'altezza DM all'altezza NM. In oltre perche i cilindri GBCH,
IEFK, per ipotesi, sono fra di loro vguali,preso il cilindro OEFP, come
terza quantità, sarà il cilindro GBCH al cilindro OEFP; come [b] il cilin-
b 7.del 5. dro IEFK [b], al medesimo cilindro OEFP; ma il cilindro GBCH al cilin-
c 14.del 12. dro OEFP è come la base BC alla base EF [c] (stante che le altezze AL,
NM sono per costruttione, vguali) il cilindro dunque IEFK al cilindro
d 11.del 5. OEFP, [d] sarà come la base BC alla base EF: ma il cilindro IEFK al ci-
lindro OEFP, è come DM ad NM; sarà dunque la base BC alla base
e 11.del 5. EF, [e] come DM ad NM; la retta NM è vguale ad AL, sarà la base BC
alla base EF, come l'altezza DM all'altezza AL; ch'era da dimostrarsi.
Ne i coni, se l'altezza DM è vguale all'altezza AL,essendo i coni ABC,
DEF, vguali, per il Corollario all'11.propositione, le basi BC, EF sono
frà loro vguali, e però la base BC alla base EF, sarà come l'altezza DM
all'altezza AL.

Se l'altezza DM è maggiore dell'altezza AL, si faccia NM vguale ad
AL, e si formi il cono ENF, e per la 14.propositione,il cono DEF al co-
no NEF sarà come l'altezza DM all'altezza NM. In oltre perche i coni
ABC,DEF, sono supposti vguali, sarà il cono ABC al cono NEF, come
f 7.del 5. il cono DEF [f] al medesimo cono NEF; ma il cono ABC al cono NEF [g]
g 11. del 12. è come la base BC alla base EF (stante che le altezze NM, AL sono v-
h 11.del 5. guali) sarà la base BC alla base EF [h] come il cono DEF al cono NEF:
E perche si disse che il cono DEF al cono NEF è come DM ad NM,sarà
K 11. del 5. la base BC alla base EF [K] come l'altezza DM all'altezza NM,ouero AL
ch'era da dimostrarsi.

Di nuouo sia la base BC alla base EF come l'altezza DM all'altezza
AL. Dico che i cilindri IEFK, GBCH sono frà di loro vguali; e simil-
mente i coni DEF,ABC, sono frà di loro vguali. Se le altezze AL,DM,

sono

sono fra di loro vguali, essendo BC ad EF, come DM ad AL, e le
rette DM, AL, sono vguali, le basi ancora BC, EF, [l] saranno fra di l 14.del 5.
loro vguali; si che i cilindri GBCH, IEFK, hanno le altezze, e ba-
si vguali, e per il Corollario all'vndecima propositione di questo, i ci-
lindri GBCH, IEFK, sono fra di loro vguali; e per la medesima ragio-
ne i coni ABC, DEF, sono fra di loro vguali. Se l'altezza DM è mag-
giore di AL, si faccia la costruttione come prima, sarà NM vguale
ad AL: ma i cilindri, che hanno vguali altezze, per l'vndecima propo-
sitione, sono come le basi; sarà la base BC alla base EF, come il cilindro
GBCH al cilindro OEFP. Supposto questo, Perche per ipotesi, BC ad
EF è come DM ad AL, ed AL, è vguale ad NM, sarà BC ad EF, come
DM ad NM; ma DM ad NM, per la 14.propositione, è come il cilin-
dro IEFK al cilindro OEFP, sarà il cilindro IEFK al cilindro OEFP, [m] m 11.del 5.
come BC ad EF; si è mostrato BC ad EF essere come il cilindro GBCH
al cilindro OEFP; il cilindro dunque IEFK al cilindro OEFP [n] sarà co- n 11.del 5.
me il cilindro GBCH al medesimo cilindro OEFP. Per la qual cosa i
cilindri GBCH, IEFK, sono frà di loro vguali. Finalmente perche DM
è altezza commune del cono DEF, e del cilindro IEFK, ed AL è altez-
za commune del cono ABC, e del cilindro GBCH, essendosi dimostrato
che i cilindri GBCH,IEFK,sono frà di loro vguali, le loro terze parti sa-
ranno frà di loro vguali: ma i coni, per la 10.propositione, sono la terza
parte de i cilindri, ne segue i coni ABC, DEF, essere frà di loro vguali.
Per la qual cosa i coni, e cilindri de'quali le basi sono reciproche all'al-
tezze, sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

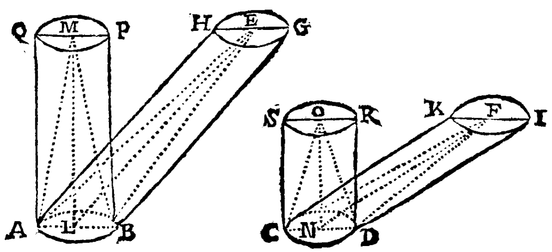


Il medesimo si di-
mostra de i coni, e
cilindri scaleni, Sia-
no i coni EAB,FCD
ed i cilindri HABG,
KCDI,le di cui basi
AB,CD, e le altezze
ML, ON. Dico pri-
ma, che se il cono
EAB è vguale al co-
no FCD, & il cilin-
dro HABG è vguale al cilindro KCDI,la proportione della base AB al-
la base CD [o] sarà come l'altezza ON all'altezza ML. Sopra le basi AB, o 14.del 12.
CD, si costituiscano i coni retti MAB,COD, ed i cilindri retti QABP,
SCDR, che habbiano le medesime altezze ML,ON. Perche i coni MAB
EAB, hanno la medesima altezza ML, e sono sopra la medesima base
AB, per il Corollario all'11.propositione, sono frà di loro vguali. E si-
milmente i loro tripli, cioè i cilindri QABP, HABG, sono fra di loro v-
guali. Per l'istessa ragione il cono OCD è vguale al cono FCD,ed il ci-
lindro SCDR è vguale al cilindro KCDI: ma i coni EAB, FCD sono,
per ipotesi, frà di loro vguali, perciò i coni MAB,OCD, sono frà di loro
vguali; e similmente i cilindri QABP,SCDR,sono frà di loro vguali; e
per quel che si è dimostrato nella prima parte, la base AB alla base

CD,

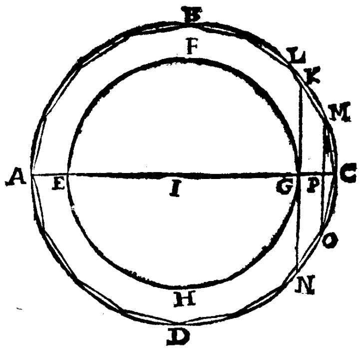
C D, farà come l'altezza NO all'altezza LM, che era prima da dimoſtrarſi.

Di nuouo, ſuppoſto, che AB à CD ſia come NO ad LM. Dico che i coni EAB, FCD, ſono frà di loro vguali, e parimente i cilindri HABG, KCDI, ſono frà di loro vguali. Suppoſta la medeſima coſtruttione. Ne i cilindri retti QABP, SCDR, eſſendo la baſe AB alla baſe CD, come l'altezza ON all'altezza ML, per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte, i cilindri QABP, SCDR, ſono fra di loro vguali, come ancora i coni MAB, OCD ſono frà di loro vguali: ma i cilindri QABP, SCDR, ſono ſtati dimoſtrati vguali à i cilindri HABG, KCDI, ed i coni MAB, OCD, ſono ſtati dimoſtrati vguali à i coni EAB, FCD, ne ſegue i cilindri HABG, KCDI, eſſere frà di loro vguali, come ancora i coni EAB, FCD, ſono frà di loro vguali, ch'era da dimoſtrarſi.



PROBLEMA I. PROPOSITIONE XVI.

Dati due circoli intorno di vn medeſimo centro, deſcriuere nel maggiore vn poligono equilatero, che i lati ſiano di numero paro, e non tocchino il circolo minore.



Siano i due circoli ABCD, EFGH, intorno al medeſimo centro I; ſi vuole nel maggior circolo ABCD deſcriuere vn poligono equilatero, che i lati ſiano di numero paro, e che non tocchino il circolo minore EFGH. Per il centro I ſi tiri il diametro AC, il quale ſegarà la circonferenza del circolo interno ne i punti per eſſempio E, & G, nel punto
a 11. del 1. G, [a] ſopra il diametro AC, ſi erigga la perpendicolare GK, concorrente colla circōferenza del circolo eſterno in qualche punto K; e per il Corollario alla 16. propoſitione del 3. la retta KG toccarà il circolo FGH nel punto G. Perche l'arco AKC è maggiore dell'arco KC, ſe ne detragga la metà AB, e dal reſtante BC, ſe ne leui la metà BL, e di nuouo dal reſtante LC ſe ne leui la metà LM, e con queſt'

queſt'ordine in infinito, ſi peruerrà finalmente [b] ad vna quantità minore di KC; ſuppoſto che quella ſia l'arco MC, ſi tiri la retta MC. Dico che la b 1. del 10.
retta MC ſarà vno de i lati di quel poligono, che ſi è propoſto deſcriuere. Si diuida l'arco BL nelle parti di numero, e quantità vguali alle parti, che ſono in LC; e di nuouo l'arco AB, (che è vguale à BC) ſi diuida nelle parti di numero, e quantità vguali alle parti BC; ſiche il ſemicircolo ABC ſarà diuiſo in parti vguali, e ciaſcuna di quelle parti ſarà vguale ad MC; ſi diuida poi l'arco ADC nelle parti di numero, e quantità vguali alle parti, che ſono nell'arco ABC; ſarà diuiſa tutta la circonferenza del circolo ABCD in parti vguali, e di numero paro; ſi tirino le rette, che ſottendono quegli archi, e ſarà deſcritto il poligono equilatero, e di lati di numero paro. Dico finalmente, che i lati di queſto poligono non toccano la circonferenza del circolo interno. Dal punto M ſi faccia cadere [c] la c 12. del 1.
retta MP perpendicolare al diametro AC. Perche gli angoli KGP, MPG ſono retti, le rette KG, MP, ſono [d] frà di loro parallele; e perche la retta d 28. del 1.
KG tocca il circolo interno nel ſolo punto G, la retta dunque MP cade totalmente fuori del circolo FGH, ne può mai toccarlo in neſſun punto, ſtante che non può mai concorrere colla retta KN, per la definitione delle parallele. Hor ſe la retta MO non può mai toccare il circolo FGH, molto meno lo può toccare la retta MC, la quale è più lontana dal circolo FGH di quello, che è la retta LO; e per l'iſteſſa ragione neſſun' altro lato del poligono deſcritto toccarà il detto circolo, ſtante che il circolo FGH, è vgualmente diſtante dal circolo ABCD; per la qual coſa nel circolo maggiore ſi è deſcritto il poligono equilatero, di lati di numero paro, il quale non tocca il circolo minore, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

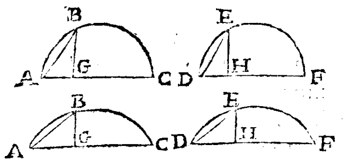
COROLLARIO.

Da quel che ſi è dimoſtrato è manifeſto, che ſe dall'eſtremo di quel lato del poligono iſcritto, che concorre col diametro, cade vna retta perpendicolare al medeſimo diametro, come fà la retta MP, quella in neſſun modo può toccare il circolo interno.

LEMMA I.

Se ſiano due qualunque vguali portioni ABC, DEF, di circoli vguali, e ſia l'arco AB vguale all'arco DE, è da i punti B, ed E, cadano le rette BG, EH, perpendicolari alle corde AC, DF. Dico che la retta BG ſarà vguale ad EH, la retta AG vguale ad HD, e la retta GC vguale ad HF.

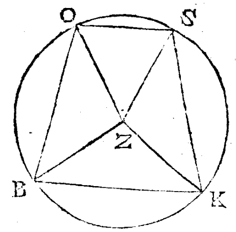
Si tiri la retta AB. Perche gli archi ABC,DEF, per ipotesi, sono vguali,
a 29. del 3. *perciò le rette AC,DF, a saranno frà di loro vguali. Similmente essendo l'arco ABC vguale all'arco DEF, e gli archi AB, DE, per ipotesi, sono vguali, i restanti archi BC,EF, saranno frà di loro vguali; dal che gli angoli BAC, EDF, opposti à gli vguali archi*
b 27. del 3. *BC,EF, b sono frà di loro vguali. Si considerino i due triangoli BAG, EDH, angoli retti in G, ed H. Essendosi dimostrato gli angoli BAG, EDH frà loro vguali, i due angoli BAG,BGA del triangolo BAG, saranno vguali à i due angoli EDH,EHD*
c 29. del 3. *del triangolo EDH, il lato BA è vguale al lato ED (stante che c sostendono gli*
d 26. del 1. *archi vguali AB,DE, saranno i restanti due lati BG,GA d vguali à i restanti due lati EH,HD, cioè il lato BG è vguale al lato EH, ed il lato AG è vguale al lato DH: ma le rette AC,DF, sono frà di loro vguali, detrattone le parti vguali AG,DH, restano le parti GC,HF, frà di loro vguali, che era da dimostrarsi.*



L E M M A II.

Se nel circolo sia descritto vn quadrilatero, che habbia tre lati vguali, ed il quarto lato sia minore di ciascheduno de gli vguali, tirate le rette dal centro del circolo à gli angoli del quadrilatero, l'angolo nel centro, opposto ad vno de i lati vguali, sarà ottuso.

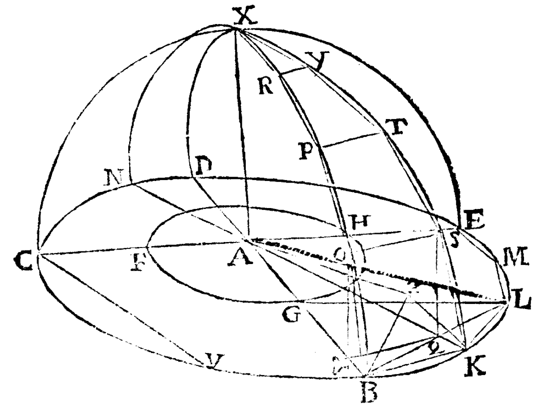
Nel circolo O B K S, il di cui centro Z, sia iscritto il quadrilatero OBKS, del quale i tre lati OB,BK,KS, siano frà loro vguali ed il quarto lato OS sia minore del lato BK. Dico che tirate le rette ZB,ZK,ZS.ZO, l'angolo BZK, opposto al lato BK, sarà ottuso. Perche i lati SK,KB,BO, sono frà loro vguali,
a 28. del 3. *perciò gli archi SK,KB,BO, a sono frà loro vguali, e gli angoli al centro SZK, KZB,*
b 27. del 3. *BZO, b sono frà di loro vguali. Di nuouo, essendo i lati ZK, ZB, del triangolo ZKB, vguali à i lati ZO,ZS del triangolo ZSO, e la base KB è maggiore della ba-*
c 25. del 1. *se SO, c l'angolo BZK sarà maggiore dell'angolo OZS. E perche gli angoli OZB,BZK,KZS, per quel che si è dimostrato, sono frà di loro vguali in conseguenza l'angolo OZS sarà minore di ciascuno degli angoli OZB,BZK,KZS:*
d 13. del 1. *ma i quattro angoli OZB,BZK,KZS,SZO, intorno al centro Z, d sono vguali à quattro angoli retti, perciò ciascun'angolo OZB,BZK,KZS, sarà maggiore d'vn angolo retto, per la qual cosa l'angolo BZK sarà ottuso, ch'era da dimostrarsi.*



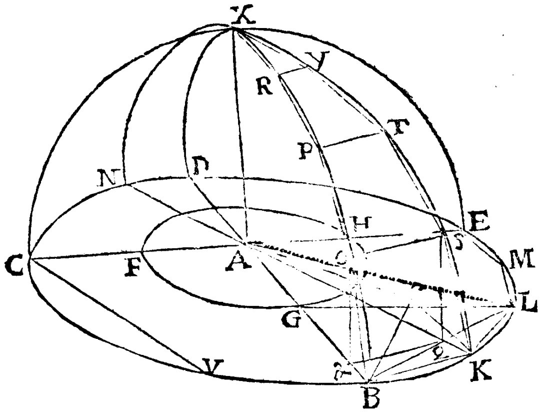
PROBLEMA II. PROPOSITIONE XVII.

Date due sfere intorno ad vn medesimo centro, descriuere nella maggior sfera vn solido polliedro, che non tocchi la superficie della minor sfera.

Siano proposte due sfere intorno al medesimo centro A, nella maggiore si vuole iscriuere vn solido polliedro, cioè di molti lati, talmente, che i piani, che contengono il solido polliedro, non tocchino la superficie della minor sfera. Siano segate le proposte sfere da vn piano, che passi per il commune centro A, le communi settioni nelle superficie sferiche, come CBED, FGH saranno circonferenze di circoli massimi, stante che reuoluti quei semicircoli, che descrissero le sfere, le loro circonferenze congruono colle settioni CBED, FGH, cioè colla circonferenza CBED nella maggior sfera, e con la circonferenza FGH nella minore, le quali, per costruttione, sono intorno al medesimo centro A, ed in vn medesimo piano; si tirino i due diametri DB, CE, che si seghino ad angoli retti nel centro A, e dal punto G, nel piano CBL si tiri la retta GL a' angoli retti con la retta AB, a la a 11. del 1.
quale concorrerà con la circonferenza BLE in qualche punto L, e toccarà il circolo FGH b nel b Corollario della 16. del 6.
punto G; si tiri la retta LB, e dal punto C, nell'arco CB, si addatti d la retta d 1. del 4.
CV vguale alla retta LG. Perche LG è perpendicolare ad AB, il triangolo LGB sarà rettangolo in G, dal che la retta LB e sarà maggiore di LG: ma e 17. del 1.
LG è vguale ad VC, sarà LB maggiore di CV, e l'arco LKB sarà maggiore f dell'arco CV; si detragga dal quadrante BLE la sua metà, e dal restante f 28. del 3.
se ne leui la metà, e con quest'ordine si proseguisca fin à tanto, che resti vn arco g minore dell'arco CV; e supposto che l'arco restato sia KB; perche g 1. del 10.
KB è minore di CV, e l'arco CV è minore di BL, sarà l'arco BK minore dell'arco BL. E proseguendo come nella propos. antecedente, nel maggior circolo CBED si descriua vn poligono equilatero, che i lati siano pari di numero, e non tocchino la circonferenza FGH del circolo minore; sarà la retta BK vno di quei lati; si addattino i lati KL,LM, ME, ciascuno vguale à BK, & il medesimo si faccia ne gli altri quadranti; si tiri poi la



h 12. del 11. retta KA, la quale si prolunghi sino ad N, e nel punto A si erigga [h] la retta AX perpendicolare al piano CBED, concorrente colla superficie della sfera in qualche punto X; per la retta AX, e per il diametro CE, si faccia passare vn piano, che seghi le proposte sfere; similmente per la retta AX, e per ciascuno de i diametri DB, NK, si facciano passare altri piani, che seghino le sfere, e per quel che si è detto, le communi settioni de i piani seganti, e delle superficie sferiche, saranno circonferenze di circoli massimi; siano quelle le notate CXE, NXK, DXB. E perche la retta AX è perpendicolare al piano CBED, i piani de i massimi circoli CXE, K 19. del 11. NXK, DXB [k] saranno perpendicolari al piano CBED: ma i diametri CE, NK, DB, nel medesimo circolo CBED, sono frà di loro vguali, però i mezzi circoli BED, CXE, NXK, DXB, saranno frà di loro vguali, ed i quadranti, cioè le loro quarte parti BLE, BPX, KTX, EX, sono frà di loro vguali. Per la qual cosa quanti lati del poligono descritto sono nel quadrante BLE, altretanti se ne possono adattare in ciascuno de i quadranti BPX, KTX: si adattino dunque in questi i lati BO, OP, PR, RX, KS, ST, l 1. del 4. TY, YX. [l] Perche i lati BK, KL, LM, ME, sono frà di loro vguali, e sono ancora vguali à quelli adattati ne i quadranti BPX, KTX, però tutti i lati, adattati in essi quadranti, sono frà di loro vguali. Si tirino le rette OS, PT, RY, e da i punti O, S, alle rette AB, AK si m 12. del 1. faccino cadere [m] le perpendicolari O&, SQ, e si congiunga &Q. Perche O& è nel piano DXB, il quale è retto al piano CBED, essendo O& perpendicolare alla commune settione n 38. del 11. AB, sarà ancora [n] perpendicolare al piano CBED. Nell'istesso modo si prouerà, che la retta SQ è perpendicolare al medesimo piano o 6. del 11. CBED: per la qual cosa le rette O&, SQ, sono frà di loro parallele: ma gli archi OB, SK, per costruttione, sono frà di loro vguali, per il Lemma primo, le rette O&, SQ, sono frà di loro vguali; le quali, essendo parallele, saranno in conseguenza vguali, e parallele: si che le rette OS, &Q che p 33. del 1. congiungono gli estremi, saranno [p] frà di loro vguali, e parallele, & il quadrilatero O&QS sarà parallelogrammo. Similmente essendo gli archi BO, KS frà di loro vguali, e le rette O&, SQ, perpendicolari à i diametri DB, NK, le parti &B, QK, saranno frà di loro vguali: ma, per la definitione del circolo, i semidiametri AB, AK, sono frà di loro vguali; se da essi se ne detraggono le parti vguali &B, QK, resta A& vguale ad AQ.



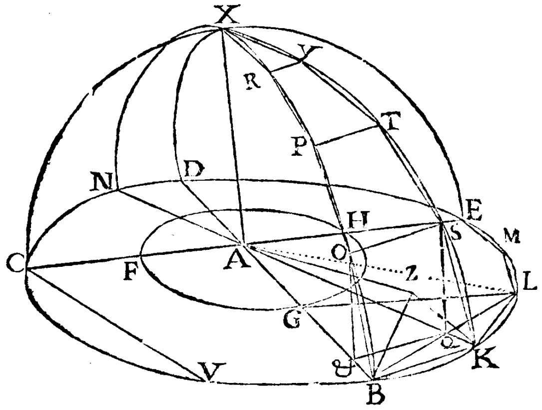
e sarà

e sarà la proportione di A& ad &B, come quella di AQ à QK; dal che la retta BK [q] sarà parallela ad &Q. q 2. del 6. Ma si è dimostrata OS parallela alla medesima &Q, le due BK, OS, saranno [r] frà di loro parallele, r 9. del 11. e le rette OB, SK, che le congiungono, saranno [t] nel medesimo piano, doue sono le parallele OS, BK: t 7. del 11. per la qual cosa il quadrilatero OBKS sarà vna figura piana. Nell'istesso modo si prouerà, che il quadrilatero POST è figura piana, come ancora il quadrilatero RPTY, ed il triangolo XRY. Dal centro A si concepiscano tirate rette linee à i punti O, S, P, T, R, Y, e sarà fatto il solido XBKA, che sarà composto di più piramidi, le di cui basi sono i piani BOSK, POST, PTYR, XRY, ed hanno per vertice commune il punto A. Se per il centro A, e per li punti L, ed M, si facciano passare altri diametri, per i quali, e per la retta XA, si facciano passare altri piani, che seghino la medesima sfera, questi disegnaranno nella superficie della sfera altre circonferenze di circoli massimi; e facendosi in esse il medesimo, che si è fatto ne gli archi XB, XK, e similmente quanto si è fatto nella quarta parte XBE della sfera; si faccia ancora nell'altre quarte parti XED, XDC, XCB, ed il simile si faccia nel emisfero inferiore, e sarà costrutto nella maggior sfera il solido polliedro proposto. Dico che i piani, che contengono questo solido polliedro non toccano la superficie della minor sfera GHF.

Perche l'arco BK, per costruttione, è minore dell'arco CV, la retta BK [u] sarà minore della retta CV: u 29. del 3. ma la retta CV è vguale ad LG, sarà dunque LG maggiore della retta BK. Di nuouo perche Q& è parallela al lato BK, i [x] triangoli ABK, A&Q sono equiangoli, e la proportione di x 29. & 32. del 1. AB à BK [y] sarà come A& ad &Q, e permutando, AB ad A& sarà come y 4. del 6. BK ad &Q: ma AB è maggiore di A&, sarà BK [a] maggiore di &Q. z 16. del 5. E perche &Q è vguale ad OS, sarà BK maggiore di OS. a 14. del 5. Dal centro A al piano OBKS [b] si faccia cadere la perpendicolare AZ, e si tirino le rette BZ, b 11. del 11. KZ. Perche la retta AZ è perpendicolare al piano OBKS, sarà ancora perpendicolare alle rette BZ, KZ, [c] e perciò gli angoli AZB, AZK, sono c 3. definit. del 11. retti. Nel triangolo AZB angolo retto in Z, il quadrato dell'ipotenusa AB è [d] vguale à i quadrati de i due lati AZ, ZB. d 45. del 1. Similmente nel triangolo AZK, angolo retto in Z, il quadrato di AK è vguale à i quadrati de i due lati AZ, ZK: ma le rette AB, AK, sono frà di loro vguali, i quadrati dunque delle due AZ, ZB, saranno vguali à i quadrati delle due AZ, ZK; se ne leui il quadrato del commun lato AZ, resta il quadrato di ZB vguale al quadrato di ZK, e la retta ZB vguale alla retta ZK. Nell'istesso modo si dimostrerà, che le rette tirate dal punto Z à i punti O, ed S, sono frà di loro vguali, e sono vguali alle due ZB, ZK: per la qual cosa il punto Z [e] e 9. del 3. sarà il centro di quel circolo, che passa per li punti O, B, K, S, ed il quadrilatero OBKS sarà iscritto nel circolo. E perche i lati OB, BK, KS, [f] sono f 29. del 3. frà di loro vguali (stante che gli archi OB, BK, KS, sono frà di loro vguali) ed il lato BK è mostrato maggiore di OS, per l'antecedente Lemma 2. l'angolo BZK sarà ottuso, ed il lato BK [g] sarà maggiore di BZ: ma la retta GL g 19. del 1. è dimostrata maggiore di BK, sarà la retta GL molto maggiore di BZ. Finalmente nel triangolo AGL, angolo retto in G, il quadrato di AL [h] è vguale à i quadrati de i due AG, GL, e similmente nel triangolo AZB, an- h 47. del 1.

golo

golo retto in Z, il quadrato di AB è vguale à i quadrati de i due lati AZ, ZB: ma i semidiametri AB,AL, sono frà di loro vguali, saranno i quadrati delle due LG,GA, vguali à i quadrati delle due BZ,ZA; e perche il quadrato di LG è maggiore del quadrato di BZ (stante che LG è dimostrata maggiore di BZ,) se da i quadrati delle due LG,GA, se ne leua il quadrato di LG, e da i quadrati delle due BZ,ZA, se ne leua il quadrato della minore BZ, resta il quadrato di AG minore del quadrato di AZ, e la retta AZ maggiore di AG. E perche la retta AG è semidiametro della minor sfera, sarà AZ maggiore, che il semidiametro della minor sfera; per la qual cosa il punto Z cade lontano dalla superficie della minor sfera; e perciò il piano OBKS non tocca la superficie della minor sfera. Nell' istesso modo si dimostrerà, che nessun piano del solido polliedro descritto, tocca la superficie della sfera minore. Per la qual cosa nella maggior sfera si è iscritto vn solido polliedro di faccie di numero paro, i di cui piani non toccano la superficie della minor sfera, descritta intorno al medesimo centro della maggiore, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



S C O L I O.

Se in vn altra sfera, sarà iscritto vn solido polliedro, simile al solido polliedro iscritto nell'antecedente sfera, il solido polliedro, iscritto in vna delle sfere, al simile solido polliedro, iscritto nell'altra sfera, hauerà triplicata proportione, che il diametro dell'vna, al diametro dell' altra sfera.

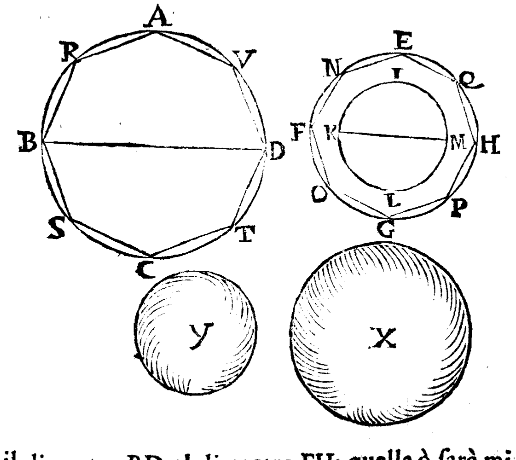
Perche tirato da i centri delle sfere à tutti gli angoli de i simili polliedri linee rette, quei solidi polliedri saranno risoluti in tante piramidi; e perche i solidi polliedri si suppongono simili, però le piramidi dell'vno sono simili alle corrispondenti piramidi dell'altro: ma le piramidi simili, per l'8. propositione, sono in triplicata proportione, che i loro lati homologhi, la piramide dunque ABKSO, dell'antecedente figura, alla corrispondente piramide nell'altro simile polliedro, hauerà triplicata proportione, che il lato homologo AB, ch'è semi-

diame-

diametro della sfera CBE, al lato homologo della corrispondente piramide nell' altro polliedro, che sarà ancora semidiametro di quella sfera, nella quale è iscritto quel polliedro. E nell'istesso modo tutte l'altre piramidi del polliedro descritto nella sfera CBE, alle corrispondenti piramidi dell'altro simile polliedro, haueranno triplicata proportione, che i loro lati homologhi, pigliando quei lati, che sono semidiametri delle sfere; dal che tutte le piramidi del polliedro, descritto nella sfera CBE, prese come antecedenti, à tutte le piramidi del simile polliedro, descritto in altra sfera, prese come conseguenti, K 12. del 5. *saranno come vn antecedente ad vn conseguente, cioè come la piramide ABKSO alla corrispondente piramide nell'altro polliedro. Ma la piramide ABKSO, alla corrispondente piramide nell'altro polliedro, hà triplicata proportione, che il lato AB, che è semidiametro della sfera CBED, al lato homologo della corrispondente piramide nell'altro polliedro, che è semidiametro dell'altra sfera; cioè la piramide ABKSO alla corrispondente piramide, nell'altro polliedro hauerà triplicata proportione, che il semidiametro AB al semidiametro della sfera, doue è descritto l'altro polliedro; e perciò tutto il polliedro, descritto nella sfera CBED, à tutto il simile polliedro, descritto nell'altra sfera, hauerà triplicata proportione, che il semidiametro AB al semidiametro della sfera, doue è descritto il simile polliedro. Ma i semidiametri delle sfere sono come i diametri delle medesime, il polliedro dunque descritto nella sfera CBED, al polliedro simile descritto in altra sfera, hauerà triplicata proportione, che il diametro DB, della sfera CBED, al diametro della sfera, nella quale è descritto il simile polliedro, come si disse.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIONE XVIII.

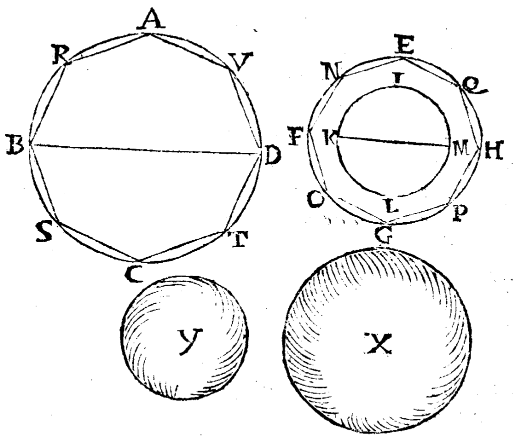
Le sfere sono frà di loro in triplicata proportione de i loro diametri.



Siano le sfere ABCD, EFGH, i di cui diametri BD, FH. Dico che la sfera ABCD alla sfera EFGH hà triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH. Se la sfera ABCD alla sfera EFGH non hà la proportione triplicata del diametro BD al diametro FH, habbia la sfera ABCD ad vn altra sfera, la proportione triplicata, che hà il diametro BD al diametro FH; quella ò sarà minore della sfera EFGH, come IKLM, ouero sarà maggiore, come la sfera X.

ra X. Supposto prima, che sia minore, e sia quella la sfera IKLM posta intorno al medesimo centro della sfera EFGH.

Si iscriua nella sfera EFGH, per l'antecedente propos. vn solido polliedro, che non tocchi la superficie della sfera minore IKLM, e sia quello il solido polliedro ENFOGPHQ. Sia poi iscritto nella sfera ABCD vn solido polliedro, simile al polliedro ENFOGPHQ, per l'antecedente Coroll. il polliedro ARBSCTDV, descritto nella sfera ABCD, al simile



solido polliedro ENFOGPHQ descritto nella sfera EFGH, hauerà triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH: ma la sfera ABCD alla sfera IKLM, per costruttione, hà la medesima proportione triplicata del diametro BD al diametro FH; la proportione dũque della sfera ABCD alla sfera IKLM, sarà come quella del solido polliedro ARBSCTDV al solido polliedro ENFOGPHQ: è permutando, la sfera
a 16. del 5. ABCD al solido polliedro ARBSCTDV, [a] sarà come la sfera IKLM al solido polliedro ENFOGPHQ. Ma la sfera ABCD è maggiore del soli-
b 14. del 5. do polliedro ARBSCTDV, sarà la sfera IKLM [b] maggiore del solido polliedro ENFOGPHQ; la parte maggiore del tutto, ch'è impossibile. Non dunque la sfera ABCD alla sfera IKLM hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH. D'onde è manifesto essere impossibile, che la sfera ABCD habbia ad vn solido minore della sfera EFGH triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH. E nell'istesso modo si dimostrerà essere impossibile, che la sfera EFGH habbia ad vn solido minore della sfera ABCD triplicata proportione di quella, che hà il diametro FH al diametro BD.

Di nuouo, supposto che la sfera ABCD habbia ad vn solido maggiore della sfera EFGH, triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH, e sia quel solido la sfera X. Perche la sfera ABCD alla sfera X hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, e per il Corollario antecedente, il polliedro ARBSCTDV al polliedro ENFOGPHQ, hà la medesima triplicata proportione, che hà il diametro BD al diametro FH, sarà la sfera ABCD alla sfera X come il polliedro ARBSCTDV al polliedro ENFOGPHQ; ed inuertendo, la sfera X alla sfera ABCD sarà come il polliedro ENFOGPHQ al polliedro ARBSCTDV: ma per il Coroll. antecedente, il polliedro ENFOGPHQ al polliedro ARBSCTDV hà triplicata proportione, che il diametro FH al

diametro BD, hauerà dunque la sfera X alla sfera ABCD triplicata proportione, che il diametro FH al diametro BD, Supposto questo.

Si concepisca come la sfera X alla sfera ABCD, così la sfera EFGH ad vn'altra sfera, che sia Y; permutando, la sfera X alla sfera EFGH, sarà [c] c 16. del 5.
come la sfera ABCD alla sfera Y: ma la sfera X è posta maggiore della sfera EFGH, ne segue la sfera ABCD [d] essere maggiore della sfera Y, d 14. del 5.
cioè la sfera Y sarà minore della sfera ABCD. Di nuouo essendosi dimostrato, che la sfera X alla sfera ABCD hà triplicata proportione di quella, che hà il diametro FH al diametro BD, e si è fatta la sfera X alla sfera ABCD, come la sfera EFGH alla sfera Y, la sfera dunque EFGH alla sfera Y hauerà triplicata proportione, che il diametro FH al diametro BD: per la qual cosa la sfera EFGH hauerà ad vn solido minore della sfera ABCD, triplicata portione di quella, che hà il diametro FH al diametro BD, ch'è contro à quello, che si è concluso nella prima parte. Non dunque la sfera ABCD hauerà ad vna sfera maggiore della sfera EFGH, triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, ne men, per quel che si è dimostrato nella prima parte, hauerà ad vna sfera minore della sfera EFGH triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, ed in conseguenza la sfera ABCD alla sfera EFGH hauerà triplicata proportione di quella, che hà il diametro BD al diametro FH, ch'era da dimostrarsi.

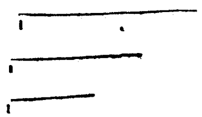
COROLLARIO.

Perche tanto la sfera alla sfera, quanto il polliedro, descritto in vna di esse, al simile polliedro descritto nell'altra, hà triplicata proportione, che il diametro BD al diametro FH, sarà manifesto, che la sfera alla sfera è come il solido polliedro, al solido polliedro.

APPENDICE.

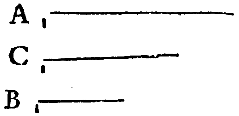
Della quale si è parlato nel fine del decimo Elemento.

Date due qualunque linee rette, frà loro incommensurabili in lunghezza, ritrouare altre grandezze, come figure piane, ò solide, frà di loro incommensurabili.



Siano esposte le rette A, & B frà di loro incommensuraaili in lunghezza. Si troui frà le due A, & B [a] vna media proportionale, che sia a 13. del 6.
la retta C. Dico che tutte le figure piane simili descritte sopra le rette A, & C ouero sopra le rette C, & B sono frà di loro incommensurabili, e tutt'i solidi d'vguali altezze, che hanno

per basi le figure piane simili descritte sopra le rette A, & C, ouero C, & B sono frà di loro incommensurabili. Similmente tutti i circoli, i di cui diametri sono le rette A, & C, ouero C, & B sono frà di loro incommensurabili, e tutti i coni, e cilindri di vguali altezze, le di cui basi siano i circoli descritti intorno à i diametri A, & C, ouero C, & B sono frà loro incommensurabili.



b 13. del 6. *Perche i piani simili, e similmente posti sopra le rette A, & C* [b] *hanno duplicata proportione, che li loro lati homologhi, cioè la figura piana descritta sopra la retta A alla figura simile, e similmente posta alla retta C, hà dupplicata proportione di quella, che hà la retta A*
c Lem. 8. dopo la 18. del 6. *alla retta C, mà la prima A* [c] *alla terza B hà la medesima dupplicata proportione di quella, che hà la retta A alla retta C, sarà la figura piana descritta sopra la retta A alla figura simile, e similmente posta*
d 11. del 5. *sopra la retta C* [d] *come la retta A alla retta B, mà la retta A per ipotesi è incommensurabile in lunghezza alla retta B, sarà la figura piana*
e 10. del 10. *descritta sopra la retta B* [e] *incommensurabile alla figura simile, e similmente posta sopra la retta C, l'istesso si dimostrerà se le figure simili saranno descritte sopra le rette C, & B. Se dunque sopra le rette A, & C, ouero C, & B, saranno descritte due qualunque figure simili, e similmente poste, quelle saranno fra di loro incommensurabili, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

Se saranno descritte figure solide di vguali altezze, le di cui basi siano li piani simili, e similmente posti sopra le rette A, & C, ouero C,
f 32. del 11. & 6. del 12. *& B; perche gli solidi d'vguali altezze* [f] *sono come le basi, essendo le basi per quel che si è dimostrato incommensurabili frà di loro, saranno*
g 10. del 11. h 18. del 6. *ancora i solidi* [g] *frà di loro incommensurabili, se dunque sopra le rette A, & C, ouero C, & B* [h] *saranno descritti piani simili, e similmente posti, e sopra quei piani simili saranno descritte piramidi, ò prismi, ò altre figure solide d'vguali altezze, quelle figure solide saranno frà loro incommensurabili.*

Di nuouo, se prese le rette A, & C, come diametri di due circoli, ed intorno alle rette A, & C saranno descritti quei circoli; perche il
K 20. del 6. & Lem. 8. dopo la 18. del 6. l 2. del 12. *quadrato della retta A, al quadrato della retta C* [K] *è come la retta A alla retta B, ed il quadrato del diametro A, al quadrato del diametro C* [l] *è come il circolo descritto intorno al diametro A, al circolo descritto intorno al diametro C, sarà il circolo descritto intorno al diametro A, al circolo descritto intorno al diametro C, com'è la retta A alla retta B, mà le rette A, & B, per ipotesi sono frà loro incommensura-*

bili in lunghezza, in conseguenza i circoli descritti intorno à i diametri A, & C [m] *sono frà loro incommensurabili, e se sopra quei circoli saranno descritti Coni, ò Cilindri d'vguali altezze; perche li Coni frà di* m 10. del 10.
loro, e Cilindri frà di loro [n] *sono come le basi, essendo le basi frà loro incommensurabili; saranno ancora li Coni, ò Cilindri d'vguali altezze* n 11. del 12.
descritti sopra di essi [o] *frà loro incommensurabili. Se dunque intorno à i diametri A, & C, ouero C, & B, si descriueranno circoli, quelli saranno frà loro incommensurabili, E se sopra à quei circoli saranno descritti Coni, ò Cilindri d'vguali altezze, quelli saranno frà loro incommensurabili, il che era da farsi, e dimostrarsi.* o 10. del 10.

Fine del Duodecimo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI.

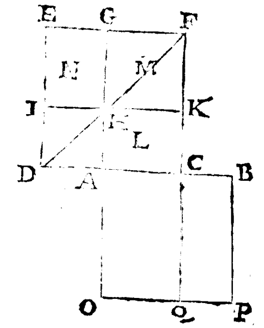
ELEMENTO DECIMOTERZO.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, ed alla maggior parte s'aggiunga la metà di tutta la linea; il quadrato della composta è il quintuplo del quadrato di quella metà aggiunta.

a 30.del 6. SIA la retta linea AB, a diuisa secondo l'estre-
ma, e media proportione in C, ed alla mag-
gior parte CA s'aggiunga la retta AD, vguale
alla metà di tutta la retta AB. Dico, che il qua-
drato della composta DC è il quintuplo del
quadrato dell' aggiunta DA. Sopra la retta
b 46. del 1. CD b si descriua il quadrato CE, si tiri il dia-
c 31.del 1. metro DF, e dal punto A si tiri la retta AG c
parallela al lato DE, la quale segarà il diametro
DF in qualche punto H; per il punto H si faccia
d 31. del 1. passare la retta IK d parallela al lato DC, e sarà diuiso il quadrato CE in
quattro parallelogrammi, de' quali i due IA, GK, che sono intorno al dia-
metro DF, per il Corollario alla quarta propositione del secondo, sono
quadrati, cioè sono i quadrati delle rette DA, AC, & i due AK, IG, sono
e 43.del 1. f 46.del 1. rettangoli e vguali frà loro. Similmente sopra la retta AB f si descriua il
quadrato OB, si continui FC sino in Q; il rettangolo QB sarà contenu-
g 1. definit. del 2. to g da i due lati PB, BC: ma il lato PB è vguale ad AB, il rettangolo PC
sarà vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AB, BC. Perche la retta
AB è diuisa, per ipotesi, secondo l'estrema, e media proportione in C, sarà
h 3. definit. del 6. AB ad AC, h come AC à CB; ed il rettangolo contenuto dalle estreme
K 17.del 6. AB, BC, K sarà vguale al quadrato della media AC, ma il rettangolo
delle due AB, BC, è vguale al rettangolo PC, sarà il rettangolo PC vgua-
le al quadrato di AC, cioè vguale al quadrato KG. In oltre, perche AB, per
ipotesi, è il doppio di AD, ed è vguale ad AO, sarà AO il doppio di AD; ma
AD (come lato del quadrato AI) è vguale ad AH, sarà OA il doppio di
AH. Si considerino i rettangoli OC, AK, i quali hanno vna medesim'al-
l 1. del 6. tezza, ed in conseguenza sono l come le basi OA, AH: ma OA è il doppio

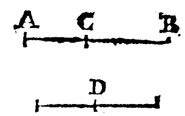
di AH, sarà il rettangolo OC il doppio di AK. E perche il rettangolo AK m è vguale al complemento IG, sarà il rettangolo OC vguale à i due m 43.del 1.
complementi CH, HE. Hor à i due complementi CH, HE, s'aggiunga il quadrato KG, ed al rettangolo OC s'aggiunga il rettangolo QB, ne viene tutto il quadrato OB vguale allo gnomone LMN. Finalmente perche AB è il doppio di AD, per lo Scolio alla quarta propositione del secondo, il quadrato di AB sarà il quadruplo del quadrato di AD, cioè il quadrato OB è il quadruplo del quadrato AI: ma il quadrato OB fù dimostrato vguale allo gnomone LMN, sarà lo gnomone LMN il quadruplo del quadrato AI: se allo gnomone LMN s'aggiunge il quadrato AI, ne viene tutto il quadrato CE il quintuplo del quadrato AI; cioè il quadrato di CD è il quintuplo del quadrato di DA, ch'era da dimostrarsi.



LEMMA.

Se il quadrato d'vna retta linea è il quintuplo del quadrato d'vna sua parte, il doppio di quella parte è maggiore del restante della linea.

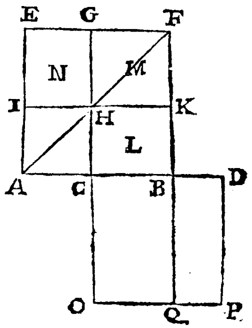
Sia il quadrato della retta AB il quintuplo del quadrato della parte AC, e sia la retta D il doppio di AC. Dico, che la retta D è maggiore della retta CB. Perche la retta D è il doppio di AC, per lo Scolio alla quarta propositione del secondo, il quadrato della retta D sarà il quadruplo del quadrato di AC. In oltre, perche la retta AB è diuisa in C, il quadrato
di AB a *è vguale à i quadrati delle due AC, CB,* a 4. del 2.
col doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB; ma il quadrato di AB, per ipotesi, è il quintuplo del quadrato di AC, i quadrati delle due AC, CB, col doppio rettangolo contenuto dalle medesime AC, CB, sarà il quintuplo del quadrato di AC; se ne leui il quadrato di AC, resta il quadrato di CB, col doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, il quadruplo del quadrato di AC: ma il quadrato della retta D è il quadruplo del quadrato di AC, sarà il quadrato della retta D vguale al quadrato di CB, col doppio rettangolo delle due AC, CB. Per la qual cosa il quadrato della retta D è maggiore del quadrato di CB, per quanto è il doppio rettangolo contenuto dalle due AC, CB, e perciò la retta D è maggiore di CB, ch'era da dimostrarsi.



THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Se il quadrato d'vna retta linea è il quintuplo del quadrato d'vna parte della medesima retta, & il doppio di quella parte è diuiso secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte sarà vguale al rimanente della linea proposta.

Sia la retta AB diuisa in C, in modo che il quadrato di AB sia il quintuplo del quadrato di AC, e sia fatta CD il doppio di AC, sarà CD, per l'antecedente lemma, maggiore di CB. Dico, che la retta CD è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte è la retta CB, ch'è il restante di AB. Sopra la retta
a 46. del 1. AB [a] si descriua il quadrato BE, si tiri il diametro AF, e dal punto C si tiri la retta
b 31. del 1. CG [b] parallela ad AE, la quale segarà il diametro AF in qualche punto H; per il punto
c 31. del 1. H [c] si faccia passare la retta IK parallela ad EF; sarà diuiso il quadrato BE in quattro parallelogrammi, de'quali i due CI, KG, intorno al diametro AF, per il Coroll. alla 4. propos. del secondo, sono quadrati, ed i complementi BH, HE, sono rettangoli vguali; si
d 3. del 1. continui GC verso O, si faccia CO [d] vguale à CD, e si compisca il quadrato CP; si prolunghi FB sino in Q; il rettangolo BP sarà contenuto da i due lati PD, DB: ma PD è vguale al lato CD, sarà il rettangolo PB vguale à quello, che è contenuto dalle due CD, DB. E perche CD è il doppio di AC, sarà il quadrato di CD, per lo Scolio alla quarta propositione del secondo, il quadruplo del quadrato di AC; cioè il quadrato OD è il quadruplo del quadrato CI. Di nuouo perche il quadrato di AB è il quintuplo del quadrato di AC, cioè il quadrato BE è il quintuplo del quadrato IC, leuatone il quadrato IC, resta lo gnomone LMN il quadruplo del quadrato CI; ma il quadrato OD fu dimostrato il quadruplo del quadrato CI, sarà lo gnomone LMN vguale al quadrato OD. Finalmente perche DC è il doppio di CA, ed è vguale ad OC, sarà OC il doppio di CA; ma la retta CA è vguale ad HC, sarà OC il doppio
e 1. del 6. di CH. E perche i rettangoli OB, CK, [e] sono come le basi OC, CH, essendo OC il doppio di CH, sarà il rettangolo OB il doppio del rettan-
f 43. del 1. golo CK: ma il rettangolo CK [f] è vguale al complemento HE, sarà il rettangolo OB vguale à i due complementi BH, HE, giunti insieme; fù dimostrato tutto lo gnomone LMH vguale al quadrato OD, sarà il rettangolo QD vguale al quadrato KG, cioè vguale al quadrato di CB. E perche il rettangolo QD fù dimostrato vguale al rettangolo contenuto dalle due CD, DB; il rettangolo dunque contenuto dalle due CD, DB, sarà vguale



al qua-

al quadrato di CB; e sarà CD à CB [g] come la medesima CB al rimanente BD. Per la qual cosa la retta CD [h] è diuisa secondo l'estrema, e media proportione nel punto B, e sarà CB la maggior parte, ch'era da dimostrarsi.
g 17. del 6.
h 3. defin. del 6.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, è media proportione, il quadrato della retta composta della minor parte, e della metà della maggior parte, è il quintuplo del quadrato della metà della maggior parte.

Sia la retta AB diuisa secondo l'estrema, e media proportione nel punto C, e la maggior parte AC sia diuisa in due parti vguali in D. Dico, che il quadrato della retta DB è il quintuplo del quadrato di DC. Perche AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, sarà AB ad AC [a] come AC à CB, ed il rettangolo contenuto dall'estreme AB, BC, [b] a 3. definit. del 6.
sarà vguale al quadrato della media AC; ma il quadrato di AC, per lo b 17. del 6.
Scolio alla quarta propositione del 2. è il quadruplo del quadrato della metà CD, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, il quadruplo del quadrato di CD. Se al rettangolo delle due AB, BC, s'aggiunge il quadrato di CD, il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, sarà il quintuplo del quadrato di CD. In oltre, perche la retta AC è diuisa in due parti vguali in D, e se l'è aggiunta la parte CB; il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, [c] sarà vguale al c 6. del 2.
quadrato di DB: ma, per quel che si è dimostrato, il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di CD, è il quintuplo del quadrato di CD, sarà il quadrato di DB il quintuplo del quadrato di CD, come fù proposto di mostrare.

S C O L I O.

Il Campano fà la conuersa nel seguente modo.

Se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, ed il quadrato della retta composta della minor parte, e della metà della maggior parte, sia il quintuplo del quadrato della metà della maggior parte; quella retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione.

Sia la retta AB diuisa in due parti ineguali in C, in modo, che diuisa la maggior parte AC in due parti vguali in D, il quadrato di DB sia il quintuplo

del

del quadrato di DC. Dico, che la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione. Perche la retta AC è diuisa in due parti vguali in D; e se l'è aggiunta la retta CB, il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di

a 6. del 2. *CD, [a] è vguale al quadrato di DB: ma il quadrato di DB, per ipotesi, è il quintuplo del quadrato di CD, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di DC, il quintuplo del quadrato di CD; leuatone il quadrato di CD, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, il quadruplo del quadrato di CD. E perche il quadrato della retta AC*

b Scol. all. 4. del 2. *[b] è il quadruplo del quadrato della metà DC, sarà il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, vguale al qua-*

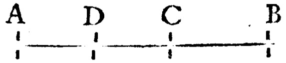
c 17. del 6. *drato di AC: dal che AB ad AC, [c] sarà come AC à CB; per la qual cosa la*

d 3. definit. del 6. *retta AB [d] è diuisa in C secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da dimostrarsi.*

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, il quadrato di tutta, col quarto della minor parte, è il triplo del quadrato della parte maggiore.

Sia la retta linea AB diuisa in C secondo l'estrema, e media proportione. Dico, che il quadrato di tutta AB, col quadrato della minor parte CB, è il triplo del quadrato della maggior parte AC. Perche la retta AB è diuisa in C secondo l'estrema, e media proportio-



a 3. definit. del 6. ne, sarà AB [a] ad AC, come AC à CB, ed il rettangolo contenuto dall' estreme AB,

b 17. del 6. BC, [b] sarà vguale al quadrato di AC, e perciò il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà il doppio del quadrato di AC. Se al doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, s'aggiunge il quadrato di AC, il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, sarà il triplo del quadrato di AC: ma per la 7. propositione del secondo, il doppio rettangolo contenuto delle due AB, BC, col quadrato di AC, è vguale à i quadrati delle due AB, BC; i quadrati dunque delle due AB, BC, sono il triplo del quadrato di AC, ch'era da dimostrarsi.

S C O L I O.

Questa ancora si conuerte nel seguente modo.

Se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, in modo, che il quadrato di tutta, col quadrato della minor parte, sia il triplo del quadrato della maggior parte, quella

retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione.

Sia diuisa la retta AB in due parti ineguali in C, in modo, che il quadrato di AB, col quadrato della minor parte CB, sia il triplo del quadrato della maggior parte AC. Dico, che la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione. Perche la retta AB è diuisa in C, per la settima propositione del secondo, il quadrato di AB, col quadrato di BC, e vguale al doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col

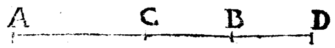
quadrato di AC; ma i quadrati delle due AB, BC, per ipotesi, sono il triplo del quadrato di AC; sarà il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, il triplo del quadrato di AC; se ne leui il quadrato di AC, resta il doppio rettangolo contenuto dalle due AB, BC, vguale al doppio quadrato di AC; e la metà, cioè il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà vguale al quadrato di AC; dal che AB ad AC [a] sarà come AC à CB. Per la a 17. del 6.
qual cosa la retta AB [b] è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, b 3. definit. del 6.
ch'era da dimostrarsi.

Il Maurolico aggiunge il seguente Theorema.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, alla quale sia aggiunta vna retta vguale alla minor parte, il quadrato della composta è il quintuplo del quadrato della maggior parte; e se vna retta linea è diuisa in due parti ineguali, in modo, che aggiuntale vna retta vguale alla minor parte, il quadrato della composta sia il quintuplo della maggior parte, quella retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione.

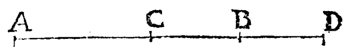
Nel quadrato

Sia prima la retta AB diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, alla quale sia aggiunta la retta BD, vguale alla minor parte CB. Dico, che il quadrato di AD è il quintuplo del quadrato di AC. Perche la retta AB è diuisa in C, e se l'è aggiunta la retta BD, vguale à CB, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, [a] è vguale al quadrato di AD. In oltre, perche a 8. del 2.



AB è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, sarà AB ad AC [b] come AC à CB: si che il rettangolo contenuto dall'estreme AB, BC, [c] sarà vguale al quadrato della b 3. defin. del 6.
media AC; ed il quadruplo rettangolo contenuto dalle medesime AB, BC, sarà c 17. del 6.
il quadruplo del quadrato di AC. Se al quadruplo rettangolo contenuto dalle

due AB, BC, s'aggiunge il quadrato di AC, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, sarà il quintuplo del quadrato di AC: ma il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col d 8. del 2. *quadrato di AC, [d] è vguale al quadrato di AD; il quadrato dunque di AD è il quintuplo del quadrato di AC, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

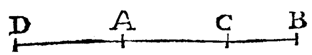


Di nuouo sia diuisa AB in due parti ineguali in C, in modo, che aggiunta ad AB la parte BD, vguale à CB, il quadrato di AD sia il quintuplo del quadrato di AC. Dico, che la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione. Perche il quadrato di AD è il quintuplo del quadrato di AC, ed il qua- e 8. del 2. *drato di AD [e] è vguale al quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC; sarà il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, il quintuplo del quadrato della medesima AC: se ne leui il quadrato di AC, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, sarà il quadruplo del quadrato di AC; ed il solo rettangolo contenuto dalle due AB,* f 17. del 6. g 3. defin. del 6. *BC, sarà vguale al quadrato di AC. Per la qual cosa AB ad AC [f] sarà come AC à CB, e la retta AB [g] sarà diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, ch'era da dimostrarsi.*

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, alla quale sia aggiunta vna retta vguale alla maggior parte; tutta la composta sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà la linea proposta.

Sia la retta linea AB diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, ed alla retta AB sia aggiunta DA vguale alla maggior parte AC. Dico, che la composta DB è diuisa in A, secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà AB. Perche AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportio-



a 3. definit. del 6. b Corol. alla 4. del 5. c 18. del 5. d 3. defin. del 6. ne, sarà AB ad AC, [a] cioè AB ad AD, come AC à CB; ed inuertendo, DA ad AB, sarà [b] come BC à CA; e componendo, DB à BA [c] sarà come BA ad AC, cioè come la medesima BA ad AD; per la qual cosa la retta AB [d] è diuisa in A, secondo l'estrema, e media proportione, ed AB è la maggior parte, ch'era da dimostrarsi.

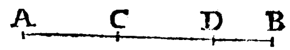
SCO-

SCOLIO I.

La conuersa la dimostraremo col Campano nel modo seguente.

Se vna retta linea è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, e dalla maggior parte se ne detragga vna retta vguale alla minor parte; quella maggior parte sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà vguale à quella, che in tutta era la minore dell'estreme.

Sia la retta AB diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, e dalla parte maggiore CB se ne detragga le retta CD, vguale alla minore AC. Dico, che la retta CB è diuisa in D, secondo l'estrema, e media proportione; e la maggior parte sarà CD, ch'è vguale ad AC. Perche AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, sarà AB à BC, [a] come la medesima



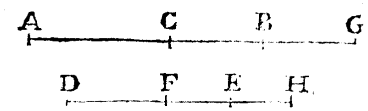
BC ad AC, cioè come BC à CD; e diuidendo, AC à CB [b] sarà come BD à DC; a 3. definit. del 6. b 17. del 5. c Coroll. alla 4. del 5. d 3. definit. del 6. *ed inuertendo, BC à CA, [c] ouero CD, sarà come la medesima CD à DB. Per la qual cosa la retta CB [d] è diuisa, in D, secondo l'estrema, e media proportione, e la parte maggiore è la retta CD, ch'era da dimostrarsi.*

SCOLIO II.

Di Pappo proposit. 44. lib. 5. nel Commento del Commandino, ed Hypsicle 7. prop. del 14. Elemento.

Le parti delle rette diuise secondo l'estrema è media proportione, sono frà loro proportionali.

Sia diuisa la retta AB secondo l'estrema, e media proportione in C, e sia la maggior parte AC; similmente sia diuisa la retta DE, secondo l'estrema, e media proportione in F, e sia DF la maggior parte.

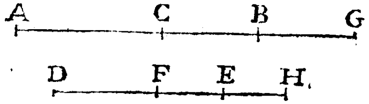


Dico che BA ad AC è come ED à DF, e che AC à CB è come DF ad FE. Si prolunghino le rette AB, DE, verso G, ed H; si faccia BG [a] vguale à CB, e si faccia EH vguale ad EF, a 3. del 1. *per l'ottaua del secondo, il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, col quadrato di AC, è vguale al quadrato di AG; ed il quadruplo rettangolo contenuto dalle due DE, EF, col quadrato di DF, è vguale al qua-*

 drato

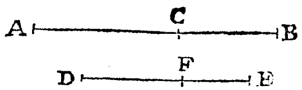
b 3. definit. del 6. c 17. del 6. d 7. del 5. e 18. del 5. f 8. del 2. g 22. del 6. h 17. del 5. K Scol. alla 22. del 5. l 18. del 5. m corol. alla 4. del 5.

drato di DH. Perche la retta AB è diuisa in C, secondo l'estrema, e media proportione, sarà BA ad AC [b] come AC à CB, ed il rettangolo contenuto dall'estreme AB, BC, sarà [c] vguale al quadrato della media AC. E per l'istessa ragione il rettangolo contenuto dalle due DE, EF, è vguale al quadrato di DF; e perciò il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, al quadrato di AC, [d] sarà come il rettangolo contenuto dalle due DE, EF, al quadrato di DF; e quadruplati gli antecedenti, sarà il quadruplo rettangolo contenuto dalle due AB, BC, al quadrato di AC, come il quadruplo rettangolo contenuto dalle due DE, EF, al quadrato di DF; e componendo, sarà il quadruplo rettangolo delle due AB, BC, [e] col quadrato di AC, al quadrato di AC, come il quadruplo rettangolo delle due DE, EF, col quadrato di DF, al quadrato di DF: ma il quadruplo rettangolo delle due AB, BC, col quadrato di AC, [f] è vguale al quadrato di AG; ed il quadruplo rettangolo delle due DE, EF, col quadrato di DF, è vguale al quadrato di DH; sarà il quadrato di AG al quadrato di AC, come il quadrato di HD al quadrato di DF, ed il lato GA al lato AC [g] sarà come HD à DF; e diuidendo, GC à CA [h] sarà come HF ad FD; e prese le metà dell'antecedenti, sarà BC à CA, [K] come EF ad FD, e componendo BA ad AC [l] sarà come ED ad DF. Similmente essendo BC à CA come EF ad FD, inuertendo, [m] AC à CB sarà come DF ad FE, ch'era da dimostrarsi.



La conuersa di questa propositione, la fà il Sig. Borelli nel seguente modo.

Se due rette sono diuise proportionalmente, ed vna di quelle è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, ancora l'altra sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione.



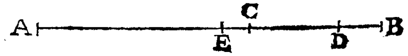
a coroll. alla 19. del 5. b 17. del 5. c 11. del 5. d 11. del 5. e 3. definit. del 6.

Sia la retta AB diuisa secondo l'estrema è media proportione in C, e sia AC la maggior parte; e la proportione di BA ad AC sia come quella di ED à DF. Dico che la retta DE è diuisa secõdo l'estrema, e media proportione, e la maggior parte sarà la retta DF. Perche BA ad AC è come ED à DF, per la conuersione della proportione, sarà AB à BC [a] come DE ad EF; e diuidendo, AC à CB [b] sarà come DF ad FE; ma AC à CB è come BA ad AC (stante che la retta AB è diuisa secondo l'estrema, e media proportione) sarà DF ad FE, [c] come BA ad AC: ma BA ad AC, per ipotesi, è come ED à DF, sarà ED à DF [d] come DF ad FE. Per la qual cosa la retta DE [e] è diuisa in F, secondo l'estrema, e media proportione, e la maggior parte è DF, che era da dimostrarsi.

Suppo-

Supposto le cose antedette facilmente si può dimostrare il seguente Theorema.

Se qualunque retta AB è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, la di cui maggior parte sia AC, e preso in AB qualunque punto D, poi diuisa la maggior parte AC, in modo, che AE ad EC sia come AD à DB. Dico che la retta AD è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in E, e la maggior parte sarà la retta AE.

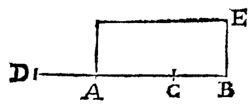


a Corol. alla 4. del 5. b 18. del 5. c 16. del 5.

Perche AD à DB è come AE ad EC, inuertendo, [a] sarà BD à DA come CE ad EA, e componendo, BA ad AD [b] sarà come CA ad AE, e permutando BA ad AC [c] sarà come DE ad AE: ma BA, per ipotesi, è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, per l'antecedente Theorema, sarà DA diuisa secondo l'estrema, e media proportione in E, di cui AE sarà la maggior parte, ch'era da dimostrarsi.

THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Se vna retta linea Rationale è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, l'vna, e l'altra parte è linea irrationale, ed è quella, che si chiama Apotome.

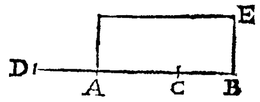


a 6. del 10. b 6. defin. del 10. c 6. defin. del 10. d scolio nel 9. del 9. e 9. del 10. f 74. del 10.

Sia la retta Rationale AB, diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, e sia AC la maggior parte. Dico che ciascuna delle rette AC, CB, è irrationale, e che ambedue, prese separatamente, sono Apotome. Alla parte maggiore AC s'aggiunga la retta AD, vguale alla metà della Rationale AB, sarà il quadrato di CD, per la prima propositione di questo, il quintuplo del quadrato di AD; per la qual cosa il quadrato di CD al quadrato di AD sarà come numero à numero, cioè come 10. à 2, e perciò i quadrati delle due CD, DA, [a] sono commensurabili, e le rette CD, DA, sono commensurabili almeno in potenza: ma la retta AD è Rationale, [b] stante che è commensurabile al suo doppio, cioè alla Rationale AB: sarà dunque CD, [c] che gli è commensurabile, Rationale. In oltre perche i quadrati delle due CD, DA, [d] non sono come numero quadrato à numero quadrato, stante che sono come 10. à 2, le rette CD, DA, [e] saranno incommensurabili in lunghezza, e perciò saranno Rationali, e commensurabili solamente in potenza. Se dunque dalla Rationale CD, se ne detrae la retta DA, Rationale solamente in potenza, sarà la rimanente AC [f] irrationale, e sarà quella, che si chiama Apotome.

 Di

g 45. del 1. Di nuouo s'intenda applicato ad AB g il rettangolo AE vguale à quello, ch'è contenuto dalle due AB,BC, ſarà il lato BE vguale alla retta
h 3. defin. del 6. CB . Perche AB ad AC h è come AC à CB,il rettangolo contenuto dalle due AB, BC, cioè
K 17. del 6. il rettangolo AE , K ſarà vguale al quadrato dell'Apotome AC . Hor perche il quadrato dell' Apotome AC , cioè il rettangolo AE , è applicato alla Rationale AB , l'altro lato BE , ouero BC, che ne riſulta,per la 98.del 10. è Apotome prima, e perciò le due AC , CB , ſono linee irrationali, e ſono Apotome , ch'era da dimoſtrarſi.



S C O L I O.

Si può qui aggiungere il ſeguente Theorema del Campano .

Se vna retta linea è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la parte maggiore è Rationale, la minore ſarà Apotome.

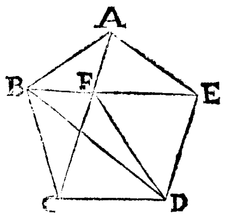
Sia la retta AB diuiſa ſecondo l'eſtrema , e media proportione in C, la di cui maggior parte AC ſia Rationale . Dico che la minore CB è Apotome . Si diuida AC in due parti vguali in
a 3. del 13. *D, ſarà la metà DC Rationale, ed il quadrato di BD a ſarà il quintuplo del quadrato di DC ; dal che i quadrati delle rette BD, DC, ſono come 10. à 2,*
b 6. del 10. *cioè come numero à numero, e perciò i quadrati delle due BD,DC, b ſono commenſurabili, e le rette BD,DC, ſono commenſurabili almeno in potenza : ma*
c 6. defin. del 10. *DC è Rationale , ſarà ancora DB, c che gli è commenſurabile , Rationale . E perche i quadrati delle due BD , DC , per lo Scolio nel fine del nono , non ſono*
d 9. del 10. *come numero quadrato à numero quadrato ; le due BD, DC d ſaranno incommenſurabili in lunghezza , per la qual coſa le medeſime BD , DC, ſono Rationali , commenſurabili ſolamente in potenza ; ſe dunque dalla Rationale DB ſe ne detrae la Rationale DC, commenſurabile ſolamente in potenza, la rima-*
e 74. del 10. *nente BC e ſarà Apotome, ch'era da dimoſtrarſi.*

THEOREMA VII. PROPOSITIONE VII.

Se tre angoli d'vn pentagono equilatero, ò contigui, ò non contigui, ſono frà loro vguali , quel pentagono ſarà equiangolo.

Nel pentagono equilatero ABCDE, ſiano prima i tre angoli contigui A, B, C, frà di loro vguali. Dico che il propoſto pentagono ABCDE è equiangolo . A gli vguali angoli A,B,C, ſiano ſotteſe le rette DB, CA, BE. Perche i due lati DC , CB, del triangolo DBC, ſono vguali à i due lati BA , AE , del triangolo BAE, l'angolo DCB , per ipoteſi, è vguale

all'angolo BAE , ſarà la baſe BD a vguale alla baſe BE, e l'angolo BEA, vguale all'angolo BDC.Hor eſſendo i lati BD,BE,vguali frà loro, gl'angoli BDE , BED , b ſaranno frà di loro vguali , à i quali s'aggiungano gli vguali angoli B DC , BEA, ſarà tutto l'angolo AED , vguale all'angolo CDE . In oltre perche i due lati CB , BA, del triangolo CBA, ſono vguali à i due lati EA,AB, del triãgolo BAE,e l'angolo CBA,per ipoteſi,è vguale all'angolo BAE,ſarà la baſe BE c vguale alla baſe CA,l'ãgoloCAB vguale all'angolo EBA,e l'angolo BCAvguale all'angolo ABE . Hor eſſendo gliangoli FAB, FBA, frà di loro vguali, ſarà il lato FA d vguale al lato FB ; dalle vguali rette CA,EB, ſe ne leuino le vguali rette FA, FB , reſta CF vguale ad FE : dal punto F all'angolo oppoſto D ſi tiri la retta FD . Eſſendo il lato DC vguale, per ipoteſi, al lato DE, è ſi è dimoſtrato il lato EF vguale al lato FC, i due lati DC,CF, del triangolo DCF, ſono vguali à i due lati DE,EF,del triangolo DEF, la baſe DF è commune,ſarà l'angolo DCF, vguale all'angolo DEF , à i quali s'aggiungano gli vguali angoli BCA , AEB, tutto l'angolo BCD, ſarà vguale à tutto l'angolo AED ; ma l'angolo AED è dimoſtrato vguale all'angolo EDC, e l'angolo DCB è ſuppoſto vguale ad ogn'vno degli angoli CBA , BAE ; tutti gli angoli dunque del pentagono ABCDE ſono frà di loro vguali , ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



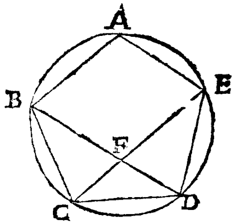
a 4. del 1. b 5. del 1. c 4. del 1. d 6. del 1. e 8. del 1.

Di nuouo , ſuppoſto che i tre angoli vguali non ſiano contigui , come ſono i tre angoli A,C,& D. Dico ſimilmente,che il pentagono ABCDE è equiangolo . Conſiderando i due triangoli BAE,D CB, ſi dimoſtri, come prima ſi fece,che le baſi BE , BD , ſono frà loro vguali , e che tutto l'angolo AED è vguale all'angolo CDE : ma l'angolo CDE è poſto vguale all'angolo,BCD ; i tre angoli contigui BCD, CDE, DEA , ſono frà di loro vguali,e per quel che ſi è dimoſtrato nella prima parte,il pentagono ABCDE è equiangolo, ch'era da dimoſtrarſi .

THEOREMA VIII. PROPOSITIONE VIII.

Se due angoli contigui d'vn pentagono equilatero , ed equiangolo , ſono ſotteſi da due rette linee, quelle ſi ſegano ſcambieuolmente ſecondo l'eſtrema , e media proportione, ed ogn'vna, delle parti maggiori è vguale al lato del pentagono.

Sia il pentagono equilatero,ed equiangolo ABCDE, del quale due cõtigui angoli vguali,comeC,D,ſiano ſotteſi dalle rette BD,CE,le quali ſi ſeghino ſcambieuolmente in qualche punto F.Dico che le rette EC, BD, ſi ſegano ſcambieuolmente ſecondo l'eſtrema, e media proportione ; e ciaſcuna delle parti maggiori EF,FB,è vguale al lato del pentagono.Intorno a 14. del 4. al propoſto pentagono [a] ſi circoſcriua il circolo ABCDE. Eſſendo il pentagono equilatero, ed equiangolo, gli archi AB, BC, CD, DE, EA [b] ſaranno frà di loro vguali, dal che l'arco BAE ſarà il doppio dell'arco ED e l'angolo BCE, oppoſto all'arco BAE, [c] ſarà il doppio dell'angolo ECD oppoſto all'arco ED. Similmente eſſendo gli archi BC, CD, ED, frà di loro vguali, gli angoli oppoſti CDB, CBD, DEC, DCB, [d] ſono frà di loro vguali. Hor eſſendo li angoli FCD, FDC, fra di loro vguali, ſarà CF [e] vguale ad FD. Si conſiderino i due triangoli BCD, CDE. Perche i due lati BC, CD, per ipoteſi, ſono vguali à i due lati CD, DE, e l'angolo BCD è vguale all' angolo CDE, ſarà la baſe CE [f] vguale alla baſe BD; ſe ne leuino le vguali FC, FD, reſta FB vguale ad FE. Nel triangolo iſoſcele FCD, continuato il lato DF verſo B, l'angolo BFC [g] eſterno è vguale à i due angoli FCD, FDC, interni ed oppoſti: ma i due angoli FCD, FDC, furono dimoſtrati vguali, ſarà l'angolo BFC il doppio dell'angolo FCD; e perche l'angolo BCF fù dimoſtrato il doppio del medeſimo angolo FCD, ſarà l'angolo BFG vguale all'angolo BCF; dal che il lato BF [h] ſarà vguale al lato BC. Finalmente ſi conſiderino i triangoli FCD, BCD, de'quali l'angolo DBC è dimoſtrato vguale all'angolo FCD, e l'angolo FDC è commune, il rimanente angolo CFD [k] ſarà vguale al reſtante angolo BCD; i triangoli FCD, BCD, ſono equiangoli, e la propoſitione di BD à DC [l] ſarà come quella di CD à DF: ma CD è vguale al lato CB, ouero BF, ſarà BD à BF, come il medeſimo lato BF ad FD; per la qual coſa la retta BD, è diuiſa in F [m] ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte BF è vguale al lato BC. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che la retta CE è diuiſa in F, ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte FE è vguale al lato del pentagono, come fù propoſto dimoſtrare.



b 28. del 3.
c 33. del 6.
d 27. del 3
e 6. del 1.
f 4. del 1.
g 32. del 1.
h 6. del 1.
K 32. del 1.
l 4. del 6.
m 3. defin. del 6.

S C O L I O.

Facilmente dimoſtreremo col P. Clauio, che la retta, la qual e ſottende vn angolo del pentagono equilatero, ed equiangolo, è parallela al lato oppoſto à quell'angolo.

Perche antecedentemente ſi è dimoſtrato, che gli angoli DEC, DCE, ſono frà loro vguali, leuati da gli vguali angoli DEA, DCB, reſta l'angolo BCE, vguale all'angolo AEC, vgualmente ſe gli aggiunga l'angolo A, i due angoli BCE, BAE, ſaranno vguali à i due angoli BAE, CEA: ma nel quadrilatero BCEA iſcritto nel circolo, i due angoli oppoſti BAE, BCE, [a] ſono vguali à due angoli retti; i due angoli dunque BAE, CEA, [b] ſono vguali à due angoli retti, e perciò le rette BA, CE, ſono frà di loro parallele, ch'era da dimoſtrarſi.

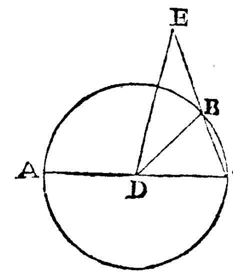
a 2. del 3.
b 28. del 1.

THEO-

THEOREMA IX. PROPOSITIONE IX.

Se al lato dell'eſagono s'aggiunge il lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo, tutta la retta compoſta ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la di cui maggior parte ſarà il lato dell'eſagono.

Nel circolo ABC ſia il lato del decagono iſcritto BC, il quale ſia continuato verſo E; ſi faccia BE [a] vguale al ſemidiametro del circolo ABC, ſarà BE [b] il lato dell'eſagono iſcritto nel circolo ABC. Dico che la retta EC è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in B, la di cui maggior parte è il lato BE dell' eſagono. Dal punto C, per il centro D del circolo, ſi faccia paſſare il diametro CA, e ſi tirino le rette DE, DB. Perche CB è lato del decagono, perciò ſottenderà la decima parte di tutta la circonferenza del circolo; cioè ſottenderà la quinta parte dell'arco ABC; per la qual coſa l'arco AB è il quadruplo dell'arco BC, e l'angolo ADB [c] ſarà il quadruplo dell'angolo BDC. In oltre perche le rette BD, BE, ſono frà di loro vguali, ſarà l'angolo BED [d] vguale all'angolo BDE. Nel triangolo EBD il lato EB è continuato in C, l'angolo eſterno CBD [e] è vguale à i due angoli BED, BDE, interni, ed oppoſti: ma i due angoli BED, BDE, ſono frà loro vguali, ſarà l'angolo DBC il doppio dell'angolo BED. E perche l'angolo DBC è vguale all'angolo DCB, ſtante che i lati DB, DC, [f] ſono frà loro vguali, l'angolo ancora DCB ſarà il doppio dell'angolo BED, e perciò i due angoli DBC, DCB, inſieme giunti, ſono il quadruplo dell'angolo E. Nel triangolo BDC il lato CD è continuato verſo A, dal che l'angolo eſterno ADB [g] ſarà vguale à i due angoli DBC, DCB: ma queſti ſono il quadruplo dell'angolo E, ſarà l'angolo ADB il quadruplo dell'angolo E: fù moſtrato l'angolo ADB eſſere il quadruplo dell'angolo CDB, l'angolo dunque CDB ſarà vguale all'angolo E. Si conſiderino i due triangoli DCB, DCE, de'quali l'angolo CDB è vguale all'angolo E, e l'angolo DCB è commune; i due angoli BCD, BDC, del triangolo BDC, ſaranno vguali à i due angoli DCE, DEC, del triangolo DCE, ed il rimanente angolo CBD [h] ſarà vguale al reſtante angolo CDE, per la qual coſa i triangoli DCB, DCE, ſono equiangoli, e la proportione di EC à CD [K] ſarà come quella di CD à CB; ma CD è vguale alla retta BD, cioè ad EB; ſarà dunque EC ad EB come la medeſima EB à BC; dal che la retta EC [l] è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, e la maggior parte è la retta BE, ch'è lato dell'eſagono, come fù propoſto dimoſtrare.



a 3. del 1.
b Corol. alla 15. del 4.
c 33. del 6.
d 5. del 1.
e 32. del 1.
f 5. del 5.
g 32. del 1.
h 32. del 1.
K 4. del 6.
l 3. defin. del 6.

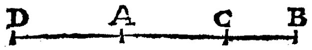
CO-

COROLLARIO I.

Essendosi dimostrato nello Scolio alla 5. propositione di questo, che se vna retta è diuisa secondo l'estrema, e media proportione, e dalla parte maggiore se ne detrae la minor parte, quella parte maggiore sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte è quella detratta; sarà manifesto, che se dal lato dell'esagono se ne detragga il lato del decagono, iscritto nel medesimo circolo, il lato dell'esagono sarà diuiso secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte sarà il lato del decagono.

COROLLARIO II.

Appare ancora, che se il lato del esagono è diuiso secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte sarà il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo.



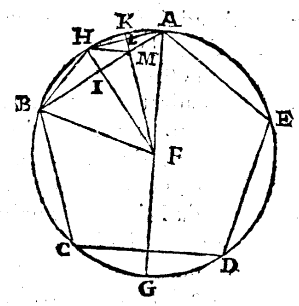
Sia AB il lato dell'esagono iscritto in qualche circolo, e la retta AB sia diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, in modo, che AC sia la maggior parte, ed alla retta AB sia aggiunta la retta AD, vguale ad AC, per la 5. di questo, sarà DB diuisa secondo l'estrema, e media proportione in A, e la maggior parte sarà AB, ch'è lato dell'esagono; e per l'antecedente propositione, la retta AD sarà il lato del decagono: ma AD è posta vguale ad AC, sarà dunque AC il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo, ch'è il nostro proposito.

THEOREMA X. PROPOSITIONE X.

Se nel circolo è iscritto vn pentagono equilatero, ed equiangolo, il quadrato del lato del pentagono, è vguale al quadrato del lato dell'esagono, col quadrato del lato del decagono, iscritti nel medesimo circolo.

Nel circolo ACD, il di cui centro F, sia iscritto il pentagono ABCDE equilatero, ed equiangolo. Dico che il quadrato del lato AB è vguale

al quadrato del lato del esagono, col quadrato del lato del decagono, iscritto nel medesimo circolo ACD. Dal punto A, per il centro F, si faccia passare il diametro AG del circolo, e si tiri la retta FB; sarà FB [a] vguale al lato dell'esagono iscritto nel medesimo circolo ACD; si diuida l'arco AB [b] in due parti vguali in H, e si tirino le rette FH, HB, HA, la retta FH segarà AB in qualche punto I. Perche l'arco AB, sotteso dal lato del pentagono, è il doppio dell'arco AH, la retta AH sarà il lato del decagono; si diuida l'arco AH [c] in due parti vguali in K, e si tiri la retta FK la quale segarà la retta AH in qualche punto L, e la retta BA in qualche punto M; si tiri la retta HM. Perche l'arco BH è vguale all'arco HA, sarà l'angolo BFH [r] vguale all'angolo HFA. Si considerino i due triangoli FIB, FIA. Perche i due lati BF, FI, sono vguali à i due lati AF, FI, e l'angolo BFI è vguale all'angolo AFI, sarà la base BI [d] vguale alla base AI, e gli angoli in I saranno retti. Similmente essendo l'arco HK vguale all'arco KA, nell'istesso modo si prouerà, che la retta HL è vguale alla retta LA, e che gli angoli in L sono retti. In oltre da gli vguali archi ABCG, AEDG (che sono circonferenze de i mezzi circoli) se ne detraggano gli vguali archi ABC, AED, resta l'arco CG vguale all'arco GD. E perche gli archi AB, CD, sono frà loro vguali, le loro metà, cioè gli archi CG, AH, sono frà di loro vguali: ma l'arco AH, per costruttione, è il doppio dell'arco HK, sarà l'arco CG il doppio dell'arco HK. Similmente perche l'arco AB è il doppio dell'arco BH, sarà l'arco CB il doppio dell'arco BH. Hor essendo l'arco CG il doppio dell'arco HK, e l'arco CB il doppio dell'arco BH, sarà tutto l'arco GB il doppio di tutto l'arco BK, e perciò l'angolo GFB [e] sarà il doppio dell'angolo BFK. E perche l'angolo GFB al centro è il doppio dell'angolo FAB [f] alla circonferenza, l'angolo dunque FAB sarà vguale all'angolo BFK. Si considerino i due triangoli ABF, FMB, de' quali l'angolo BFM è vguale all'angolo FAB, l'angolo FBM è commune ad ambidue, saranno i due angoli MFB, MBF, del triangolo FMB, vguali à i due angoli FAB, FBA, del triangolo BFA, ed il rimanente angolo FMB [g] sarà vguale al restante angolo BFA; dal che i triangoli FMB, FAB sono equiangoli, e sarà AB à BF [h] come la medesima BF ad MB, ed il rettangolo contenuto dall'estreme AB, BM, [K] sarà vguale al quadrato della media BF.

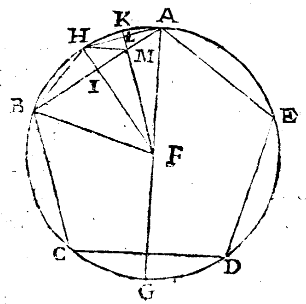


Di nuouo ne i triangoli ALM, HLM, angoli retti in L; essendo AL vguale ad LH, i due lati AL, LM, saranno vguali à i due lati HL, LM, gli angoli ALM, HLM, sono frà di loro vguali, sarà la base HM [l] vguale alla base AM, e gli angoli MAH, MHA, frà di loro vguali: ma l'angolo HAM [m] è vguale all'angolo HBM (stante che le rette HA, HB, sono frà di loro vguali) sarà l'angolo AHM vguale all'angolo HBA. Si considerino i due triangoli HMA, HBA, de' quali l'angolo HBA è vguale all'

a Corol. alla 15. del 4.
b 30. del 3.
c 30. del 3.
r 27. del 3.
d 4. del 1.
e 33. del 6.
f 20. del 3.
g 32. del 1.
h 4. del 6.
K 17. del 6.
l 4. del 1.
m 6. del 1.

angolo AHM, e l'angolo HAB è commune ad ambidue, ſarà il rimanente angolo AMH n vguale al reſtante angolo BHA; i triangoli HBA, HMA, ſono equiangoli, e la proportione di BA ad AH o ſarà come quella di AH ad AM, dal che il rettangolo contenuto dall'eſtreme BA, AM, p ſarà vguale al quadrato della media AH. Ma fù dimoſtrato il rettangolo contenuto dalle due AB, BM, eſſere vguale al quadrato di BF, i due rettangoli dunque, contenuti da BA, AM, e dalle due AB, BM, ſono vguali à i quadrati delle due BF, HA: ma i rettangoli contenuti da BA, AM, e dalle due AB, BM, q ſono vguali al quadrato di BA, ſarà al quadrato di BA vguale à i quadrati delle due BF, HA, cioè il quadrato di AB, lato del pentagono, è vguale al quadrato di BF, lato dell'eſagono, col quadrato di HA, ch'è il lato del decagono, come fù propoſto dimoſtrare.

n 32. del 1.
o 4. del 6.
p 17. del 6.
q 1. del 2.



C O R O L L A R I O I.

Appare da quel, che ſi è dimoſtrato, che quando vna retta, tirata dal centro d'vn circolo, diuide vn arco in due parti vguali, diuiderà ancora la retta, che ſottende quell' arco in due parti vguali, & ad angoli retti, ſtante che ſi è dimoſtrato, che la retta FH, la quale diuide l'arco BA in due parti vguali, diuide ancora la retta BA in due parti vguali, & ad angoli retti.

C O R O L L A R I O II.

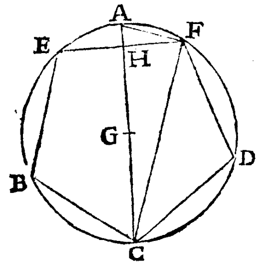
Eſſendoſi dimoſtrato, che la retta FG diuide l'arco CD in due parti vguali, per l'antecedente Corollario, diuide la retta CD in due parti vguali, & ad angoli retti. Dond'è manifeſto, che il diametro del circolo, tirato da vn angolo del pentagono, diuide il lato oppoſto in due parti vguali, & ad angoli retti, e diuide l'arco ſotteſo dal lato oppoſto in due parti vguali; & il medeſimo ſuccede in tutti i poligoni equilateri, ed equiangoli iſcritti nel circolo, quando ſono di lati di numero diſparo, il che tutto ſi dimoſtra nel modo ſudetto.

SCO-

S C O L I O I.

Quì facilmente ſi può dimoſtrare il ſeguente Theorema.

Il quadrato della retta, che ſottende l'angolo del pentagono, col quadrato del lato del medeſimo pentagono, è il quintuplo del quadrato del ſemidiametro del circolo, doue è iſcritto quel pentagono.



Nel circolo ABCD, il di cui centro G, ſia iſcritto il pentagono EBCDF, equilatero, ed equiangolo, e ſia tirata la retta CF, che ſottenda l'angolo CDF del pentagono; e dall'angolo C, per il centro G, ſi faccia paſſare il diametro CG, il quale continuato ſegarà il lato EF, per l'antecedente Corollario, in due parti vguali, & ad angoli retti, e ſegarà l'arco EAF in due parti vguali in qualche punto A. Dico che i quadrati delle rette CF, FE, giunti inſieme, ſono il quintuplo del quadrato del ſemidiametro GA. Si tiri la retta FA, e ſi dimoſtri, come ſi fece nell'antecedente propoſitione, che FA è lato del decagono iſcritto nel circolo ABCD. Perche AC è il doppio di AG, ſarà il quadrato di AC a il quadruplo del quadrato di AG: ma il quadrato di AC b è vguale à i quadrati delle rette CF, FA; i quadrati dunque delle rette CF, FA, ſaranno il quadruplo del quadrato di AG; à i quadrati delle due CF, FA, s'aggiunga il quadrato di AG, i quadrati delle tre CF, FA, AG, ſaranno il quintuplo del quadrato di AG: ma il quadrato di EF c è vguale à i quadrati delle due GA, AF, perciò i quadrati delle due CF, FE, ſono il quintuplo del quadrato di GA, come fù propoſto dimoſtrare.

a Scolio alla 4. del 2.
b 47. del 1.
c 10. del 13.

S C O L I O II.

Non ſarà inutile aggiungere quì quel, che Tolomeo ſpiega nella prima propoſ. del primo libro del ſuo Almageſto.

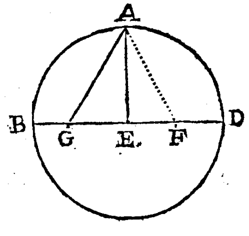
In vn dato circolo ritrouare il lato del decagono, e del pentagono iſcritto nel medeſimo circolo.

Sia il circolo dato ABCD, il di cui diametro BD, ed il centro E, nel quale ſia eleuata, la retta EA a perpendicolare al diametro BD; e ſi voglia ritrouare il lato del decagono, e del pentagono da iſcriuerſi nel medeſimo circolo ABCD. Si diuida il ſemidiametro ED b in due parti vguali in F, ſi tiri la retta FA, e ſi faccia FG c vguale ad FA; ſi tiri la retta GA. Dico che EG è il lato del decagono, e che la retta AG è il lato del pentagono. Perche la retta

a 11. del 1.
b 10. del 1.
c 3. del 1.

ta

ta DE è diuisa in due parti vguali in F, e gli è aggiunta la retta GE, il ret-
d 6. del 2. *tangolo contenuto dalle due DG,GE, col quadrato di EF,* [d] *è vguale al qua-*
drato di FG,cioè vguale al quadrato di FA;mà
e 47. del 1. *il quadrato di FA* [e] *è vguale à i quadrati de i due*
lati AE, EF, sarà il rettangolo contenuto dalle
due DG,GE,col quadrato di FE,vguale à i qua-
drati delle due AE, EF; se ne leui il commune
quadrato di EF, resta il rettangolo contenuto
dalle due DG, GE, vguale al quadrato di AE,
cioè vguale al quadrato di ED; e sarà GD à
f 17. del 6. *DE,* [f] *come la medesima DE ad EG; per la qual*
g 3. definit. del 6. *cosa la retta DG* [g] *è diuisa secondo l'estrema, e*
media proportione, e la maggior parte è il lato dell'esagono DE, e per la pro-
h 47. del 1. *pos. 9. sarà EG il lato del decagono. E perche il quadrato di GA* [h] *è vguale à*
i quadrati delle due AE, EG, essendo AE vguale al lato dell'esagono, ed EG
il lato del decagono, per la propositione 10. di questo, sarà AG il lato del pen-
tagono, ch'era da farsi, e dimostrarsi.



THEOREMA XI. PROPOSITIONE XI.

Se il diametro d'vn circolo è Rationale, il lato del pentagono equilatero, ed equiangolo, iscritto in quel circolo, e linea irrationale, ed è quella, che si chiama minore.

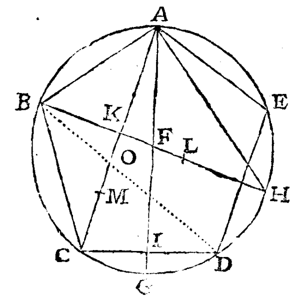
Habbia il circolo ACD il diametro Rationale, e nel circolo ACD,sia
iscritto il pentagono equilatero,ed equiãgolo ABCDE.Dico,che ciascun
lato,come AB è linea irrationale,ed è quella, che si chiama minore. Per
gli angoli B,ed A,e per il centro F,si facciano passare i diametri AG,BH,
e seghi AG il lato CD in qualche punto I, per il secondo Coroll.all'an-
tecedente propositione, la retta AG diuide l'arco CD in due parti vgua-
li in G, e diuide ancora la retta CD in due parti vguali, & ad angoli ret-
ti in I. Dal semidiametro FH se ne tagli la quarta parte FL, e dalla ret-
ta CA si tagli la quarta parte CM. Perche il diametro BH, per ipotesi,
a 6. definit. del 10. è Rationale, la sua metà BF, ouero FH, [a] che gli è commensurabile, è
b 6. definit. del 10. Rationale, e la retta FL, ch'è commensurabile ad FH, [b] sarà ancora Ra-
tionale; per la qual cosa tutta la composta BL, [c] che è commensurabile
c 16. del 10. all'vna, ed all'altra, sarà parimente Rationale.

Perche le rette BA, BC, per ipotesi, sono frà loro vguali, sarà l'arco
d 28. del 3. BC [d] vguale all'arco BA, e per il primo Coroll. all'antecedente propo-
sitione, la retta BH sega la retta CA in due parti vguali, & ad angoli
retti nel punto K. Si considerino i due triangoli AIC, AKF, angoli ret-
ti in I, & K, de'quali l'angolo CAI è commune, sarà il rimanente angolo
e 32. del 1. ACI [e] vguale al restante angolo AFK, dal che i triangoli ACI, AKF, so-
f 4. del 6. no equiangoli, e la proportione di IC à CA [f] sarà come quella di KF ad
g 16. del 5. FA; e permutando, sarà IC ad FK; [g] come CA ad FA, cioè come CA

ad FH:

adFH: ma CA ad FH è come la quarta parte di CA alla quarta parte
di FH, cioè come CM ad FL, sarà IC ad FK, [h] come CM ad FL, e per- h 11. del 5.
mutando, IC à CM [K] sarà come KF ad FL:e perche IC à CM è come il K 16. del 5.
doppio al doppio,cioè come DC à CK, sarà DC à CK [l] come KF ad FL; l 11. del 5.
componendo le due insieme DC, CK, à CK, [m] sarà come KL ad LF; ed m 18. del 5.
il quadrato della retta,composta delle due DC,CK, [n] al quadrato di CK, n 22. del 6.
sarà come il quadrato di KL al quadrato di LK.

Si tiri la retta BD, la quale segarà la retta AC in qualche punto O,per
l'8. propos. di questo, la retta AC sarà diuisa in O secondo l'estrema, e
media proportione, e la maggior parte OD [g] sarà vguale al lato CD del g 8. del 13.
pentagono. Hor se alla maggior parte DO, ouero DC, s'aggiunge la
metà di DB, cioè la metà di AC, ch'è la retta CK, il quadrato della retta
composta delle due DC, CK, per la 1.
propos. di questo, è il quintuplo del
quadrato di CK: ma il quadrato della
retta composta delle due DC, CK, al
quadrato di CK, si è dimostrato essere
come il quadrato di KL al quadrato di
LF; sarà il quadrato di KL il quintuplo
del quadrato di LF; cioè il quadrato di
KL al quadrato di LF, sarà come nume-
ro à numero, e perciò i quadrati delle
rette KL, LF, [o] sono commensurabili, o 6. del 10.
ed i loro lati KL, LF, saranno commen-
surabili almeno in potenza: ma LF fù dimostrata Rationale, sarà la retta
KL, [p] che gli è commensurabile, Rationale. p 6. definit. del 10.



In oltre, perche HF,ouero FB, è il quadruplo di FL, sarà BL il quintu-
plo di LF: mà il quadrato di KL fù dimostrato il quintuplo del quadra-
to di LF, sarà il quadrato di KL al quadrato di LF, [q] come BL ad LF;ed q 11. del 5.
inuertendo, il quadrato di LF al quadrato di LK [r] sarà come LF ad LB. r Corol. al la 4. del 5.
Si considerino tre quantità, la prima sia LF, la seconda LK,e la terza LB.
Perche il quadrato della prima LF al quadrato della seconda LK, è come
la prima LF alla terza LK, ed il quadrato di LF al quadrato di LK [t] hà t 20. del 6.
duplicata proportione, che la prima LF alla seconda LK; sarà la propor-
tione di LF ad LB duplicata di quella, che hà la prima LF alla seconda
LK; e perciò le tre quantità LF,LK,LB, sono continue proportionali; e
sarà BL ad LK,come LK ad LF,ed il quadrato di BL al quadrato di LK [u] u 22. del 6.
sarà come il quadrato di KL al quadrato di LF: ma il quadrato di KL è
il quintuplo del quadrato di LF, sarà il quadrato di BL il quintuplo del
quadrato di LK, e perciò il quadrato di BL al quadrato di LK, per lo
Scolio nel fine del 9. non è come numero quadrato à numero quadrato,
ed in conseguenza le rette BL, LK, [x] sono incommensurabili in lunghez- x 9. del 10.
za. E perche le rette BL,LK, furono dimostrate Rationali, saranno dun-
que le rette BL, LK, Rationali, commensurabili solamente in potenza.
Si che, detratta dalla Rationale BL, la Rationale KL,commensurabile so-
lamente in potenza, la rimanente BK [y] sarà irrationale, e sarà quella,che y 74. del 10.
si chiama Apotome, la di cui congruente è la retta KL. Dal quadrato

di BL

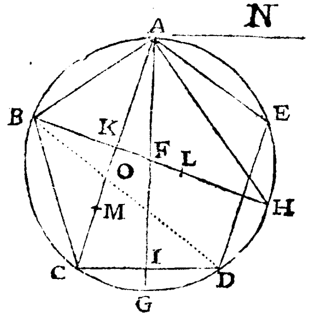
z Lem. dopo la 14. del 10. di BL se ne detragga il quadrato di KL, z ed il restante sia il quadrato della retta N. Perche il quadrato di BL è il quintuplo del quadrato di LK, detratto dal quadrato di BL la sua quinta parte, cioè il quadrato di LK, il rimanente, cioè il quadrato della retta N, sarà il quadruplo del LK, il rimanente, cioè il quadrato della retta N, sarà il quadruplo del LK di KL; e perciò di quelle parti, che il quadrato di BL è cinque quadrato della retta N sarà quattro; ed in conseguenza il quadrato di BL al quadrato di N, sarà come numero à numero: per la qual cosa i quadrati di BL, e di N, a sono commensurabili, ed i loro lati BL, ed N, sono commensurabili almeno in potenza. E perche la retta BL fù dimostrata Rationale, sarà ancora la retta N, b che gli è commensurabile, Rationale. In oltre, perche il quadrato di BL al quadrato della retta N, è come 5 à 4, per lo Scolio nel fine del 9, i quadrati delle due BL, ed N, non sono come numero quadrato à numero quadrato, e perciò le rette BL, ed N c sono incommensurabili in lunghezza: ma furono dimostrate Rationali, saranno le rette BL, ed N, Rationali, commensurabili solamente in potenza. Di più, essendo la Rationale BF commensurabile in lunghezza alla sua quarta parte FL, sarà tutta la composta BL d commensurabile in lunghezza ad FB: ma FB è commensurabile in lunghezza al suo doppio BH, sarà BL commensurabile in lunghezza alla Rationale BH. E perche il quadrato della Rationale BL supera il quadrato della congruente LK, per il quadrato della retta N, incommensurabile in lunghezza alla composta BL, essendo BL commensurabile in lunghezza alla Rationale BH, per la 4. delle terze definitioni del 10, la retta BK sarà quarta Apotome.

a 6. del 10.

b 6. definit. del 10.

c 9. del 10.

d 16. del 10.



e 31. del 3.

f 17. del 6.

Finalmente, perche l'angolo BAH e nel mezzo circolo è retto, e la retta AK è perpendicolare al diametro HB, per il Corollario all'8 del sesto, sarà AB media proportionale frà le due HB, BK, e sarà il quadrato di AB f vguale al rettangolo contenuto dalle due HB, BK. Hor essendo il quadrato della retta AB vguale al rettangolo contenuto dalla Rationale BH, e dalla quarta Apotome BK, per la 95 propos. del 10, la retta AB sarà quella retta, che si chiama Minore. Per la qual cosa supposto il diametro BH Rationale, il lato AE del pentagono iscritto nel circolo ABCD; sarà irrationale; ed è quella retta, che si chiama Minore, ch'era da dimostrarsi.

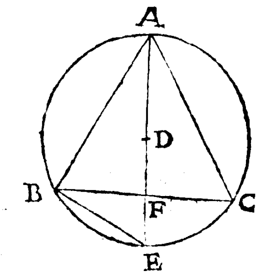
THEOREMA XII. PROPOSITIONE XII.

Il quadrato del lato del triangolo equilatero iscritto nel circolo, è il triplo del quadrato del semidiametro del medesimo circolo.

Nel circolo ABC sia iscritto il triangolo equilatero ABC. Dico che il quadra-

quadrato del lato AB è il triplo del quadrato del semidiametro del circolo ABC. Dall'angolo A, per il centro D, si faccia passare il diametro AE, il quale, per il Corollario 2. alla 10. propos. di questo, diuide l'arco BEC in due parti vguali in E, e diuide ancora la retta BC in due parti vguali, & ad angoli retti in F; si tiri la retta BE. Perche BC è lato del triangolo equilatero, perciò l'arco BEC, a che lo sottende, sarà la terza parte di tutta la circonferenza ABC, e l'arco BE sua metà sarà la sesta parte della medesima circonferenza; per la qual cosa la retta BE, che sottende la sesta parte della circonferenza ABEC, sarà il lato dell'esagono; e per il Coroll. alla 15. prop. del quarto, sarà BE vguale al semediametri ED. E perche l'angolo ABE, nel semicircolo ABC, b è retto, sarà il quadrato di AE c vguale à i quadrati de i due lati AB, BE: ma il quadrato di AE, per lo scolio alla 4. del 2. è il quadruplo del quadrato di ED, cioè il quadruplo del quadrato di BE, i quadrati delle due AB, BE, saranno il quadruplo del quadrato di BE. Per la qual cosa il quadrato di AB sarà il triplo del quadrato di BE: ma BE è vguale al semidiametro DE, sarà il quadrato del lato AB il triplo del quadrato del semidiametro DE, ch'era da dimostrarsi.

a 28. del 3.



b 31. del 3.

c 47. del 1.

COROLLARIO I.

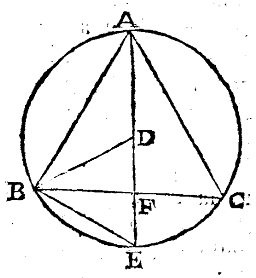
Da quel che s'è detto è manifesto, che il quadrato del diametro del circolo è nella proportione sesquitertia al quadrato del lato del triangolo equilatero, iscritto in esso circolo.

Poiche essendosi dimostrato, che il quadrato del lato AB è il triplo quadrato del semidiametro AD, supposto che il quadrato di AB, sia 3, sarà il quadrato di AD 1; ma il quadrato del diametro AE è il quadruplo del quadrato di AD, se il quadrato di AD è 1, sarà il quadrato di AE 4, e perciò il quadrato del diametro AE al quadrato di AB sarà come 4 à 3, cioè nella proportione sesquitertia, come si disse.

COROLLARIO II.

E' ancora manifesto, che il lato BC, del triangolo equilatero ABC, diuide il semidiametro DE in due parti vguali in F.

Si



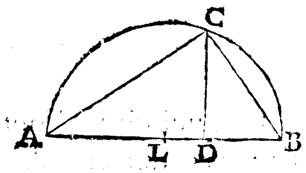
Si tiri la retta DB. Eſſendoſi dimoſtrato BE eſſere lato dell'eſagono, ſarà BE vguale al ſemidiametro BD; e perche gli angoli in F ſono retti, ſarà il quadrato di BD [a] vguale à i quadrati de i due lati BF, FD; e ſimilmente il quadrato di BE è vguale à i quadrati de i due lati BF, FE; ma BD è dimoſtrato vguale al lato BE, i quadrati de i due lati BF, FD, ſaranno vguali à i quadrati de i due lati BF, FE; ſe ne leui il cõmune quadrato di BF, reſta il quadrato di FD vguale al quadrato di FE, e la retta DF ſarà vguale alla retta FE, ch'era da dimoſtrarſi.

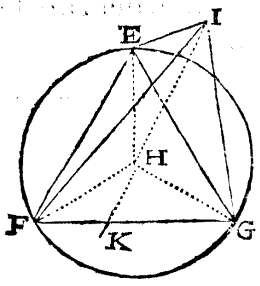
a 47. del 1.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE XIII.

Coſtruire il tetraedro; e comprenderlo nella data sfera, e dimoſtrare, che il quadrato del diametro della data sfera è in proportione ſeſquialtera al quadrato del lato del tetraedro coſtrutto.

Sia AB il diametro della data sfera, ſopra il quale ſi deſcriua il mezzo circolo ACB; ſi faccia BD vguale alla terza parte di AB, e nel punto D ſi eleui la retta DC [a] perpendicolare ad AB, concorrẽte con la circonferenza in qualche punto C; ſi tirino le rette AC, CB; ſi prenda poi la retta HE vguale alla retta CD, e fatto centro in H, coll'interuallo EH, ſi deſcriua il circolo EFG; nel quale [b] s'iſcriua il triangolo equilatero EFG; ſi tirino le rette HF, HG; ſarà HF, ouero HG, vguale ad EH, cioè vguale alla retta CD. Nel punto H ſi eleui la retta HI [c] perpendicolare al piano EFG, gli angoli IHE, IHF, IHG [d] ſaranno retti. Si faccia HI [e] vguale ad AD, e ſi tirino le rette IE, IF, IG. Dico che il ſolido contenuto da i quattro triangoli IEF, IFG, IGE, EFG, è quella piramide, ò tetraedro, che ſi è propoſto fare. Si conſiderino i due triangoli ADC, IHE. Perche i lati IH, HE, per coſtruttione, ſono vguali à i due lati AD, DC, e gli angoli IHE, ADC, ſono frà loro vguali, ſtante che ſono retti, ſarà la baſe AC [f] vguale alla baſe IE. Nell'iſteſſo modo, conſiderando i triangoli ADC, IHF, IHG, ſi dimoſtrerà, che ciaſcuno de i lati IF, IG, è vguale ad AC, e perciò i tre lati IE, IF, IG, ſono frà di loro vguali. In oltre per il Coroll. all'8. prop. del 6. la retta CD è media proportionale frà le due AD, DB, e per il Lem. 8. dopo la 18. del 6, la prima AD alla terza DB hà duplicata proportione





a 11. del 1.
b 2. del 4.
c 12. del 11.
d 3. definit. del 11.
e 3. del 1.
f 4. del 1.

di quella, che hà la prima AD alla ſeconda DC: ma il quadrato di AD al quadrato di CD [g] hà la medeſima duplicata proportione di quella, che hà AD à DC, ſarà il quadrato di AD al quadrato di DC, [h] come AD à DB; e componendo, i quadrati delle due AD, DC, [K] giunti inſieme, cioè il quadrato di AC al quadrato di CD ſarà come AB à BD: ma AB, per coſtruttione, è il triplo di BD, ſarà il quadrato di AC il triplo del quadrato di CD: fù fatta EH vguale à CD, ſarà il quadrato di AC, cioè il quadrato di IE, il triplo del quadrato di EH: ma per l'antecedente propoſ. il quadrato del lato EF è il triplo del medeſimo quadrato di EH, ſarà il quadrato di IE vguale al quadrato di EF, e la retta IE vguale alla retta EF: ma le rette IE, IF, IG, ſono frà di loro vguali, e ſono ancora vguali le tre EF, FG, GE, ſaranno le rette IE, IF, IG, GE, EF, FG frà di loro vguali; dal che i quattro triangoli IEF, IFG, IGE, EFG, ſono equilateri, e frà di loro vguali, ed il ſolido IEFG per la 26. defin. dell'11, è Tetraedro. Dico che la piramide, ò Tetraedro, IEFG, il di cui vertice I, e la baſe EFG, è quella, che ſi comprende nella data sfera; e che il quadrato del diametro AB è ſeſquialtero al quadrato del lato EF.

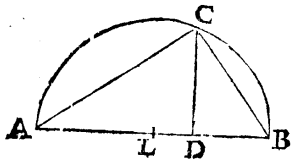
Si continui la perpendicolare IH verſo K, e ſi faccia HK [l] vguale alla retta DB; ſarà tutta IK vguale ad AB. Perche l'angolo IHE è retto, ſarà la retta EH [m] perpendicolare alla retta IK: ma le tre rette IH, HE, HK, per coſtruttione, ſono vguali alle tre rette AD, DC, DB, e queſte ſono continue proportionali; le tre rette ancora IH, HE, HK, ſaranno continue proportionali; dal che il rettangolo contenuto dalle due IH, HK, [n] ſarà vguale al quadrato della perpendicolare HE; e per lo Scolio alla 17. propoſ. del 6, il punto E è nella circonferenza di quel circolo, del quale IK è diametro. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il punto F, come ancora il punto G, è nella circonferenza di quel circolo, del quale IK è diametro. Se dunque ſi concepiſce IK come Aſſe della sfera, ed intorno ad eſſo s'intenda circonuoluto il ſemicircolo, che paſſa per i punti I, E, K, la circonferenza di quello paſſerà per i punti G, ed F, e ſarà deſcritta la sfera, il di cui diametro IK è vguale al diametro AB della data sfera, per la qual coſa la sfera deſcritta comprende il coſtrutto Tetraedro.

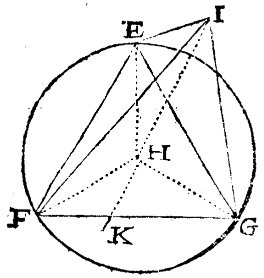
Finalmente, perche AB, per coſtruttione, è tripla alla retta BD, di quelle parti, che AB è 3, la retta DB ſarà 1, e la retta AD ſarà 2, dal che BA ad AD ſarà come 3 à 2, cioè ſarà nella proportione ſeſquialtera. Di più, perche AC, per il Coroll. all'8. prop. del 6, è media proportionale frà le due BA, AD, hauerà la prima BA alla terza AD [o] duplicata proportione di quella, che hà la prima BA alla ſeconda AC: ma il quadrato di BA al quadrato di AC [p] hà la medeſima duplicata proportione, che hà BA ad AC, ſarà il quadrato di BA al quadrato di AC, [q] come BA ad AD: fù dimoſtrata BA eſſere nella proportione ſeſquialtera ad AD, ſarà il quadrato di AB ſeſquialtero al quadrato di AC. E perche IK è vguale ad AB, ed il lato EF è dimoſtrato vguale ad AC, ſarà il quadrato di IK ſeſquialtero al quadrato di EF. Per la qual coſa il quadrato del diametro della data sfera è nella proportione ſeſquialtera al quadrato del lato della piramide coſtrutta IEFG, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

g 20. del 6.
h 11. del 5.
K 18. del 5.
l 3. del 1.
m 3. definit. del 11.
n 17. del 6.
o Lem. 8. dopo la 18. del 6.
p 20. del 6.
q 11. del 5.

COROLLARIO I.

Dal quel che si è detto è manifesto, che il quadrato del diametro della detta sfera è nella proportione quadrupla sesquialtera al semidiametro del circolo circoscritto intorno la base della costrutta piramide.





Poiche essendo il quadrato del diametro IK, ouero AB, nella proportione sesquialtera al quadrato del lato EF, di quelle parti, che il quadrato di IK è 9, il quadrato di EF sarà 6, ed il quadrato di EH sarà 2, (stante che il quadrato di EF è triplo al quadrato di EH,) e perciò di quelle parti, che il quadrato di IK, ouero AB, è 9, il quadrato di EH sarà 2: ma la proportione di 9 à 2 è quadrupla sesquialtera, sarà la proportione del quadrato di AB al quadrato di EH quadrupla sesquialtera, come si disse.

COROLLARIO II.

Appare ancora, che la retta LD, tirata dal centro della sfera perpendicolare al piano della base della piramide, ch'è quel piano, che passa per la retta DC, e fà angoli retti con AD, è la sesta parte di tutto il diametro AB, cioè la terza parte del semidiametro LB. Perche AB è tripla alla retta BD, di quelle parti, che AB è 6, la retta BD sarà 2, e la retta BL 3, dal che DL sarà 1, e perciò AB sarà sestupla ad LD, ed LB sarà tripla ad LD, come si disse.

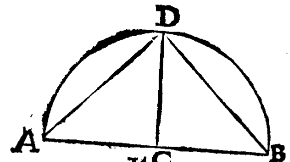
COROLLARIO III.

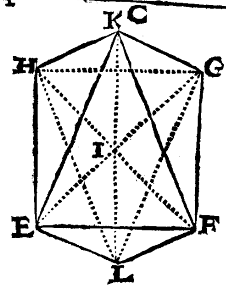
Dalla costruttione è similmente manifesto, che l'altezza del Tetraedro è due terzi del diametro della sfera, che lo contiene, e di quelle parti, che il quadrato del diametro

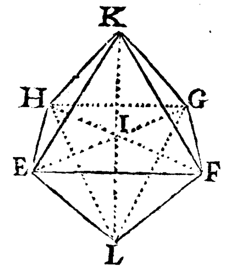
metro è 9, il quadrato dell'altezza perpendicolare del detto Tetraedro è 4.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XIV.

Costruire l'Ottaedro, e comprenderlo nella sfera, e dimostrare, che il quadrato del diametro della sfera è il doppio del quadrato del lato dell'Ottaedro costrutto.

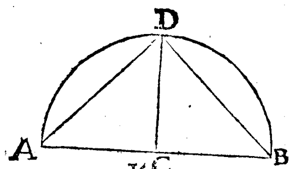


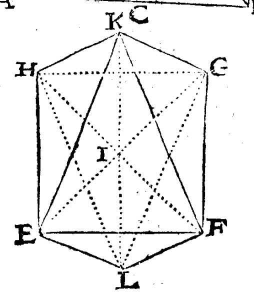


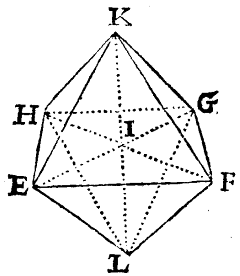


Sia AB il diametro della data sfera, diuiso in due parti vguali in C, e fatto centro in C, coll'interuallo CA, ouero CB, sia descritto il mezzo circolo ADB; nel punto C, sia eleuata la retta CD [a] perpendicolare ad AB, e si tirino le rette DB, DA; poi si espon- a 11. del 1.
ga la retta EF vguale alla retta DB, e sopra la retta EF [b] si descriua il quadrato EFGH; b 46. del 1.
si tirino le diagonali GE, HF, le quali si segaranno scambieuolmente in qualche punto I; se intorno al quadrato HEFG fosse circoscritto vn circolo, le rette IG, IH, IE, IF, sarebbero semidiametri di quel circolo, e perciò sono frà di loro vguali. Nel punto I si eleui la retta IK [c] perpendicolare al piano c 12. del 11.
HEFG, la quale si continui sotto al piano HEFG verso L, e tanto IK, come IL, [d] si faccia vguale ad IH; d 3. del 1.
si tirino le rette KH, KG, KE, KF, LF, LE, LG, LH. Dico che il solido contenuto da gli otto triangoli KHE, KEF, KFG, KGH, LFE, LFG, LGH, LHE, è l'Ottaedro proposto. Perche i lati GI, IH, del triangolo GIH, sono vguali à i due lati HI, IE, del triangolo HIE, e la base HG è vguale alla base HE, sarà l'angolo GIH [e] e 8. del 1.
vguale all'angolo HIE, e perciò gli angoli GIH, HIE, sono retti. Similmente perche la retta KI è perpendicolare al piano HEFG, gli angoli KIH, KIG, KIF, KIE [f] sono retti. Si considerino i due f 3. defin. del 11.
triangoli HGI, HIK. Perche IK, è vguale ad IH, ouero IG, i due lati HI, IG, saranno vguali à i due lati HI, IK; gli angoli HIG, HIK, sono frà di loro vguali, stante che sono retti, sarà la base HG [g] vguale alla base HK. g 4 del 1.
Nell'istesso modo si dimostrerà, che il medesimo lato HG è vguale al lato GK, per la qual cosa il triangolo KHG è triangolo equilatero. E procedendosi col medesimo ordine, si prouerà, che tutti gli altri triangoli, sopra nominati, sono equilateri; e perche ogn'vno di quei triangoli hà per base vn lato del quadrato EFGH, essendo i lati del quadrato frà di loro

vguali, tutti i lati de i detti triangoli equilateri ſaranno frà di loro vguali, ed in conſeguenza eſſi triangoli equilateri ſono frà di loro vguali; e per la defin. 27. dell'11, il ſolido contenuto da i detti otto triangoli equilateri, ed vguali, è Ottaedro. Dico che l'Ottaedro coſtrutto ſi comprende nella sfera, il di cui diametro è AB; e che il quadrato del diametro AB è il doppio del quadrato del lato KH, ouero KG &c.







Perche le tre rette LI, IH, IK, ſono, per coſtruttione, frà loro vguali, ſarà LI ad IH come IH ad IK, ed il rettangolo contenuto
h 17. del 6. dalle due LI, IK, [h] ſarà vguale al quadrato di IH: e perche la retta IH fà angoli retti colla retta KL, per lo Scolio alla 17. del 6, il punto H è nella circonferenza di quel circolo, il di cui diametro è la retta KL. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà che gli altri angoli G, F, E, ſono nelle circonferenze di quei circoli, che hanno per diametro la retta KL. Inteſa dunque la retta KL come aſſe della sfera, intorno al quale ſi muoua il mezzo circolo LHK, fin che torni nel luogo d'ond'è partito, la circonferenza di quello paſſerà per li punti G, F, E; per la qual coſa l'Ottaedro coſtrutto ſi cōtiene nella sfera deſcritta. Si conſiderino i due triangoli HIG, DCB, angoli retti in I, & C, ſarà il
K 47. del 1. quadrato di DB [K] vguale à i quadrati de i lati DC, CB, ed il quadrato di HG è vguale à i quadrati de' lati HI, IG: ma i lati HG, DB, per coſtruttione, ſono frà loro vguali, perciò i quadrati de i lati HI, IG, ſaranno vguali à i quadrati de i lati DC, CB, e le loro metà, cioè i quadrati delle rette HI, CD, ſono frà di loro vguali; ed in conſeguenza la retta IH ſarà vguale alla retta CD, ouero CB: furono fatte le rette IK, IL, ogn'vna vguale ad IH; ſarà tutta l'aſſe KL vguale al dato diametro AB; per la qual coſa l'Ottaedro coſtrutto è iſcritto nella data sfera.

Finalmente perche gli angoli in C ſono retti, ed i lati CB, BD, ſono v-
l 4. del 1. guali à i due lati CD, CA, ſarà la baſe DB [l] vguale alla baſe DA. E per-
m 31. del 3. che l'angolo ADB [m] nel mezzo circolo è retto, il quadrato di AB [n] ſarà
n 47. del 1. vguale à i quadrati de i due lati DB, DA: ma queſti ſono frà loro vguali, in conſeguenza il quadrato di AB ſarà il doppio del quadrato di DB. E perche AB è vguale all'aſſe KL della sfera, ed il lato DB è vguale ad HG, ouero HK, cioè vguale al lato dell'Ottaedro, ſarà il quadrato di KL, diametro della sfera, il doppio del quadrato del lato HK dell'Ottaedro coſtrutto, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

CO-

COROLLARIO I.

Perche gli angoli KIH, KIE, HIF, ſono, per quel che ſi è dimoſtrato, retti, ſarà manifeſto, che nell'Ottaedro tutte le diagonali ſi ſegano ſcambieuolmente ad angoli retti nel centro della sfera, che lo contiene, ed in conſeguenza i tre piani HEFG, KELG, KHLF, che paſſano per quelle diagonali; ſi ſegano ſcambieuolmente ad angoli retti, e la loro commune ſettione ſarà la retta KL; ed eſſendo li angoli LEK, LGK [o] ne i ſemicircoli, che hanno per diametro o 31. del 3.
EK, ſaranno perciò retti, ed il quadrilatero KELG (i di cui lati ſono i medeſimi lati vguali dell'ottaedro) ſarà quadrato, e per ſimile ragione il quadrilatero KHLF è quadrato; d'onde appare, che li tre quadrilateri HEFG, KELG, KHLF, ſono figure quadrate vguali frà di loro.

COROLLARIO II.

E ancora manifeſto, che ogn'vno di quei quadrati diuide l'Ottaedro in due piramidi di baſi quadrangolari, ſimili, ed vguali.

Poiche il quadrato HEFG diuide l'Ottaedro nelle due piramidi KHEFG, LFGHE, i di cui vertici ſono in L, & K, e la baſe commune è il medeſimo quadrato HEFG. Similmente il quadrato KHLF diuide l'ottaedro nelle due piramidi ELFKH, GFLHK, ed il quadrato KELG, lo diuide nelle due piramidi FGKEL, HELGK. E queſte piramidi ſono frà loro ſimili, ed vguali, ſtante che ſono contenute da triangoli equilateri, ed vguali, ed hanno per baſi vguali figure quadrate.

COROLLARIO III.

Perche dunque i quadrati, de' quali ogn'vno diuide l'ottaedro in due piramidi vguali, ſono tre ſoli, ſarà manifeſto, che l'ottaedro è diuiſo da quei tre quadrati in ſei vguali piramidi di baſi quadrangolari, due delle quali, preſe in qualunque modo, compongono tutto l'ottaedro.

COROLLARIO IV.

Se concepiremo iſcritti nella medeſima sfera il Tetrae-

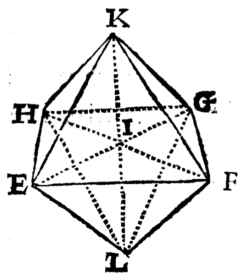
dro,

dro, e l'Ottaedro, il quadrato del lato dell'Ottaedro sarà in sesquitertia proportione al quadrato del lato del Tetraedro.

Poiche essendo il quadrato del diametro della sfera nella proportione sesquialtera al quadrato del lato del Tetraedro, di quelle parti, che il quadrato del diametro della sfera è 6, il quadrato del lato del Tetraedro sarà 4. Similmente perche il quadrato del diametro della sfera è duplo al quadrato del lato dell'Ottaedro, di quelle parti, che il quadrato del diametro della sfera è 6, il quadrato del lato dell'Ottaedro sarà 3. D'ond'è manifesto, che di quelle parti, delle quali il quadrato del lato del Tetraedro è 4, il quadrato del lato dell'Ottaedro sarà 3, e perciò sono nella proportione sesquitertia.

COROLLARIO V.

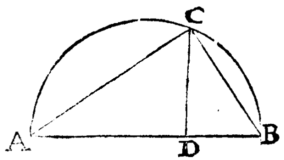
Nel quadrato HEFG il lato HG è parallelo all'opposto lato EF, e nel quadrato HLFK il lato HK è parallelo all'opposto LF, dal che i due lati KH, HG, sono paralleli à i due lati EF, FL, ed in conseguenza il piano KHG è parallelo al piano ELF; ed arguendosi nell'istesso modo per gli altri, sarà manifesto, che nell'Ottaedro i piani de i triangoli opposti sono frà loro paralleli.

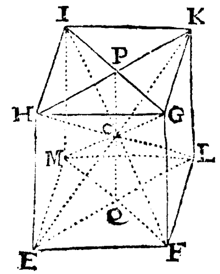


PROBLEMA III. PROPOSITIONE XV.

Costruire il Cubo, e comprenderlo nella data sfera, e dimostrare, che il quadrato del diametro della sfera è triplo al quadrato del diametro del Cubo.

Sia AB il diametro della data sfera, intorno al quale sia descritto il mezzo circolo ACB. Si faccia BD la terza parte di AB, sarà AD il
a 11. del 1. doppio di DB; nel punto D si eleui la retta DC a perpendicolare ad AB, e si tirino le rette CB, CA, si esponga poi la retta EF vguale alla retta
b 46. del 1. CB; sopra la retta EF b si descriua il quadrato EFGH; ne i punti E, F,
c 12. del 11. G, H, si eriggano le rette HI, EM, FL, GK, c perpendicolari al piano
d 3. del 1. EFGH, ed ogn'vna d vguale alla retta CB, saranno frà di loro vguali, e saran-





saranno ancora vguali à i lati del quadrato EFGH; si tirino le rette IK, KL, LM, MI. Perche le rette GKHI, sono perpendicolari al piano EFGH, perciò sono e frà loro parallele, e le rette IK, HG, saranno frà loro vguali, e parallele; si che il quadrilatero IHGK è parellelogrammo, e per la 34. del 1, i lati, ed angoli opposti, sono frà di loro vguali; cioè l'angolo IHG sarà vguale all'angolo IKG, e l'angolo KGH vguale all'angolo KIH; ma gli angoli KGH, IHG, sono retti, gli angoli dunque GKI, HIK, sono retti. Ed essendo i lati KG, GH, HI, frà di loro vguali, ed il lato HG f vguale al lato IK, i quattro lati IH, HG, GK, KI, sono frà di loro vguali: gli angoli IHG, HGK, GKI, KIH, sono stati dimostrati retti, e perciò il quadrilatero IHGK è quadrato. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutti gli altri piani EG, EL, LI, IE, KF, che contengono il solido IEFK sono quadrati; E perche sono eretti sopra gli vguali lati HE, EF, FG, GH, perciò sono frà di loro vguali, ed ogn'vno sarà vguale al quadrato IMLK, il quale g è simile, ed vguale all'opposto HEFG. Per la qual cosa il solido costrutto IEFH è Cubo. Dico che il Cubo IEFK è vguale à quello, che si può iscriuere nella sfera, il di cui diametro è AB. Ne i piani opposti HK, EL, si tirino i diametri HK, IG, EL, MF. Perche le due HE, KL, sono vguali, e parallele alla retta GF, saranno h frà loro vguali, e parallele, e perciò le due KH, LE, k sono frà loro vguali, e parallele, ed il quadrilatero HELK è parallelogrammo; Nell'istesso modo si dimostrerà, che il quadrilatero IMFG è parallelogrammo. E perche ogn'vno de i piani HELK, IMFG, l diuide il Cubo IEFK in due parti vguali, perciò ambidue per il Corol. alla 39. prop. del 11. passano per il centro del Cubo IEFK; come per esempio per il punto O, e tirate le diagonali KE, IF, HL, GM, queste, per il citato Corollario si segano scambieuolmente in due parti vguali nel centro O. In oltre ne i quadrati EG, GL, gli angoli GFE, GFL, sono retti, e per ciò la retta GF m è perpendicolare al piano EFLM, e l'angolo GFM sarà retto; per la qual cosa il parallelogrammo IMFG è rettangolo. Si considerino i due triangoli GFM, IMF; essendo i due lati GF, FM, vguali à i due lati IM, MF, e gli angoli GFM, IMF retti, cioè vguali, sarà la base IF n vguale alla base MG, e considerando il rettangolo HELK, nell'istesso modo si dimostrerà, che i diametri KE, HL, sono frà di loro vguali. Di nuouo si considerino i triangoli KLE, IMF. Perche il lato EL, come diametro del quadrato MEFL, è vguale ad MF, ed il lato KL è vguale ad IM, i due lati KL, LE, saranno vguali à i due lati IM, MF; li angoli KLE, IMF, sono vguali, stante che sono retti, sarà la base IF o vguale alla base EK; per la qual cosa i diametri EK, IF, HL, GM, sono frà di loro vguali; E per

e 6. del 11.
f 34. del 1.
g 24. del 11.
h 9. del 11.
K 33. del 1.
l 28. del 11.
m 4. del 11.
n 4. del 1.
o 4. del 1.

per quel che si è detto, i semidiametri OK, OI, OH, OE, OF, OL, OG, OM, sono frà di loro vguali, ed i punti I,H,M,L,F,G, p sono nelle circonferenze di quei circoli, che hanno per diametro la diagonale EK: si che, presa EK come Asse della sfera, intorno alla quale s'intenda muouersi il mezzo circolo, che hà per diametro la medesima retta EK, fin che ritorna nel luogo d'ond'è partito, la superficie sferica, che descriuerà, passerà per gli angoli H,I,M,L,F,G, ed il Cubo IEFG sarà iscritto nella sfera costrutta.

p Scol. alla 15. del 6.

Di più, perche l'angolo EFL è retto, sarà il quadrato di EL q vguale à i quadrati de i due lati EF,FL; ma i lati EF,FL, sono frà loro vguali, sarà il quadrato di EL, il doppio del quadrato di FL, cioè il doppio del quadrato di LK, dal che i quadrati delle due EL,LK, insieme giunti, sono il triplo del quadrato di LK. Nel triangolo KLE, angolo retto in L, il quadrato di EK r è vguale à i quadrati de i due lati EL, LK: ma i due quadrati di EL,LK, sono il triplo del quadrato di LK, sarà il quadrato di EK il triplo del quadrato di LK, cioè il triplo del quadrato di EF: ma EF è è vguale alla retta CB, sarà il quadrato di EK il triplo del quadrato de CB. Di nuouo perche l'angolo ACB t nel mezzo circolo è retto, per il Corollario all'8. prop. del 6, la retta CB sarà media proportionale frà le due AB,BD, ed hauerà AB, à BD u duplicata proportione di quella, che hà AB à BC: ma il quadrato di AB al quadrato di BC x hà la medesima duplicata proportione di quella, che hà AB à BC sarà il quadrato di AB al quadrato di BC y come AB à BD: fù fatta, per costruttione la retta AB il triplo di BD, sarà il quadrato di AB il triplo del quadrato di CB: ma per quel che si è dimostrato, il quadrato di EK è il triplo del quadrato della medesima CB, il quadrato dunque di EK sarà vguale al quadrato di AB, e la retta EK sarà vguale alla retta AB. Per la qual cosa la sfera descritta intorno al diametro EK, è vguale alla sfera, che si descriue intorno al dato diametro AB, e perciò il Cubo IEFK è quello, ch'è contenuto dalla sfera, il di cui diametro è AB. Finalmente essendosi dimostrato, che il quadrato di EK è il triplo del quadrato di EF, sarà dunque il quadrato del diametro della sfera triplo al quadrato del lato del Cubo iscritto, il che era da farsi, e dimostrarsi.

q 47. del 1.

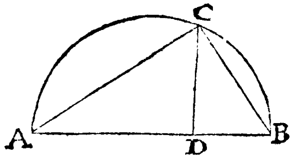
r 47. del 1.

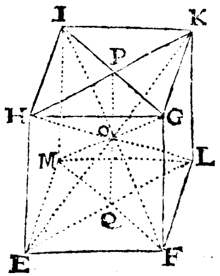
t 31. del 1.

u Lem.8. dopo la 18. del 6.

x 10. del 6.

y 11. del 5.





COROLLARIO I.

Essendo la retta PQ cõmune settione de i piani HELK, IMFG, quella, per la 39. propos. dell'11. è diuisa dalla diagonale IF in due parti vguali in O; dal che OP, sarà vguale

ad

ad OQ. E perche i punti P, & Q, sono i centri de i quadrati IHGK, MEFL, perciò la retta QP, che congiunge i centri degli opposti quadrati, passa per il centro del Cubo, dou'è diuisa da i diametri del Cubo in due parti vguali. Sarà dunque manifesto, che nella figura Cuba la retta tirata dal centro del quadrato al centro del quadrato opposto, passa per il centro del Cubo, nel quale è diuisa da i diametri di esso Cubo in due parti vguali, ed oltre à ciò tutt'i diametri del Cubo si diuidono scambieuolmente in due parti vguali nel medesimo centro.

COROLLARIO II.

Da quel che si è dimostrato appare, che il quadrato del diametro della sfera è vguale al quadrato del lato del Tetraedro, col quadrato del lato del Cubo, iscritto nella medesima sfera.

Il che è chiaro, considerando il mezzo circolo ACB, doue la retta AC, per la costruttione del Tetraedro, è vguale al lato del Tetraedro descritto nella sfera, il di cui diametro sia AB, e la retta CB, per l'antecedente propos. è il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera. E perche il quadrato di AB è vguale à i quadrati delle due rette AC, CB, sarà il quadrato del diametro della sfera vguale à i due quadrati, cioè vno è il quadrato del lato del Tetraedro, e l'altro è il quadrato del lato del Cubo iscritto nella medesima sfera.

Oltre à ciò, essendo le rette HE, KL, IM, GF, perpendicolari al piano MEFL, i piani HELK, IMFG, a saranno perpendicolari al piano MEFL, e la loro commune settione PQ b sarà perpendicolare al medesimo piano MEFL. Nell'istesso modo si prouerà, che la retta OP è perpendicolare al piano IHGK; e perche i punti P, Q, sono i centri de i quadrati IHGK, MEFL, perciò la retta QP, che congiunge i centri degli opposti quadrati, passa per il centro del Cubo, dou'è diuisa da i diametri del Cubo in due parti vguali. Sarà dunque manifesto, che nella figura Cuba, la retta, che passa per il centro di vno de i quadrati, ed è perpendicolare al medesimo quadrato, continuata concorre col diametro del Cubo nel centro del medesimo Cubo, doue tutti i diametri di esso Cubo si diuidono scambieuolmente in due parti vguali. E perche la retta PQ è vguale, e parallela ad EH, la sua metà OQ, ouero OP, sarà vguale alla metà del lato HE del Cubo; dal che sarà ancora manifesto, che la retta tirata dal centro del Cubo al centro d'vno de i quadrati, è vguale alla metà del lato del Cubo.

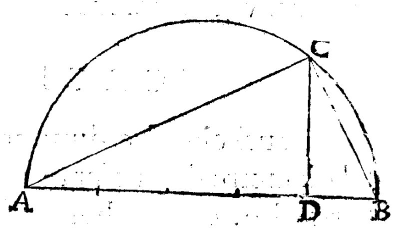
a 8. del 11.

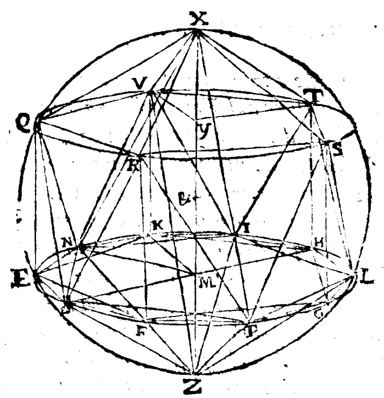
b 19. del 11.

PROBLEMA IV. PROPOSITIONE XVI.

Coſtruire l'Icoſaedro, e comprenderlo nella ſfera, che contiene le altre figure antedette, e dimoſtrare, che il lato dell'Icoſaedro è linea Irrationale, ed è quella, che ſi chiama Minore.

Sia AB il diametro della data ſfera, intorno al quale ſia deſcritto il
mezzo circolo ACB; ſi faccia BD la quinta parte di AB, ſarà AB il quin-
a 11. del 1. tuplo di BD, nel punto D ſi eleui la retta DC a perpendicolare ad AB, e
ſi tiri la retta CB. Sia poi eſpoſto il circolo EFLK, il di cui ſemidiame-
tro MH, ouero MO, ſia vguale
b 11. del 4. alla retta CB; e nel circolo EFLK
ſia iſcritto b il pentagono EFG
HK equilatero, ed equiangolo; ſi
c 30. del 3. diuidano gli archi EF, FG, GH,
HK, KE, c in due parti vguali ne i
punti O, P, L, I, N, e ſi tirino le
rette EO,OF,FP,PG,GL,LH,HI,
IK,KN,NE. Perche la retta OP
è lato del pentagono iſcritto, ſarà
l'arco OP la quinta parte di tutta
la circonferenza EFGHK, e la
metà, cioè l'arco FP, ſarà la deci-
ma parte della medeſima circon-
ferenza; per la qual coſa la retta
FP ſarà lato del decagono. Nell'
iſteſſo modo ſi prouerà, che ogn'
vna delle rette PG, GL, LH, HI,
IK, KN, NE, EO, OF, è lato del
decagono. Negli angoli del pen-
tagono iſcritto, cioè ne i punti
d 12. del 11. E,F, G, H, K, ſi erigano le rette
EQ, FR,GS,HT,KV, d perpendi-
colari al piano del circolo EFG
HK, ciaſcuna delle quali ſi faccia vguale al ſemidiametro MH, del circo-
lo EFGHK, e ſi tirino le rette QR,RS,ST,TV,VQ. Perche le rette QE,
e 6. del 11. RF,SG,TH,VK, ſono perpendicolari al piano EFGHK, perciò ſono e frà
di loro parallele; fù fatta ogn'vna di eſſe vguale al ſemidiametro MH, per-
ciò ſono frà di loro vguali, e parallele, e per la 33. propoſ. del 1. queſte,
che congiungono gli eſtremi, ſono frà di loro vguali, e parallele; per la
qual coſa le rette RQ,QV,VT,TS,SR, ſono vguali, e parallele alle corri-
ſpondenti FE,EK,KH,HG,GF; e per la 10. propoſ. del 11, l'angolo QRS
è vguale all'angolo EFG, l'angolo RST è vguale all'angolo FGH, l'ango-
lo STV vguale all'angolo GHK, l'angolo TVQ vguale all'angolo HKE,
e l'angolo VQR vguale all'angolo KEF: dal che il poligono QRSTV



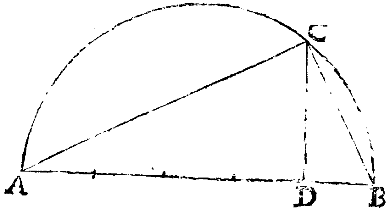


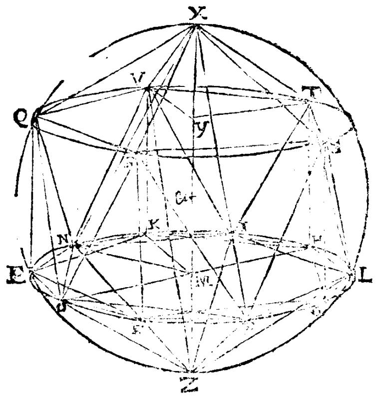
ſarà

ſarà equilatero, ed equiangolo al poligono EFGHK: ma il poligono
EFGHK, per coſtruttione, è pentagono equilatero, ed equiangolo, ſarà
il poligono RSTVQ pentagono equilatero, ed equiangolo. Da i punti
O,P,L,I,N, à i punti R,S,T,V,Q, ſi tirino le rette OQ, OR, PR, PS, LS,
LT,IT,IV,NV,NQ. Nel triangolo RFP, angolo retto in F, il quadrato
di RP è vguale à i quadrati de due lati RF,FP: ma RF f è vguale al ſemi- f 47. del 1.
diametro MH, cioè è lato dell'eſagono iſcritto nel circolo EFGHK, e la
retta FP, per quel che ſi è dimoſtrato, è lato del decagono iſcritto nel
medeſimo circolo; ſarà per la 10. propoſ. di queſto, la retta RP il lato
del pentagono iſcritto nell'iſteſſo circolo EFGHK. Nell'iſteſſo modo,
conſiderando il triangolo RFO, angolo retto in F, del quale RF è lato
dell'eſagono, ed FO è lato del decagono, ſi dimoſtrerà, che il lato RO è
lato del pentagono; ed argumentandoſi nel medeſimo modo, ſi prouerà,
che ogn'vna dell'altre rette PS,LS,LT, IT, IV, NV, NQ, OQ, è lato del
pentagono equilatero, ed equiangolo, iſcritto nel circolo EFGHK, e
perciò ſono frà di loro vguali; ed ogn'vna è vguale à ciaſcun lato del
pentagono EFGHK, ed ancora vguale à ciaſcun lato del pentagono
QRSTV; per la qual coſa i dieci triangoli QOR,ROP, RPS, SPL, SLT,
TLI, TIV, VIN, NVQ, NQO, ſono equilateri, ed vguali frà loro. Nel
centro M ſi eleui la retta MX g perpendicolare al piano EFGHK, la qua- g 12. del 11.
le ſi continui verſo Z; ſi faccia MY vguale ad MH, cioè vguale al lato
dell'eſagono, e ſi faccia YX, come ancora MZ, vguale al lato del decago-
no, cioè vguale alla retta FP. Si tirino le rette XT,XS,XR,XQ,XV,VY,
TY; e ſi tirino parimente le rette ZO,ZP,ZL,ZI,ZN, MK, MN. Perche
le rette MY, HT, ſono perpendicolari al piano EFLK, perciò h ſono pa- h 6. del 11.
rallele; ma ſono ancora vguali, ſtante che ogn'vna è vguale ad MH, in K 33. del 1.
conſeguenza le rette YT, MH, K che congiungono gli eſtremi, ſono frà
loro vguali, e parallele; ed eſſendo MH lato dell'eſagono, ſarà ancora YT
lato dell'eſagono iſcritto nel medeſimo circolo. In oltre perche YT è pa-
rallela ad MH, l'angolo XYT l ſarà vguale all'angolo YMH: ma l'ango- l 29. del 1.
lo YMH è retto, ſtante che XM m è perpendicolare al piano EFLK, l'an- m 3. definit. del 11.
golo dunque XYT ſarà ancora retto, ed il quadrato di XT n ſarà vguale n 47. del 1.
à i quadrati de i due lati XY, YT: fu dimoſtrata la retta YT eſſere lato
dell'eſagono, e la retta XY, per coſtruttione, è lato del decagono, per la
10. propoſ. di queſto, XT ſarà lato del pentagono iſcritto nel medeſimo
circolo. Nell'iſteſſo modo, conſiderando il triangolo XYV, angolo ret-
to in Y, ſi dimoſtrerà, che XV è lato del pentagono. E col medeſimo
modo d'argumentare, ſi prouerà, che ciaſcuna delle rette XQ, XR,XS, è
lato del pentagono iſcritto nel medeſimo circolo EFLK. E perche le ret-
te QR,RS,ST,TV,VQ, ſono ancora lati del pentagono iſcritto nel circo-
lo QRSTV, ouero EFGH, tutti i lati dunque de i cinque triangoli XQR,
XQS,XST,XTV,XVQ ſono frà di loro vguali, ed i detti cinque trian-
goli ſono equilateri, ed vguali. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che i cin-
que triangoli OZP,PZL,ZLI,ZIN,ZNO, ſono equilateri, ed vguali. E
perche le baſi di queſti triangoli ſono i lati del pentagono EFGHK, e le
baſi de i triangoli XQR,XRS,XST,XTV, XVQ, ſono i lati del pentago-
no QRSTV; eſſendoſi dimoſtrati i lati del pentagono QRSTV vguali a i

 lati

lati del pentagono EFGHK, saranno tutti i venti triangoli, che contengono il solido XQZLS, frà di loro vguali, ed equilateri, e per la 19. definit. del 11, il solido XQEZL sarà Icosaedro. Dico ch'è quello, che si comprende nella sfera data, e che ciascun lato di esso Icosaedro è linea Irrationale, ed è quella, che si chiama Minore.





Si tiri la retta XO. Essendo il punto M centro del circolo EFLK, sarà MN vguale ad MH, ouero MY, cioè ogn'vna sarà il lato dell'esagono; ma YX, per costruttione, è lato del decagono, sarà MX composta del lato dell'esagono, e del lato del decagono iscritto nel medesimo circolo; e per la 9. propos. di questo, la retta MX sarà diuisa secondo l'estrema, media proportione nel punto Y, la di cui maggior parte
o 3. definit. del 6.; sarà MY; dal che XM ad MY [o] sarà come MY ad YX; ma MY è vguale ad MN, e la retta MZ è vguale ad YX, sarà XM ad MN, come la medesima MN ad MZ; ed il rettangolo contenuto dalle due
p 17. del 6. XM, MZ, [p] sarà vguale al quadrato della media MN. E perche la retta MN fà angoli retti con XZ, stante che XM è perpendicolare al piano EFLK, per lo Scolio alla 17. propositione del 6, il punto N è nella circonferenza di quel circolo, che hà per diametro la retta XZ. Similmente essendo ZM lato del decago-
q 9. del 13. r 5. defin. del 6. no, e la retta MY lato dell'esagono, sarà ZY [q] diuisa secondo l'estrema, e media proportione, e sarà ZY ad YM, [r] come YM ad MZ.
t 6. del 11. In oltre, perche le rette YM, VK, sono perpendicolari al piano EFLK, perciò sono frà loro parallele: ma sono, per costruttione,
u 33. del 1. vguali, per essere ciascuna vguale ad MH, sarà VY [u] vguale, e paral-
x 29. del 1. lela ad MK, e sarà l'angolo VYX [x] vguale all'angolo KMY; fù dimostrato l'angolo KMY retto, l'angolo dunque VYX sarà retto. E perche MK è lato dell'esagono, sarà ancora VY lato del esagono iscritto nel medesimo circolo EFLK; per la qual cosa YV sarà vguale ad YM: e perche si è dimostrato, che ZY ad YM è come YM ad MZ, essendo MY vguale ad YV, e la retta MZ vguale ad YX, sarà ZY ad YV, come la medesi-
y 17. del 6. ma YV ad YX, ed il rettangolo contenuto dalle due ZY, YX, [y] sarà vguale al quadrato di YV, e per lo Scolio alla 17. del 6, il punto V è nella circonferenza di quel circolo, del quale ZX è diametro. Nell'istesso modo si dimostrerà, che ciascuno degli altri angoli Q, R, S, T, O, P, L, I, è nel-

la

la circonferenza di quel circolo, del quale è diametro la medesima retta ZX. Si che presa ZX come Asse della sfera, intorno al quale si concepisca muouersi il semicircolo, che passa per li punti ZNX, sin che ritorna nel luogo, donde parti, la superficie sferica, che descriuerà, passerà per
tutti gli angoli del costrutto Icosaedro. Si diuida MY [z] in due parti vgua- z 10. del 1.
li in &. Perche XY è vguale ad MZ sarà &X vguale ad &Z, dal che XZ
alla sua metà X& [a] sarà come MY ad Y&; e permutando, XZ ad YM [b] fa- a 15. del 5.
rà come X& ad &Y, ed il quadrato di XZ al quadrato di MY, [c] sarà b 16. del 5.
come il quadrato di X& al quadrato di &Y. c 12. del 6.
In oltre, perche MX è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in Y, e la maggior parte è MY, aggiunta alla minor parte XY la metà della maggior parte YM, ch'è Y&, per la 3. propos. di questo, il quadrato di X& sarà il quintuplo del quadrato di &Y. E perche il quadrato di X& al quadrato di &Y è come il quadrato di XZ al quadrato di MY, essendo il quadrato di X& il quintuplo del quadrato di &Y, sarà il quadrato di XZ il quintuplo del quadrato di MY, ouero di MH, che gli è vguale: ma MH è fatta vguale alla retta CB, sarà il quadrato di ZX il quintuplo del quadrato di CB. Nel triangolo ACB, angolo retto in C, essendo CD perpendicolare ad AB, per il Corollario all'8. del 6, la retta CB è media proportionale frà
le due AB, BD, e sarà il quadrato di AB al quadrato di CB, [d] come la d Lem. 8. dopo la 18. del 6. & 20. del 6.
prima AB alla terza BD: ma AB, per costruttione, è il quintuplo di BD, sarà il quadrato di AB il quintuplo del quadrato di CB; fù dimostrato il quadrato di ZX essere il quintuplo del quadrato di CB, sarà il quadrato di ZX vguale al quadrato di AB, e la retta ZX vguale alla retta AB; per la qual cosa il costrutto Icosaedro si comprende nella data sfera, cioè è iscritto nella data sfera.

Finalmente dico, che il lato dell'Icosaedro è quella linea irrationale, che si chiama Minore. S'intenda diuiso il diametro XZ della sfera, in
quante parti vguali si vogliono, sarà ZX [e] quella retta, che chiamiamo e 5. definit. del 10.
Rationale, rispetto alla quale si farà la comparatione del lato dell'Icosaedro. Hor perche il quadrato di ZX è il quintuplo del quadrato di MY, sarà il quadrato di ZX al quadrato di MY, come numero à numero, cioè come 10. à 2, ouero come 25. à 5, e perciò i quadrati di XZ, &
YM, [f] sono commensurabili, e le rette XZ, YM, saranno commensura- f 6. del 10.
bili almeno in potenza; ma XZ è supposta Rationale, sarà MY, [g] che g 6. defin. del 10
gli è commensurabile, Rationale: fù fatta MY vguale ad MH, sarà dunque MH Rationale, ed il suo doppio, cioè OH, sarà ancora Rationale. Nel circolo EFLK, il di cui diametro OH Rationale, è iscritto il pentagono equilatero EFGHK, per l'11. propos. di questo, ciascuno de suoi lati è irrationale, ed è quella linea, che si chiama Minore: ma il lato del pentagono iscritto nel circolo EFLK è l'istesso, che il lato del icosaedro costrutto, sarà il lato del costrutto icosaedro linea irrationale, e sarà quella, che si chiama Minore, come fù proposto fare, e dimostrare.

COROLLARIO I.

Da quel che si è dimostrato è manifesto, che il quadra-

to

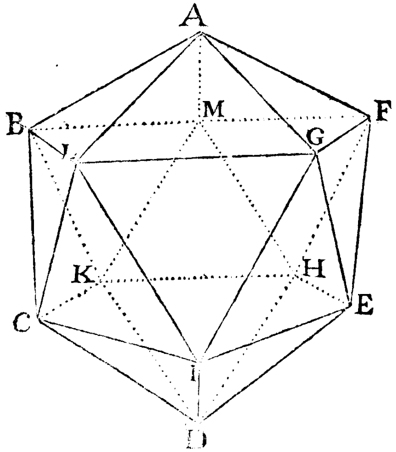
to del diametro della sfera, che comprende l'Icosaedro, è il quintuplo del quadrato del semidiametro di quel circolo, la di cui circonferenza passa per cinque angoli dell' Icosaedro, stante che si è dimostrato, che il quadrato di ZX è il quintuplo del quadrato di MH.

COROLLARIO II.

Appare ancora, che il diametro della sfera, che contiene l'Icosaedro, è composto del lato dell'esagono, e del doppio lato del decagono iscritto nel circolo, la di cui circonferenza passa per cinque angoli di esso Icosaedro.

SCOLIO.

Gli angoli solidi dell'Icosaedro sono dodeci, come appare nella costruttione antecedente, e perciò dodeci piramidi, di basi pentagonali, si possono considerare nell'icosaedro, le quali hanno i vertici in essi angoli; come per esẽpio le piramidi collaterali sono le sei notate ABLGFM, FAGEHM, EFGIDH, DEHKCI, CDILBK, BCKMAL, i di cui vertici sono i punti A, F, E, D, C, B, e le basi sono i pentagoni BLGFM, AGEHM, FGIDH, EHKCI, DILBK, CKMAL, e dell'altre sei tre riguardano la parte, che si mostra à noi, i di cui vertici sono i punti L, I, G, e le basi sono i pentagoni BCIGA, LCDEG, ALIEF, e le altre tre, che sono dalla parte nascosta à noi, hanno i vertici ne i punti M, K, H, e le basi sono i pentagoni ABKHF, BCDHM, DEFMK. E per l'auuenire, quando si dirà il pentagono dell'icosaedro, douremo intendere vno degli antedetti pentagoni.

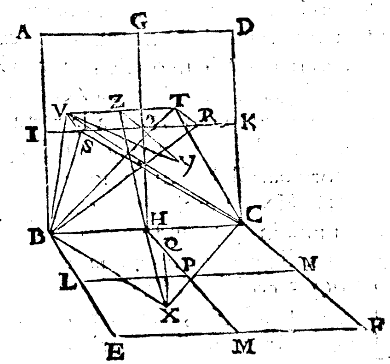


PROBLEMA V. PROPOSITIONE XVII.

Costruire il Dodecaedro, e comprenderlo nella sfera, che contiene l'antedette figure, e dimostrare, che il lato del Dodecaedro è linea Irrationale, che si chiama Apotome.

Sia

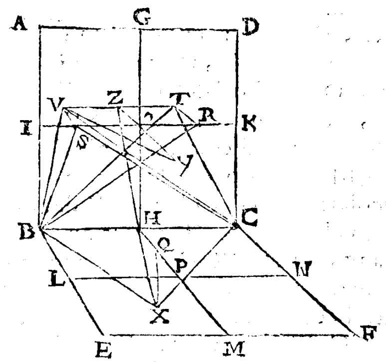
Sia il quadrato ABCD vna base del Cubo, che si comprende nella data sfera, e sia perpendicolare all'vguale quadrato BEFC, in modo, che la commune settione de i piani BD, BF, sia lato commune di ambidue i quadrati BD, BF; si diuidano tutti i lati de i quadrati BD, BF, a in due parti vguali ne i punti G, I, H, K, L, M, N, e frà i punti opposti si tirino le rette GH, IK, LN, HM, le quali si segaranno ne i centri, O, & P, de i quadrati BD, BF, come appare nell'8. propos. del 4. Si seghino poi le rette OI, OK, HP, b secondo l'estrema, e media proportione, ne i pũti Q, R, S, e le parti maggiori siano le rette PQ, OR, OS; poi ne i punti Q, R, S, fuori del Cubo AEFD, si eriggano le rette RT, SV, QX, c perpendicolari à i piani BD, BF, in modo, che le perpendicolari RT, SV, cadano di là dal quadrato BD è la perpendicolare QX sotto al quadrato BF, si facciano queste perpendicolari vguali alle parti maggiori PQ, OR, OS, e si tirino le rette TV, TC, CX, XB, BV. Dico prima, che il pentagono VBXCT è vno di quei dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli del Dodecaedro da costruirsi. Si tirino le rette SB, SC. Essendo VS perpendicolare al piano BD, gli angoli VSB, VSC, d saranno retti. Perche la retta OI è diuisa secondo l'estrema, e media proportione in S, e la parte maggiore è la retta OS, i quadrati delle due OI, IS, e sono il triplo del quadrato di OS: ma OI è vguale ad IB, i quadrati dunque delle due BI, IS, sono il triplo del quadrato di SO; fù fatta SV vguale ad OS, saranno i quadrati delle due BI, IS, il triplo del quadrato di SV. E perche nel triangolo BIS, angolo retto in I, il quadrato di BS f è vguale à i quadrati delle due BI, IS, in conseguenza il quadrato di BS sarà il triplo del quadrato di SV, ed i quadrati delle due BS, SV, giunti insieme, saranno il quadruplo del quadrato di SV. Ma nel triangolo BSV, angolo retto in S, il quadrato di BV g è vguale à i quadrati delle due BS, SV, sarà il quadrato di BV il quadruplo del quadrato di SV; e per lo Scolio alla 4. del 2, la retta BV è il doppio della retta SV. In oltre, perche le rette VS, TR, sono perpendicolari al piano BD, perciò h sono frà di loro parallele; sono ancora vguali frà loro (stante che sono vguali alle vguali rette SO, OR) le rette dunque SV, RT, sono frà loro vguali, e parallele; dal che le rette VT, SR, K sono frà loro vguali, e parallele: ma RS è il doppio di SO, cioè di SV, sarà VT il doppio di SV; per la qual cosa il lato VT sarà vguale ad VB. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri lati TC, CX, XB, sono frà loro vguali, ed ogn' vno è vguale ad VT, ouero VB, e perciò il pentagono VBXCT è equilatero.



a 10. del 1.
b 30. del 6.
c 12. del 11.
d 3. definit. del 11.
e 4. del 13.
f 47. del 1.
g 47. del 1.
h 6. del 11.
K 33. del 1.

Di nuouo, perche il piano AC, per ipotesi, è perpendicolare al piano

l 4. definit. del 11. no BF, perciò la retta OH, ch'è perpendicolare alla retta BC, l farà per-
pendicolare al piano BF: ma la retta XQ, per costruttione, è perpendi-
m 6. del 11. colare al medesimo piano BF, le rette dunque OH, XQ, m sono frà di
loro parallele. Similmente, perche il piano BF fà angoli retti col piano
BD, e la retta MH è perpendicolare alla commune settione BC, sarà la
n 4. definit. del 11. retta MH n perpendicolare al piano BD. Dal punto O si tiri la retta
o 31. del 11. OZ o parallela ad SV, in modo, che cada dietro al quadrato BD, quella
concorrerà con VT in qualche punto Z. Essendo la retta SV perpendi-
p 8. del 11. colare al piano BD, la retta ZO, p che gli è parallela, sarà ancora per-
pendicolare al piano BD: ma la retta HM, ouero HQ, è dimostrata per-
q 6. del 11. pendicolare al medesimo piano BD, perciò le due rette OZ, HQ, q sono
frà di loro parallele. Si tirino le
rette ZH, HX. Perche la retta
HP è diuisa in Q, secondo l'estre-
ma, e media proportione, sarà
r 3. definit. del 6. HP à PQ, r come PQ à QH: ma
HP è vguale ad OH, e la parte
QP, per costruttione, è vguale
à QX, ed è ancora vguale ad OZ;
sarà OH ad OZ, come XQ à QH.
Si considerino i due triangoli
ZOH, HQX, che si toccano nell'
angolo H, la proportione di XQ
à QH è come quella di HO ad
OZ, ed i lati homologhi XQ,
HO, sono frà loro paralleli; co-



me anco sono paralleli gli homologhi QH, OZ; e per la 32. del 6, gli al-
tri due lati XH, HZ, costituiscono la sola retta linea ZHX. E perche le
t 2. del 11. rette ZX, BC, si segano nel punto H, perciò sono t in vn medesimo piano,
ed in conseguenza il pentagono equilatero VBXCT è in vn medesimo
piano; quale dico ch'è ancora equiangolo.

Si tirino le rette BT, BR. Perche la retta IO è diuisa secondo l'estre-
ma, e media proportione in S, la di cui maggior parte è OS, ch'è vguale
u 5. del 13. ad OR, sarà IR u diuisa secondo l'estrema, e media proportione in O, e
sarà IO la maggior parte, ed OR la minore; per la 4. propos. di questo,
i quadrati delle due IR, RO, insieme giunti, sono il triplo del quadrato di
IO, cioè il triplo del quadrato di IB: ma per costruttione RT è vguale
ad RO, i quadrati dunque delle due IR, RT, sono il triplo del quadrato
di IB; ed i quadrati di tutte tre le rette IR, RT, IB, saranno il quadruplo
del quadrato di IB. E perche nel triangolo BIR, angolo retto in I, i
x 47. del 1. quadrati delle due BI, IR, x sono vguali al quadrato di BR, i quadrati
delle due BR, RT, saranno il quadruplo del quadrato di IB. Nel trian-
y 3. definit. del 11. golo TRB l'angolo TRB y è retto, stante che la retta TR è perpendico-
z 47. del 1. lare al piano BD, e perciò il quadrato di BT, z è vguale à i quadrati del-
le due BR, RT: ma i quadrati delle due BR, RT, sono il quadruplo del
a Scol. alla 4. del 2. quadrato di IB; il quadrato dunque di BT sarà il quadruplo del quadra-
to di IB. E perche il quadrato di AB, ouero BC, a è il quadruplo del

mede-

medesimo quadrato di IB, sarà il quadrato di BC vguale al quadrato
di BT, e la retta BC sarà vguale alla retta BT. Nell'istesso modo, tira-
te le rette CS, CV, si dimostrerà, che la retta CV è vguale alla retta CB,
dal che le tre rette CV, CB, BT, sono frà di loro vguali. Si conside-
rino i due triangoli BXC, CTV, de quali i due lati BX, XC, sono vguali
à i due lati CT, TV, la base BC è dimostrata vguale alla base CV, sarà
l'angolo BXC b vguale all'angolo CTV: e considerando i triangoli CTV b 8. del 1.
TVB, nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo CTV è vguale all'an-
golo TVB. E perche nel pentagono equilatero VBXCT, i tre angoli
BXC, CTV, TVB, sono frà loro vguali; per la 7. propos. di questo, il
pentagono VBXCT sarà equiangolo. Tutto quello, che si è fatto nel la-
to BC, del Cubo EADF, si faccia in tutti gli altri vndici lati del medesi-
mo Cubo, e sarà fatto vn solido, contenuto da dodici pentagoni equila-
teri, ed equiangoli, quale douremo comprendere nella data sfera, e di-
mostrare, che il lato VB del Dodecaedro è linea irrationale, ed è quel-
la, che si chiama Apotome.

Si prolunghi la retta ZO verso Y. Perche la retta OY cade nel centro
O perpendicolarmente al quadrato BD, ch'è base del Cubo AEFD, per
il 1. Coroll. alla 15. propos. di questo, continuata concorre col diametro
del Cubo nel centro del medesimo Cubo, doue tutti i diametri di esso
Cubo si diuidono in due parti vguali. Si faccia OY vguale ad IO, e
si tiri la retta YV. Perche OY è vguale ad OI, e fù fatta OZ vguale ad
OR, sarà ZY vguale ad IR. E perche fù dimostrato, che i quadrati del-
le due IR, RO, sono il triplo del quadrato di IO, e la retta IR è vguale
ad YZ, saranno i quadrati delle due YZ, OR, il triplo del quadrato di IO:
ma OR è vguale ad OS, cioè ad VZ, i quadrati dunque delle due YZ, ZV,
saranno il triplo del quadrato di OI. In oltre, essendo le rette RT, VS,
vguali, e parallele, saranno le rette VT, SR, c frà di loro vguali, e pa- c 33. del 1.
rallele; dal che gli angoli SOZ, VZO, d sono vguali à due angoli retti: ma d 29. del 1.
l'angolo SOZ è retto, e stante che ZO è perpendicolare al piano BD, sa- e 3 definit. del 11.
rà l'angolo VZO ancora retto; e perciò nel triangolo YZV il quadrato di
VY f è vguale à i quadrati delle due YZ, ZV ma i quadrati delle due YZ, f 47. del 1.
ZV, sono il triplo del quadrato di IO, sarà il quadrato di YV il triplo del
quadrato di IO. E perche il quadrato del diametro della sfera g è il tri- g 15. del 13.
plo del quadrato dell'lato AB del Cubo iscritto nella medesima sfera, sa-
rà il quadrato della metà del diametro della sfera il triplo del quadrato
di IB, cioè del quadrato di OI: ma il quadrato di VY è ancora il triplo
del quadrato di IO, sarà VY la metà del diametro della sfera, nella qua-
le è iscritto il Cubo AEFD, ed il punto Y il centro della medesima sfera;
per la qual cosa il punto V è nella superficie della medesima sfera. Nell'
istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli B, X, C, T, come ancora i
rimanenti angoli del costrutto Dodecaedro, sono nella medesima superfi-
cie sferica; e perche il Cubo AEFD si suppone iscritto nella sfera data,
in conseguenza il Dodecaedro costrutto, sarà compreso, cioè iscritto nel-
la medesima sfera.

Finalmente, Dico che il lato del Dodecaedro è irrationale, ed è quella
linea, che si chiama Apotome. Perche il quadrato del diametro della

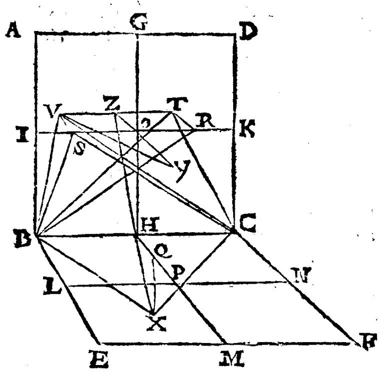
 sfera

sfera è triplo al quadrato del lato del Cubo iſcritto; perciò il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato del Cubo iſcritto, è come numero à numero, cioè come 6. à 2; per la qual coſa il diametro della sfera h è commenſurabile in potenza al lato del Cubo. Suppoſto dunque il diametro della sfera Rationale, ſarà il lato del Cubo K ancora Rationale. Di più, perche la retta IO è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la di cui maggior parte è SO, ſarà IO ad OS l come OS ad SI; e duplato il tutto, ſarà IK ad SR, come è SR alla retta compoſta delle due IS, RK. Se dunque il lato del Cubo, cioè IK, ch'è dimoſtrato Rationale, ſi diuide ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte ſarà RS, cioè VT, che gli è vguale; e per la 6. propoſ. di queſto, il lato VT del Dodecaedro è linea irrationale, che ſi chiama Apotome, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

h 6. del 10

K 6. defin. del 10.

l 3. defin. del 6.



COROLLARIO I.

Eſſendoſi dimoſtrato, che diuiſa IK ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte è la retta SR, ouero VT, e la minor parte è la compoſta delle due IS, RK, ſarà manifeſto, che diuidendoſi il lato IK del Cubo, ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte ſarà il lato VT del Dodecaedro iſcritto nella medeſima sfera.

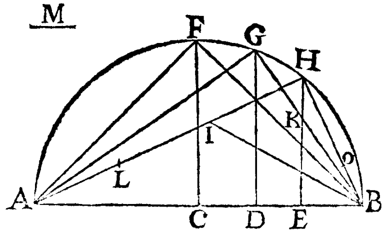
COROLLARIO II.

Appare ancora, che il lato del Cubo, cioè BC, ſottende l'angolo del pentagono, ch'è baſe del Dodecaedro iſcritto nella medeſima sfera. Oltre à ciò, perche il lato del Cubo, cioè BC, che ſottende l'angolo BXC del pentagono, ſe è diuiſo ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte è vguale al lato del pentagono, ed aggiungendo alla retta BC la detta maggior parte, tutta la compoſta ſarà diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione,

tione, di cui la maggior parte ſarà BC, ſarà manifeſto, che diuiſa qualunque retta linea ſecondo l'eſtrema, e media proportione, la maggior parte ſarà il lato del Cubo, e la minor parte il lato del dodecaedro iſcritto nella medeſima sfera, dou'è iſcritto il Cubo.

PROBLEMA VI. PROPOSITIONE XVIII.

Ritrouare i lati de i cinque corpi regolari, e compararli frà loro.



Sia AB il diametro della sfera diuiſo in modo, che BC ſia la metà di AB, la retta DB ſia la terza parte di AB, e la retta EB la quinta parte della medeſima AB: intorno al diametro AB ſia deſcritto il mezzo circolo AFB, ne i punti C, D, E, a ſiano eleuate le rette CF, DG, EH, perpendicolari ad AB, e ſi tirino le rette AF, AG, AH, BF, BG, BH; dalla retta AH ſe ne tagli la parte HI b vguale al lato del decagono iſcritto in quel circolo, del quale BH ſia ſemidiametro, cioè ſia lato dell'eſagono; ſi diuida BG c ſecondo l'eſtrema, e media proportione, come nel punto K, e ſia BK la parte maggiore. Dico prima, che AG è il lato della Piramide, ò Tetraedro, che AF è il lato dell'Ottaedro, la retta BG è il lato del Cubo, la retta BI è il lato dell'Icoſaedro, e la retta BK è il lato del Dodecaedro.

a 11. del 1.

b 3. del 1.

c 30. del 5.

Perche DB è la terza parte di AB, di quelle parti, che il diametro AB è 3, la retta DB ſarà 1, ed il rimanente AD 2; e perciò AB ad AD ſarà come 3. à 2, cioè nella proportione ſeſquialtera. In oltre perche l'angolo AGB d è retto, e la retta GD è perpendicolare ad AB, per il Corollario alla 8. del 6, ſarà AG media proportionale frà le due BA, AD, ed hauerà AB ad AD e duplicata proportione di quella, che hà AB ad AG: ma il quadrato di AB al quadrato di AG f hà la medeſima duplicata proportione, che AB ad AG, hauerà il quadrato di AB al quadrato di AG g l'iſteſſa proportione, che AB ad AD: ma AB è nella ſeſquialtera proportione ad AD, ſarà il quadrato di AB nella ſeſquialtera proportione al quadrato di AG. E perche il quadrato del diametro della sfera è nella ſeſquialtera proportione h al quadrato del lato del Tetraedro iſcritto nella medeſima sfera, eſſendo AB il diametro della sfera, ſarà AG il lato del Tetraedro iſcritto.

d 31. del 3.

e Lem. 8. dopo la 18. del 6.

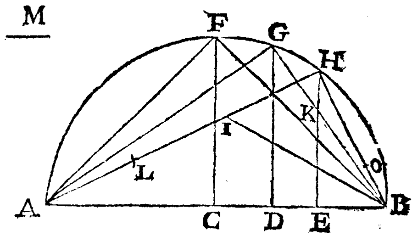
f 20. del 6.

g 11. del 5.

h 13. del 13.

Di nuouo, perche AF è media proportionale frà le due BA, AC, ſarà il quadrato di AB al quadrato di AF come AB ad AC; per coſtruttione AB è il doppio di AC, ſarà il quadrato di AB il doppio del quadrato

K 14. del 13. di AF: ma il quadrato del diametro della sfera K è il doppio del quadrato del lato dell'Ottaedro iſcritto, poſta AB diametro della sfera, ſarà AF il lato dell'Ottaedro iſcritto nella medeſima sfera.



In oltre, perche BG è media proportionale frà le due AB,BD, ſarà il quadrato di AB al quadrato di BG, come AB à BD: ma AB, per coſtruttione, è tripla à BD, ſarà il quadrato di AB triplo al quadrato di BG. E perche
l 15. del 13. il quadrato della sfera l è triplo al quadrato del Cubo iſcritto, ſe AB ſi prende come diametro della sfera, ſarà BG il lato del Cubo iſcritto nella medeſima sfera.

Parimente, eſſendo BH media proportionale frà le due AB, BE, ſarà AB à BE, come il quadrato di AB al quadrato di BH; ma AB, per coſtruttione, è il quintuplo di BE, ſarà il quadrato di AB il quintuplo del
m Corol. 1. alla 16. del 13. quadrato di BH. E perche il quadrato del diametro della sfera m è quintuplo al quadrato del ſemidiametro di quel circolo, che circonda il pentagono, ſopra il quale è deſcritto l'Icoſaedro, ſarà BH il ſemidiametro, ò lato dell'eſagono, iſcritto nel medeſimo circolo: fù fatta la retta HI, per coſtruttione, lato del decagono iſcritto in quel medeſimo circolo, i quadrati delle due BH, HI, inſieme giunti, ſaranno vguali al quadrato del lato del detto pentagono: ma il quadrato di BI è vguale à i quadrati delle due BH, HI, ſarà BI il lato di quel pentagono; e perche ogni lato di quel pentagono rappreſenta vn lato dell'icoſaedro, ſarà BI il lato dell' icoſaedro.

Finalmente, perche il lato BG del Cubo è diuiſo ſecondo l'eſtrema, e media proportione in K, per il primo Coroll. alla 17. propoſ. di queſto, la maggior parte BK ſarà il lato del Dodecaedro, e ſaranno eſpoſti i lati de i cinque corpi regolari iſcritti nella medeſima sfera, come fù propoſto.

Per la comparatione de i lati ritrouati ſi oſſerui il ſeguente modo. Perche s'è dimoſtrato, che il quadrato del diametro della sfera è ſeſquialtero al quadrato del lato dell'Tetraedro, ed è duplo al quadrato del lato dell'Ottaedro, e triplo al quadrato del lato del Cubo; di quelle parti, che il quadrato del diametro della sfera è 6, ſarà il quadrato del lato del Tetraedro 4, quello dell'Ottaedro 3, e quello del Cubo 2. D'ond'è manifeſto, che il quadrato del lato del Tetraedro è nella proportione ſeſquiterzia al quadrato del lato dell'Ottaedro, e dupla à quello del Cubo; ed il quadrato del lato dell'Ottaedro è nella proportione ſeſquialtera al quadrato del lato del Cubo; e perciò il quadrato del diametro della sfera, ed i quadrati de i lati di

Quadrato del Diametro della sfera	6
Tetraedro	4
Ottaedro	3
Cubo	2

a 6. del 10. eſſe figure, cioè del Tetraedro, Ottaedro, e Cubo, ſono come numero à numero, e perciò ſono frà loro a commenſurabili: per la qual coſa il diametro

metro della sfera, ed i lati del Tetraedro, Ottaedro, e Cubo, ſono commenſurabili in potenza; ſi che, ſuppoſto il diametro della sfera Rationale, i lati delle dette figure, cioè Tetraedro, Ottaedro, e Cubo, ſono Rationali. E perche i numeri 4, 3, 2, i quali ſono nelle proportioni de i quadrati de i lati di eſſe figure, b non ſono come numero quadrato à numero quadrato, perciò i lati di quelle figure c ſono ſolamente commenſurabili in potenza: ma furono dimoſtrate Rationali, perciò ſono Rationali, commenſurabili ſolamente in potenza. b Scolio nel fine del 9. c 9. del 10.

Del reſto i lati dell'Icoſaedro, e del Dodecaedro, in verun modo ſono frà loro commenſurabili; poiche ſe foſſero commenſurabili, eſſendo il lato del Dodecaedro Apotome, ſarà ancora d il lato dell'Icoſaedro Apotome; ed all'incontro eſſendo il lato dell'Icoſaedro quella linea, che ſi chiama minore, ſarebbe ancora e il lato del Dodecaedro linea minore, il che è impoſſibile, mentre l'Apotome, e la linea Minore ſono due linee irrationali f totalmente diuerſe. d 104. del 10. e 106. del 10.

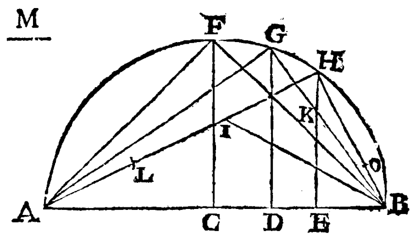
Benche i lati de i primi tre corpi regolari coſtrutti ſiano Rationali, e frà loro commenſurabili in potenza, e commenſurabili ancora in potenza al diametro della sfera, alla quale s'intendono iſcritti, ed i lati dell'altre due, cioè dell'Icoſaedro, e del Dodecaedro ſono linee irrationali, ed incommenſurabili in lunghezza, e potenza, con tutto ciò ritengono queſta diſpoſitione; cioè il lato del Tetraedro è maggiore del lato dell'Ottaedro, il lato dell'Ottaedro è maggiore del lato del Cubo, il lato del Cubo è maggiore del lato dell'Icoſaedro, ed il lato dell'Icoſaedro è maggiore del lato del Dodecaedro, cioè ſi ſuperano col medeſimo ordine, col quale ſono ſtati coſtrutti. f 112. del 10

Il tutto è noto dalla coſtruttione de i lati, poiche il lato AG del Tetraedro ſottende maggior arco di quello, che ſottende il lato AF dell' Ottaedro, e perciò AG è maggiore di AF. Di più il lato BF dell'Ottaedro ſottende maggior arco di quello, che ſottende BG, ch'è lato del Cubo, e perciò il lato dell'Ottaedro è maggiore del lato del Cubo. Che poi il lato BG del Cubo ſia maggiore del lato BI del Icoſaedro, ſi dimoſtra in queſto modo.

Si faccia come AB à BD, così BD ad vn altra, che ſia M. Perche AB è il triplo di BD, perciò BD ſarà il triplo di M, e tutta AB ſarà il nonuplo della retta M, ma AB ad M è come il quadrato di AB al quadrato di BD, eſſendo AB nonupla alla retta M, ſarà il quadrato di AB nonuplo al quadrato di BD. Poſto dunque il quadrato di BD come vnità, ſarà il quadrato di AB 9; e perche il quadrato di AB al quadrato di BG è come AB à BD, ſarà il quadrato di AB il triplo del quadrato di BG. Se il quadrato di AB l'intenderemo diuiſo in 9 parti vguali, ſarà il quadrato di BG 3 di quelle parti, che il quadrato di AB è 9; e perche il quadrato di GB g è vguale à i quadrati delle due GD, DB, i quadrati delle due GD, DB, giunti inſieme, ſaranno 3 di quelle parti, che il quadrato di AB è 9. Se dunque ſe ne leua il quadrato di BD, ch'è vna di quelle 9. parti, reſta il quadrato di GD vguale à 2 di quelle 9. parti. In oltre perche il quadrato di AB al quadrato di BH è come AB à BE, eſſendo, per coſtruttione, AB il quintuplo di BE, ſarà il quadrato di AB g 47. del 1.

il

il quintuplo del quadrato di BH, cioè ſarà come 10. à 2, è perciò di quelle parti, che il quadrato di AB è 10, il quadrato di HB ſarà 2: ma di quelle parti, che il medeſimo quadrato di AB è 9 il quadrato di GD è 2, eſſendo ciaſcuna delle 10. parti del quadrato di AB minori di ciaſcuna delle 9 parti del medeſimo quadrato di AB, ſarà il quadrato di BH, ch'è 2, di quelle dieci parti, minore del quadrato di GD, ch'è 2 di quelle 9 parti, e perciò la retta GD è maggiore di BH. Di nuouo ſi faccia IL vguale ad IH. Perche HB è lato dell'eſagono iſcritto nel circolo, che circonda quel pentagono, ſopra il quale è coſtrutto l'Icoſaedro, ed IH è lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo, ſarà BH maggiore di HI, ſi tagli HO vguale ad HI, ſarà HI la terza parte della retta compoſta delle due LH, HO, e perciò IH ſarà minore della terza parte della retta compoſta delle due LH, HB: ma la retta compoſta delle due LH, HB, è compoſta del lato HB dell' antedetto eſagono, e di LH, ch'è il doppio del lato del decagono, ſarà IH minore della terza parte della retta compoſta del lato di quell'eſagono, e del doppio del lato del decagono: ma per il Corollario ſecondo alla 16. propoſ. di queſto, il diametro AB è compoſto del lato BH del detto eſagono, e del doppio di HI, ſarà HI minore della terza parte di AB; fù fatta per coſtruttione, DB la terza parte di AB, ſarà IH minore di BD. E perche HB fù dimoſtrata minore di GD, le due BH, HI, ſaranno minori delle due GD, DB, ed i quadrati delle due BH, HI, ſono minori, de i quadrati delle due GD, DB: ma il quadrato di IB [h] è vguale à i quadrati delle due BH, HI, ed il quadrato di BG è vguale à i quadrati delle due GD, DB; il quadrato dunque di IB ſarà minore del quadrato di GB, e la retta GB, ch'è lato del Cubo, è maggiore di IB, ch'è lato dell'icoſaedro, come fù propoſto dimoſtrare.



h 47. del 1.

Finalmente dico che il lato IB dell'Icoſaedro è maggiore del lato BK del Dodecaedro. Perche GB è diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione in K, e la maggior parte è BK, ſarà il rettangolo contenuto dalle due BG, GK, [K] vguale al quadrato di BK, ed il doppio rettangolo contenuto dalle due BG, GK, ſarà vguale al doppio quadrato di BK. In oltre, perche BK è maggiore di KG, il rettangolo contenuto dalle due GB, BK, ſarà maggiore del rettangolo contenuto dalle due BG, GK; e perciò il rettangolo contenuto dalle due GB, BK, col rettangolo delle due BG, GK, ſarà maggiore del doppio rettangolo contenuto dalle due BG, GK: ma i due rettangoli contenuti da GB, BK, e da BG, GK [l], ſono vguali al quadrato di BG, ſarà il quadrato di BG maggiore del doppio rettangolo contenuto dalle due BG, GK; fù dimoſtrato il doppio rettangolo delle due BG, GK, vguale al doppio quadrato di BK, in conſeguenza il quadrato di BG ſarà maggiore del doppio quadrato di BK, e tripla-

K 17. del 6.

l 2. del 2.

ta l'vna, e l'altra parte, il triplo quadrato di BG, ſarà maggiore del ſeſtuplo quadrato di BK. Di nuouo, per quel che ſi è dimoſtrato, il quadrato di AB è il triplo del quadrato di BG, ed è il quintuplo del quadrato di BH, e perciò il triplo quadrato di BG ſarà vguale al quintuplo quadrato di BH: ma il triplo quadrato di BG è dimoſtrato maggiore delli ſei quadrati di BK; ſarà il quintuplo quadrato di BH maggiore delli ſei quadrati di BK; dal che vn ſolo quadrato di BH ſarà maggiore d' vn ſolo quadrato di BK, ed il lato BH ſarà maggiore di BK. Nel triangolo BHI, angolo retto in H, ſarà l'angolo BIH [m] minore dell'angolo BHI, e perciò il lato BI [n] ſarà maggiore di BH: ma BH è dimoſtrato maggiore della retta BK; ſarà dunque BI, ch'è lato dell'Icoſaedro, molto maggiore di BK, ch'è il lato del Dodecaedro. Habbiamo dunque eſpoſti, e comparati i lati de i cinque corpi regolari, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.

m 17. del 1.

n 19. del 1.

SCOLIO.

Spiegata la coſtruttione de' cinque corpi regolari, e fatta la comparatione de' loro lati, reſta che dimoſtriamo come i corpi regolari non poſſono eſſere più di cinque. E nota, che per corpo regolare s'intende quella figura ſolida contenuta da piani equilateri, equiangoli, ed vguali frà loro. E nota ancora, che per la coſtitutione dell'angolo ſolido ſi ricercano due conditioni, la prima è, che gli angoli piani, i quali contengono l'angolo ſolido, [a] non ſiano meno di tre, e la ſeconda che tutti gli angoli piani, che contengono l'angolo ſolido, giunti inſieme, [b] non ſiano minori di quattro angoli retti. Suppoſto queſto.

a 11. defin. del 11.

b 21. del 11.

Perche l'angolo del triangolo equilatero [c] è la terza parte di due angoli retti, cioè la ſeſta parte di quattro angoli retti, ſaranno ſei angoli del triangolo equilatero ſei ſeſte parti di quattro angoli retti, e perciò ſei angoli del triangolo equilatero, giunti inſieme, ſono vguali à quattro angoli retti; dal che con ſei angoli del triangolo equilatero non ſi può coſtituire angolo ſolido: dond'è manifeſto, che non più di cinque triangoli equilateri, che concorrono ſecondo vn' angolo, poſſono coſtituire angolo ſolido, e perche con tre triangoli equilateri, che concorrono ſecondo vn angolo, ſi coſtituiſce l'angolo ſolido del Tetraedro, con quattro ſi coſtituiſce l'angolo ſolido dell'Ottaedro, e con cinque ſi coſtituiſce quello dell'Icoſaedro, perciò co' i triangoli equilateri non ſi poſſono coſtruire altri corpi regolari, che i tre nominati corpi, cioè il Tetraedro, l'Ottaedro, e l'Icoſaedro.

c 32. del 1.

Di nuouo perche l'angolo del quadrato [d] è la quarta parte di quattro angoli retti, i quattro angoli del quadrato ſaranno vguali à quattro angoli retti, e perciò non più di tre quadrati, che concorrono ſecondo vn angolo, poſſono coſtituire angolo ſolido, per la qual coſa colle figure quadrate non ſi poſſono coſtruire altri corpi regolari, fuor che il Cubo.

d Scol. alla 32. del 1.

In oltre perche l'angolo del pentagono [e] è la quinta parte di ſei angoli retti, cioè tre decime parti di quattro angoli retti, ſaranno quattro angoli del pentagono, giunti inſieme, vguali à dodici decime parti di quattro angoli retti; ma i quattro angoli retti ſono vguali à dieci decime parti de i medeſimi, le dodici decime parti di quattro angoli retti, cioè i quattro angoli del pentagono ſo-

e Scol. alla 32. del 1.

no maggiori di quattro angoli retti; e perciò con quattro pentagoni, che concorrono secondo vn'angolo, non si può costituire angolo solido. Donde appare, che colle figure pentagonali non si può costruire altro corpo regolare, fuor che il Dodecaedro.

f Scol. alla 32. del I.

Finalmente perche l'angolo dell'esagono [f] è la terza parte di quattro angoli retti; saranno tre angoli dell'esagono vguali à quattro angoli retti, e perciò con tre figure esagonali, che concorrono secondo vn angolo, non si può costituire angolo solido, ne meno si può costituire angolo solido con due soli esagoni, stante che per costituire l'angolo solido non deuono esser meno di tre angoli piani; per la qual cosa con le figure esagonali non si può costruire corpo alcuno regolare. Nell'istesso modo si dimostrerà, che con nessun'altro poligono regolare si può costruire nessun corpo regolare; e perciò i corpi regolari sono solamente cinque, cioè Tetraedro, Ottaedro, Cubo, Icosaedro, e Dodecaedro, come fù proposto dimostrare.

Fine del Decimoterzo Elemento.

EVCLIDE RESTITVTO
DA
VITALE GIORDANI.
ELEMENTO DECIMOQVARTO.

Concordano tutti gl'Interpreti, che gli antecedenti tredici Elementi sono assolutamente d'Euclide; ma che i due seguenti, cioè decimoquarto, e decimoquinto, siano d'Hypsicle Alessandrino; e perche il tutto è manifesto nella seguente Epistola proemiale presa dal Commandino, stimo superfluo il farci sopra altro discorso.

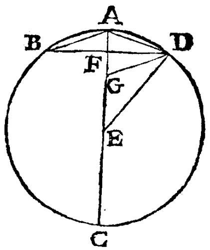
PROEMIO D'HYPSICLE ALESANDRINO A PROTARCHO.

BASILIDE Tyrio, ò Protarco, venendo in Alessandria, ed essendo molto caro à nostro padre, per la commune cognitione delle scienze Matematiche, nel tempo del peregrinaggio, prratticò lungamente con esso lui, e tal volta esaminando quello, che è stato scritto da Apollonio della comparatione del Dodecaedro, ed Icosaedro, che si descriuono nella medesima sfera, qual proportione habbiano frà loro, giudicarono ciò non essere stato ben trattato da Apollonio, e però hauendolo prima emendato, come mio padre diceua, ne fecero memoria. Ma io poi mi sono abbattuto in vn altro libro, mandato in luce da Apollonio, il quale dirittamente comprendeua la dimostratione della cosa proposta; e per la inuestigatione del detto problema, ne presi grandissimo piacere. Quello che hà scritto Apollonio, ogn'vno facilmente lo può vedere, essendo nelle mani di tutti. Ma quello che noi habbiamo con gran studio, per quanto si può pensare, composto, ed accomodato, mettendolo in scritto, ci è piaciuto dedicarlo à te, come à quello, che per l'eccellente cognitione di tutte le scienze Matematiche, massimamente della Geometria, sei per esaminare prudentemente le cose, che noi diremo, e per l'amicitia grande, che hai hauuto con mio padre, e per l'amor, che mi porti, sei per ascoltare volentieri questo mio libro. Ma è già tempo, che ponendo fine al proemio veniamo alla cosa proposta.

THEOREMA I. PROPOSITIONE I.

La linea retta, che dal centro del circolo cade perpendicolare al lato del pentagono iscritto nell'istesso circolo, è la metà della retta composta del lato dell'esagono, e del lato del decagono, che si iscriuono nel medesimo circolo.

Nel circolo ABCD, il di cui centro E, sia BD il lato del pentagono iscritto, e dal centro E cada la retta EF perpendicolare à BD. Dico che la retta EF è la metà della retta composta del lato dell'esagono, e del lato del decagono, iscritti nel medesimo circolo ABCD. Si prolunghi la retta EF fin che concorra con la circonferenza del circolo da ambidue le parti, come in A, & C; si faccia FG vguale ad FA, e si tirino le rette, DE, DG, DA, AB. Perche la retta EA passa per il centro E, e sega la retta BD ad angoli retti



a 3. del 3. in F, sarà BF vguale alla retta FD. Si considerino i triangoli DFA, AFB. Perche i due lati AF, FD sono vguali à i due lati AF, FB, e gli angoli in F sono retti, sarà la base AD [b] vguale alla base AB, dal che l'arco

b 4. del 1.
c 28. del 3. AD [c] è vguale all'arco AB. E perche la retta BD è lato del pentagono iscritto, sarà l'arco BAD la quinta parte di tutta la circōferenza ABCD, e l'arco AD la decima parte; per la qual cosa la retta AD sarà il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo ABCD. Ne i triangoli DFA, DFG, i due lati DF, FG, sono vguali à i due lati DF, FA, gli angoli in F

d 4. del 1. sono retti, e perciò la base AD [d] sarà vguale alla base DG, e gli angoli DGA, DAG, saranno frà di loro vguali. In oltre, perche tutta la circonferenza ABCD è quintupla all'arco BAD, la metà della circonferenza ABCD sarà quintupla alla metà dell'arco BAD; cioè l'arco CDA è quintuplo all'arco DA; per la qual cosa l'arco CD sarà quadruplo all'arco

e 33. del 6. DA; ma l'arco CD all'arco DA è come l'angolo CED all'angolo DEA,

f 20 del 3. essendo l'arco CD il quadruplo dell'arco DA, sarà l'angolo CED il quadruplo dell'angolo DEA. E perche l'angolo CED al centro [f] è il doppio dell'angolo CAD alla circonferenza, l'angolo dunque DAE sarà il doppio dell'angolo DEA; fù mostrato l'angolo DGA vguale all'angolo DAE, sarà l'angolo DGA il doppio dell'angolo DEA. Nel triangolo

g 22. del 1. DGE è continuato il lato EG verso A, sarà l'angolo DEA esterno [g] vguale à i due angoli GED, GDE interni, ed opposti; fù dimostrato l'angolo DGA, essere il doppio dell'angolo GED, l'angolo dunque GED

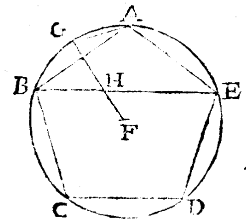
sarà vguale all'angolo GDE, ed il lato GD [h] sarà vguale al lato GE; ma il lato GD fù dimostrato vguale al lato AD, sarà il lato AD vguale al lato GE; al lato AD s'aggiunga AF, ed al lato GE s'aggiunga GF, ne viene EF vguale alle due DA, AF, giunte insieme; vgualmente s'aggiunga la retta EF, saranno le due EA, AD, giunte insieme, vguali al doppio di EF; per la qual cosa la retta EF è la metà delle due EA, AD giunte insieme; e perche il semidiametro EA è vguale al lato dell'esagono, ed il lato DA è lato del decagono, ambidue iscritti nel circolo ABCD, in conseguenza la retta EF sarà la metà della retta composta del lato dell'esagono, e del lato del decagono iscritti nel medesimo circolo, ch'era da dimostrarsi. h 6. del 1.

S C O L I O.

Quì facilmente possiamo dimostrare col P. Clauio i due seguenti theoremi.

Il lato dell'esagono al lato del decagono, iscritti nel medesimo circolo, è come la retta, che sottende l'angolo del pentagono equilatero, ed equiangolo, al lato del medesimo pentagono.

Nel circolo ABCDE, il di cui centro F, sia iscritto il pentagono equilatero, ed equiangolo ABCDE, e sia AG il lato del decagono iscritto nel medesimo circolo; si tiri il semidiametro FG, sarà FG, [a] lato dell'esagono. Si tiri la retta BE, che sottenda l'angolo BAE del pentagono. Dico che la retta FG alla retta GA, è come la retta EB al lato BA. Perche la retta FG, lato dell'esagono, col lato del decagono GA, [b] compongono vna retta diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la di cui maggior parte è il lato FG dell'esagono, e la minor parte è il lato GA del decagono, e della retta EB, diuisa secondo l'estrema, e media proportione, in qualche punto H, la maggior parte EH [c] è vguale al lato EA del pentagono, sarà la maggior parte EH alla minor parte HB, [d] come FG à GA; ma EH ad HB è come EB ad EH, sarà EB ad EH [e] come FG à GA. E perche EH è vguale ad EA, ouero AB, sarà EB à BA, come FG à GA, ch'era da dimostrarsi.



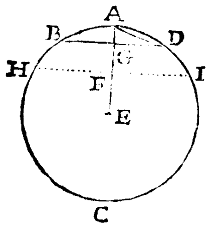
a Corol. alla 15. del 4.
b 9. del 13.
c 8. del 9.
d Scol. alla 5 del 13.
e 11. del 5.

Se la retta, che dal centro del circolo cade perpendicolare al lato del pentagono iscritto nel medesimo circolo, è diuisa secondo l'estrema, e media proportione; la maggior parte è vguale alla retta, che dal medesimo centro cade

perpendicolare al lato del triangolo equilatero, e la minor parte è vguale alla metà del lato del decagono iſcritto nel medeſimo circolo.

f 1. Corol. alla 10. del 13.
g. 30 del 6.
h 9. del 13.

Nel circolo ABCD ſia la retta BD lato del pentagono iſcritto, e diuiſo l'arco BAD in due parti vguali in A, tirata la retta AD, ſarà AD lato del decagono; dal centro E ſi tiri la retta EA, la quale ſegarà BD [f] ad angoli retti in qualche punto G, e ſarà EG, per la 1. prop. del 14, la metà della retta compoſta delle due EA, AD, e diuiſa poi la retta EG [g] ſecondo l'eſtrema, e media proportione in F, in modo, che EF ſia la maggior parte. Dico che la maggior parte EF è vguale alla retta, che dal centro E cade perpendicolare al lato del triangolo; e che la minor parte FG è la metà della retta AD, ch'è lato del decagono. Perche al lato dell'eſagono EA, aggiunto il lato AD del decagono, [h] ſe ne compone vna retta diuiſa ſecondo l'eſtrema, e media proportione, di cui la maggior parte è AE, e la minor parte AD, e la retta EG è diuiſa ancora ſecondo l'eſtrema, e media proportione in F, la di cui maggior parte è EF, e la minore FG, per lo Scol. 2. alla prop. 5. del 13, ſarà la compoſta delle due EA, AD, ad AE, come è GE ad EF; e permutando, la compoſta delle due EA, AD ad EG, [k] ſarà come AE ad EF; ma la compoſta delle due EA, AD, [l] è il doppio di EG, ſarà la retta AE il doppio di EF. Se dunque per il punto F paſſa la retta HI ad angoli retti con AE, ſarà HI [m] lato del triangolo equilatero iſcritto nel circolo ABCD, e perciò la retta EF è quella, che dal centro E cade perpendicolare al lato del triangolo, ch'era da dimoſtrarſi nel primo luogo.



K 16. del 5.
l 1. del 14.
m Corol. 2. all. 12 del 13.

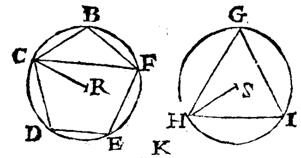
Dico di nuouo che FG è la metà di AD. Perche la compoſta delle due EA, AD ad EA è come GE ad EF, per la conuerſione della proportione, la compoſta delle due EA, AD ad AD, [n] ſarà come EG à GF, e permutando, la compoſta delle due EA, AD ad EG ſarà come AD, [o] ad FG: ma la compoſta delle due EA, AD, è il doppio di EG, ſarà ancora AD il doppio di FG; e perciò FG è la metà di AD lato del decagono, ch'era da dimoſtrarſi.

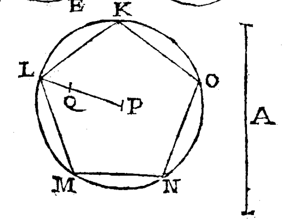
n Corol. alla 19. del 5.
o 16. del 5.

THEOREMA II. PROPOSITIONE II.

Il medeſimo circolo comprende il pentagono del Dodecaedro, e il triangolo dell'Icoſaedro, iſcritti nella medeſima sfera.

Sia A il diametro della sfera, nella quale s'intenda iſcritto il Dodecaedro, la di cui baſe ſia il pentagono BCDEF, e l'Icoſaedro, del quale vna delle baſi ſia il triangolo GHI. Dico che il circolo circoſcritto intorno al pentagono BCDEF è vguale al circolo circoſcritto intorno al triangolo GHI. Sia eſpoſto il pentagono KLMNO di quell'Icoſaedro, del quale vna delle baſi ſia il triangolo GHC, ſarà ciaſcun lato LK, KO,





a 14. del 4.
b 30. del 6.

ON, NM, ML, vguale al lato GH, del triangolo equilatero GHI. Intorno al pentagono KLMNO [a] ſia circoſcritto il circolo KMN, il di cui centro ſia P, ſi tiri la retta PL, e da i centri R, ed S, ſi tirino le rette RC, SH, e ſi ſeghi la retta PL [b] ſecondo l'eſtrema, e media proportione in Q, e per il 2. Coroll. alla 9. propoſ. del 13, la maggior parte QP ſarà il lato del decagono iſcritto nel circolo KLMNO, nel quale il lato dell' eſagono è vguale ad LP; ſi tiri la retta CF. Perche la retta CF ſottende l'angolo CBF del pentagono, per il Corol 2. alla 17. propoſ. del 13, ſarà CF il lato del cubo iſcritto nella medeſima sfera, dou'è iſcritto il Dodecaedro: e perche il quadrato della retta A, ch'è diametro della sfera, per la 15. prop. del 13, è triplo al quadrato di CF, lato del Cubo, ed il medeſimo quadrato della retta A, per il 1 Corol. alla 16 prop. del 13, è quintuplo al quadrato di LP, perciò il triplo quadrato di CF ſarà vguale al quintuplo quadrato di LP. In oltre ſe concepiremo CF, ch'è il lato del detto cubo, diuiſo ſecondo l'eſtrema, e media proportione, per il Coroll. 1. alla citata 17. propoſ. del 13, la maggior parte ſarà vguale al lato FB del pentagono BCDEF, e per lo Scolio 2. alla 5. propoſ. del 13, ſarà CF alla maggior parte FB, come LP à PQ: e permutando, CF ad LP [c] ſarà come FB à PQ, ed il quadrato di CF al quadrato di LP [d] ſarà come il quadrato di FB al quadrato di PQ: e triplati gli antecedenti, ſarà il triplo quadrato di CF al quadrato di LP, come il triplo quadrato di BF al quadrato di PQ; e quintuplati i conſeguenti, ſarà il triplo quadrato di CF al quintuplo quadrato di PL, come il triplo quadrato di BF al quintuplo quadrato di PQ: ma, per quel che ſi è dimoſtrato, il triplo quadrato di CF è vguale al quintuplo quadrato di PL, perciò il triplo quadrato di FB [e] ſarà vguale al quintuplo quadrato di PQ: e perche il quadrato di ML, lato del pentagono, per la 10. del 13, è vguale al quadrato di PL, lato dell'eſagono, col quadrato di PQ, lato del decagono; ſarà il quintuplo quadrato di ML vguale al quintuplo quadrato di PL, col quintuplo quadrato di PQ: fù dimoſtrato il triplo quadrato di CF, vguale al quintuplo quadrato di PL, ed il triplo quadrato di FB vguale al quintuplo quadrato di PQ, ſarà il quintuplo quadrato di LM vguale al triplo quadrato di CF, più il triplo quadrato di FB. Di nuouo, perche i quadrati delle due CF, FB, per il 1. Scol. alla 10. propoſ. del 13, ſono il quintuplo del quadrato di CR, il triplo quadrato di CF, col triplo quadrato di FB, ſarà vguale à quindici quadrati di CR: ma il triplo quadrato di CF, col triplo quadrato di FB fù dimoſtrato vguale al quintuplo quadrato di LM, ſarà il quintuplo quadrato di LM vguale à quindici quadrati di CR. E perche il lato LM per quel che ſi è detto, è vguale al lato HI, ſarà il quintuplo quadrato di HI vguale à quindici quadrati di CR. Finalmente perche, per la 12. prop. del

c 16. del 5.
d 22. del 6.
e 14 del 5.

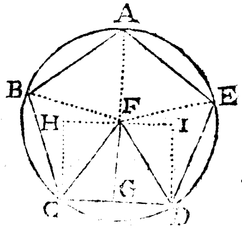
15, il quadrato di HI è vguale al triplo quadrato di HS, farà il quintuplo quadrato di HI vguale à quindici quadrati di HS: ma il quintuplo quadrato di HI fù dimostrato vguale à quindici quadrati di CR; i quindici quadrati dũque di CR sono vguali à i quindeci quadrati di HS, D'onde il quadrato di CR sarà vguale al quadrato di HS, ed il semidiametro CR vguale al semidiametro HS. Per la qual cosa il circolo BCDEF sarà vguale al circolo GHI, come fù proposto dimostrare.

THEOREMA III. PROPOSITIONE III.

Se dal centro del circolo circoscritto al pentagono del Dodecaedro, cade vna retta perpendicolare al lato di esso pentagono, il trentuplicato rettangolo contenuto da quella perpendicolare, e dal lato del detto pentagono, è vguale alla superficie del Dodecaedro.

Sia ABCDE vno de pentagoni del Dodecaedro iscritto nel circolo ACD, il di cui centro F, dal quale cada la retta FG perpendicolare al lato CD. Dico che il trentuplo rettangolo contenuto dalla retta FG, e dal lato CD, è vguale alla superficie del Dodecaedro. Si tirino le rette FD, FC, e sopra il lato CD, all'altezza FG, si faccia il rettangolo HCDI, il

a 41. del 1. quale a farà il doppio del triangolo FCD; e perche il rettangolo HCDI è contenuto dalle rette HC, CD, e la retta HC è vguale ad FG, farà il rettangolo contenuto dalle due FG, CD, vguale al doppio triangolo FCD, ed il quintuplo rettangolo contenuto dalle due



FG, CD, farà decuplo al triangolo FCD, cioè il quintuplo rettangolo contenuto dalle due FG, CD, è vguale à dieci triangoli FCD; cioè vguale à due volte i cinque triãgoli FCD, FDE, FEA, FAB, FBC; e perciò il quintuplo rettãgolo contenuto dalle rette FG, CD, è vguale al doppio pentagono ABCDE; e dodecuplicata l'vna, e l'altra parte di questa vgualità, ne vengono sessanta rettangoli, contenuti dalle rette FG, CD, vguali à 24. pentagoni ABCDE; e presone la metà, ne vengono trenta rettangoli contenuti dalle rette FG, CD, vguali à dodici pentagoni ABCDE; ma i 12. pentagoni ABCDE, sono vguali alla superficie del Dodecaedro, i trenta rettangoli dunque contenuti dalle rette FG, CD, sono vguali alla superficie del Dodecaedro, ch'era da dimostrarsi.

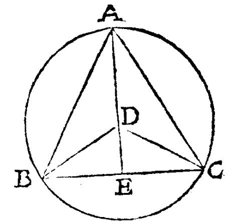
SCOLIO I.

Nell'istesso modo si dimostrerà il seguente Theorema.

Se dal centro del circolo circoscritto intorno ad vno

de i triangoli, ch'è base dell'Icosaedro, cade vna retta perpendicolare ad vn lato; il trentuplo rettangolo contenuto dalla perpendicolare, e dal lato del triangolo, è vguale alla superficie dell'Icosaedro.

Sia il triangolo equilatero ABC vno di quelli, che contengono l'Icosaedro, intorno al quale sia circoscritto il circolo ABC, il di cui centro D, dal quale cada la retta DE perpendicolare al lato BC. Dico che il trentuplo rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, è vguale alla superficie dell'Icosaedro. Si tiri la retta DA, farà diuiso il triangolo ABC ne i tre vguali triangoli DBC, DAC, DAB; e perche come si disse nella dimostratione antecedente, il rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, a è il doppio a 41. del 1. *del triangolo DBC, farà il triplo rettangolo contenuto dalle due DE, BC, il doppio de i tre triangoli DBC, DCA, DAB; cioè il triplo rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, è vguale al doppio triangolo ABC; e ventuplicata l'vna, e l'altra parte dell'vgualità, ne viene il sessantuplo rettangolo, contenuto dalle rette DE, BC, vguale al quarantuplo triangolo ABC; e prese le loro metà, farà il trentuplo rettangolo contenuto dalle due DE, BC, vguale à venti triangoli ABC; ma venti triangoli ABC sono vguali alla superficie dell'Icosaedro, in conseguenza il trentuplo rettangolo contenuto dalle rette DE, BC, farà vguale alla superficie dell'Icosaedro, ch'era da dimostrarsi.*



COROLLARIO

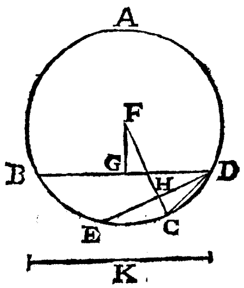
Quindi è manifesto, che il rettangolo contenuto da vn lato del pentagono equilatero, ed equiangolo, e dalla retta, che dal centro di esso pentagono cade perpendicolare ad vno de i suoi lati, al rettangolo contenuto da vn lato del triangolo equilatero, e dalla retta, che dal centro di esso triangolo cade perpendicolare ad vno de i suoi lati, è come la superficie del Dodecaedro (di cui ciascuna base è vguale à quel pentagono) alla superficie dell'Icosaedro, del quale ciascuna base è vguale al detto triangolo.

Perche, nel detto pentagono, essendo il trentuplo rettangolo, contenuto dalla perpendicolare, e dal lato di esso pentagono, vguale alla superficie del Dodecaedro; e similmente nel detto triãgolo il trentuplo rettãgolo cõtenuto dalla perpendicolare, e dal lato del triãgolo, è vguale alla superficie dell'Icosaedro; farà nel pentagono, il trentuplo rettãgolo, cõtenuto dalla detta perpendicolare, e dal lato del pentagono, alla superficie del Dodecaedro, come nel triangolo il trentuplo *rettangolo contenuto dalla detta perpendicolare, e dal lato del triangolo, alla superficie dell'Icosaedro; e presa la trentesima parte degli antecedenti, sarà il rettangolo contenuto dalla perpendicolare, che cade dal centro del pentagono, e dal lato di esso pentagono, alla superficie del Dodecaedro, come il rettangolo contenuto dalla perpendicolare, che cade dal centro del triangolo, e dal lato del medesimo triangolo, alla superficie dell'Icosaedro: e permutando, il rettangolo contenuto dalla detta perpendicolare, e dal lato del pentagono, al rettangolo contenuto dalla perpendicolare, che cade dal centro del triangolo, e dal lato di esso triangolo, come la superficie del Dodecaedro alla superficie dell'Icosaedro.*

THEOREMA IV. PROPOSITIONE IV.

La superficie del Dodecaedro alla superficie dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera, è come il lato del Cubo al lato dell'Icosaedro.

Nel circolo ABCD, che si circoscriue intorno al pentagono del Dodecaedro, ed al triangolo dell'Icosaedro, siano addattate le rette cioè BD lato del triangolo del Icosaedro, e la retta DE lato del pentagono del Dodecaedro; e dal centro F cadano le rette FG perpendicolare al lato BD, ed FH perpendicolare ad ED, e sia K il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera, coll'Icosaedro, e Dodecaedro. Dico, che la superficie del Dodecaedro alla superficie dell'Icosaedro è come la retta K, ch'è lato del Cubo, al lato BD del triangolo equilatero. Perche ED è lato del Dodecaedro, cioè è lato del pentagono del Dodecaedro, e la retta FH è perpendicolare ad ED, se la retta FH sarà diuisa secondo



a Scol. alla 1. del 14. l'estrema, e media proportione, la maggior parte [a] sarà vguale ad FG, ch'è la retta, che cade perpendicolare al lato BD del triangolo. Similmente se conceperemo diuiso il lato K del Cubo secondo l'estrema, e media proportione, per il 2. Coroll. alla 17. propos. del 13, la maggior parte sarà il lato ED del pentagono; e per lo Scolio 2. alla 5. propositione del 13, la retta K, ch'è lato del Cubo, alla sua maggior parte ED sarà come FH alla sua maggior parte FG, ed il rettangolo contenuto

b 17. del 6. dall'estreme, cioè dalla retta K, e da FG, sarà vguale [b] al rettangolo contenuto dalle medie ED, FH. Prese le due K, & BD, come basi di due rettangoli, e sia FG altezza commune, sarà il rettangolo contenuto dalle

c 1. del 6. due K, & FG, al rettangolo contenuto dalle due BD, & FG [c] come la base K alla base BD; ma il rettangolo contenuto dalle due K, & GF, è dimostrato vguale al rettangolo contenuto dalle due ED, FH; sarà il rettangolo contenuto dalle due ED, FH, al rettangolo contenuto dalle due

BD, FG,

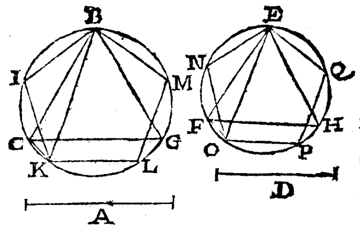
BD, FG, come la retta K al lato BD: ma per l'antecedente Corollario il rettangolo contenuto dalle due ED, FH, al rettangolo contenuto dalle due BD, FG, è come la superficie del Dodecaedro, il di cui lato è la retta ED, alla superficie dell'Icosaedro, il di cui lato è BD, sarà la retta K, ch'è lato del Cubo, alla retta BD, ch'è lato del triangolo dell'Icosaedro, come la superficie del Dodecaedro, il di cui lato è la retta ED, alla superficie dell'Icosaedro, il di cui lato EBD, come fù proposto dimostrare.

S C O L I O.

In agiuto della propos. seguente dimostraremo col P. Clauio il seguente Theorema.

I lati del Cubo à i lati dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera, sono come i lati del Cubo à i lati dell'Icosaedro, iscritti in qualunque altra sfera.

Sia A il lato del Cubo, e la retta BC il lato dell'Icosaedro iscritti nella medesima sfera; e di nuouo sia D il lato del Cubo, e la retta EF il lato dell'Icosaedro descritti in qualche altra sfera. Dico che il lato A del Cubo al lato BC dell'Icosaedro è come il lato D del Cubo al lato EF dell'Icosaedro. Si compiscano i triangoli degl'Icosaedri BCG, EFH, intorno à i quali [a] si circoscriuano i circoli BCG, EFH, ed in essi [b] si iscriuano i pentagoni equilateri, ed equiangoli BIKLM, ENOPQ; si tirino le rette BK, CK, EO, FO. Perche il medesimo circolo [c] comprende il penta-



a 5. del 4.
b 11. del 4.
c 2. del 14.

gono dol Dodecaedro, ed il triangolo dell'Icosaedro della medesima sfera, essendo BCG, per ipotesi, il triangolo dell'Icosaedro, sarà BIKLM il pentagono del Dodecaedro: ma per il 2. Coroll. alla 17. prop. del 13, la retta BK è il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera col Dodecaedro, sarà BK il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera coll'Icosaedro; per ipotesi la retta A è il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera col proposto Icosaedro, perciò il lato BK del Cubo sarà vguale al lato A del Cubo proposto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il lato EO del Cubo è vguale al lato D del Cubo proposto. In oltre perche i pentagoni BIKLM, ENOPQ sono equilateri, ed equiangoli, perciò sono frà loro simili, e sarà l'angolo BIK vguale all'angolo ENO: ma gli angoli BIK, BCK, [d] nella medesima portione sono frà loro vguali. E gli angoli ENO, EFO nella medesima portione sono frà loro vguali, in conseguenza l'angolo BCK sarà vguale all'angolo EFO. Similmente perche i triangoli BCG, EFH sono equilateri, ed in conseguenza equiangoli, sarà l'angolo BGC vguale all'angolo EHF; ma gli angoli BGC, BKC e nella medesima portione sono frà di loro vguali, e gli angoli EHF, EOF, nella medesima d 21. del 3. e 21. del 3.

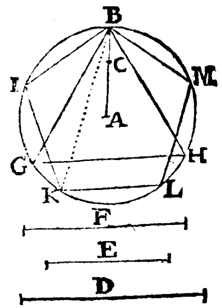
 desima

desima portione, sono frà di loro vguali; saranno gli angoli BKC, EOF frà di loro vguali. Ne i triangoli BKC, EOF, i due angoli, BCK, BKC sono
f 32. del 1. *vguali à i due angoli EOF, EFO, e perciò il rimanente angolo KBC sarà vguale al restante angolo OEF; dal che i triangoli BKC, EOF sono equiangoli, e*
g 4. del 6. *sarà BK à BC* g *come è EO ad EF; ma BK fù mostrata vguale alla retta A, e la retta EO vguale à D, perciò A lato del Cubo à BC lato dell'Icosaedro, iscritto nella medesima sfera, è come D lato del Cubo ad EF lato dell'Icosaedro iscritti in vn' altra sfera, ch'era da dimostrarsi.*

THEOREMA V. PROPOSITIONE V.

Se vna retta linea sarà diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la retta, il di cui quadrato è vguale al quadrato di tutta col quadrato della maggior parte, alla retta, il di cui quadrato è vguale al quadrato di tutta col quadrato della minor parte, è come il lato del Cubo al lato dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera,

Sia esposta qualunque retta AB diuisa secondo l'estrema, e media proportione in C, e sia AC la maggior parte; sia poi D il lato del Cubo, e la retta F il lato dell'Icosaedro iscritto nella medesima sfera col Cubo: fatto centro in A, coll'interuallo AB si de-
a 11. del 4. scriua il circolo BGH, nel quale a si iscriua il pentagono equilatero, ed equiangolo BIKLM,
b 2. del 4. ed il triangolo b equilatero BGH; si tiri la retta BK. Se la retta BI si suppone lato del Dodecaedro iscritto in qualche sfera, la retta BK, per il 2. Coroll' alla 17, propos. del 13, sarà il lato del Cubo iscritto nella medesima sfera. In oltre la retta AB, come semidiametro del circolo
c Corol. alla 15. del 4. BGH c è vguale al lato dell'esagono iscritto nel medesimo circolo BGH; se dunque AB è lato dell'esagono, diuiso in C secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte AC d sarà lato
d Corol. 2. alla 9. del 13 del decagono iscritto nell'istesso circolo BGH, e per la 10 propos. del 13, il quadrato di IB, ch'è lato del pentagono, sa-
e 47. del 1. rà vguale à i quadrati delle due BA, AC. Si esponghi poi la retta E, e il di cui quadrato sia vguale à i quadrati delle due AB, BC. Dico che la retta D, ch'è lato del Cubo, alla retta F, ch'è lato dell'Icosaedro, è come la retta BI, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due BA, AC, alla retta E, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due AB,
f 12. del 13. BC. Perche il quadrato di BG, lato del triangolo BGH, f è triplo al quadrato del semidiametro AB, ed i quadrati delle due AB, BC, sono il
g 15. del 5. triplo del quadrato di AC, sarà il quadrato di BG al quadrato di AB g come è l'aggregato de' quadrati di AB, BC, cioè il quadrato di E al qua-

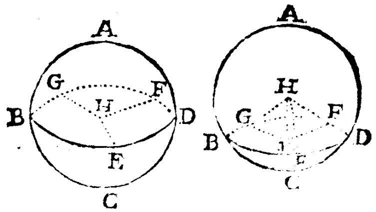


drato di AC, e permutando, il quadrato di BG al quadrato della retta E h sarà come il quadrato di BA al quadrato di AC. Di nuouo perche h 16. del 5.
la retta BK sottende l'angolo BIK del pentagono, se concepiremo BK diuisa secondo l'estrema, e media proportione, la maggior parte K sarà
vguale al lato IB del pentagono, e perciò sarà BK à BI come è BA ad K 8. del 13.
AC, ed il quadrato di BK al quadrato di BI l sarà come il quadrato di l 22. del 6.
BA al quadrato di AC; ma il quadrato di BA al quadrato di AC, per quel che si è dimostrato, è come il quadrato di BG al quadrato della
retta E, sarà il quadrato di BK al quadrato di BI m come è il quadrato di m 11. del 5.
BG al quadraro della retta E; e permutando, il quadrato di BK al quadrato di BG n sarà come il quadrato di BI al quadrato della retta E; per n 16. del 5.
la qual cosa la retta BK alla retta BG o sarà come BI alla retta E; cioè il o 22. del 6.
lato BK del Cubo al lato BG dell'Icosaedro, iscritto nella medesima sfera, è come la retta BI, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due BA, AC, alla retta E, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due AB, BC: ma per l'antecedente Scolio, il lato D del Cubo al lato F dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera, è come il lato BK del Cubo al lato BG dell'Icosaedro; sarà il lato D del Cubo al lato F dell'Icosaedro p come la retta BI; il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle p 11. del 5.
due BA, AC, alla retta E, il di cui quadrato è vguale à i quadrati delle due AB, BC, ch'era da dimostrarsi.

L E M M A I.

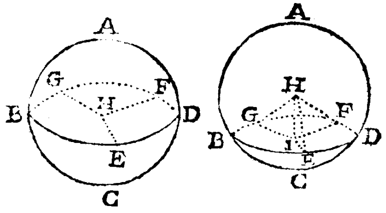
Se la sfera è segata da qualche piano, la commune settione è circolo.

Sia la sfera ABCD segata dal piano BEDF, e la commune settione sia BEDFG. Dico che il piano BEDFG è circolo. Passi prima il piano segante per il centro H della sfera. Perche tutte le rette tirate dal centro H della sfera alla superficie



sferica, per la definitione della sfera, sono frà di loro vguali, perciò le rette HE, HF, HG, e tutte le altre tirate nel piano BEDFG, sono frà di loro vguali, e per la definitione del circolo, il piano BEDFG sarà circolo. Se il piano BEDFG non passa per il centro H, dal centro H si faccia cadere la retta HI a *perpendicolare al piano* a 11. del 11.
BEDFG, e dal punto I nel piano BEDFG si tirino le rette IF, IE, IG. Essendo HI perpendicolare al piano BEDFG, gli angoli HIE,

b 3.definit. de. 11. *HIF, HIG* [b] *saranno retti, e tutte le rette HE, HF, HG, tirate dal centro H alla superficie della sfera, sono frà di loro vguali. Nel* c 47.del 1. *triangolo HIE, angolo retto in I, il quadrato di HE* [c] *è vguale à i quadrati delle due HI, IE; e nel triangolo HIF, il quadrato* d 47.del 1. *di HF* [d] *è vguale à i quadrati de i lati HI, IF; per la qual cosa i quadrati de i due lati HI, IE, saranno vguali à i quadrati delle due HI, IF; se ne leui il commune quadrato di HI, resta il quadrato di IE vguale*



al quadrato di IF, e la retta IE sarà vguale alla retta IF. Nell' istesso modo si dimostrerà, che IF è vguale ad IG, ed è vguale à tutte le altre rette tirate dal punto I nel piano BEDFG. Per la qual cosa il piano BEDFG è circolo, come fù proposto dimostrare.

COROLLARIO.

Appare dunque che, se il piano segante passa per il centro della sfera, il circolo, che si fà, hà il medesimo centro colla sfera; e se il piano, che sega, non passa per il centro della sfera, il centro del circolo generato, è fuori del centro della sfera, ed è quel punto doue la retta tirata dal centro della sfera cade perpendicolare al piano segante.

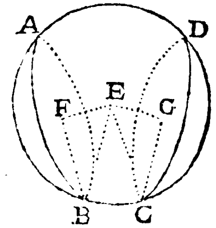
LEMMA II.

I circoli vguali nella sfera sono vgualmente distanti dal centro della sfera; ed i circoli, che nella sfera sono vgualmente distanti dal centro di essa sfera, sono frà di loro vguali.

Nella sfera ABCD, il di cui centro E, siano gli vguali circoli AB, CD. Dico che i circoli AB, CD, sono vgualmente distanti dal centro E. Cadano dal centro E à i piani de' cir-

coli

coli AB, CD, [a] *le perpendicolari EF, EG,* a 11. del 11. *e per l'antecedente Corollario, i punti F, & G, sono i centri de' circoli AB, CD; da i centri G, ed F, alle circonferenze de' circoli AB, CD, si tirino le rette GC, FB. Essendo i circoli AB, CD, per ipotesi, frà di loro vguali, i loro semidiametri FB, GC sono frà di loro vguali; si tirino le rette EB, EC, le quali, per la definitione della sfera, sono frà di loro vguali;*



e perche le rette EG, EF, sono perpendicolari à i piani AB, CD, perciò gli angoli EGC, EFB [b] *sono retti. Nel triangolo rettangolo* b 3. definit. del 11. *EGC il quadrato di EC* [c] *è vguale à i quadrati de i due lati EG, GC;* c 47. del 1. *e similmente nel triangolo EFB, angolo retto in F, il quadrato di EB* [d] *è vguale à i quadrati de i due lati EF, FB: ma il quadrato di* d 47. del 1. *EC è vguale al quadrato di EB, i due quadrai de i lati EG, GC, saranno vguali à i due quadrati de i lati EF, FB; se ne leuino i quadrati delle vguali GC, FB, resta il quadrato di EG vguale al quadrato di EF, e la retta EG sarà vguale alla retta EF. Hor essendo le perpendicolari EG, EF frà di loro vguali, i circoli AB, CD distano vgualmente dal centro E della sfera, ch'era da dimostrarsi nel primo luogo.*

Di nuouo siano i circoli AB, CD vgualmente distanti dal centro E. Dico che sono frà di loro vguali. Sia fatta la medesima costruttione di prima, e si dimostri che i quadrati delle due EG, GC sono vguali à i quadrati delle due EF, FB, che leuatone i quadrati delle vguali perpendicolari EG, EF, resta il quadrato di GC vguale al quadrato di FB, e la retta GC sarà vguale alla retta FB. Hor essendo i semidiametri GC, FB fra di loro vguali, i circoli AC, DC sono frà di loro vguali, ch'era da dimostrarsi.

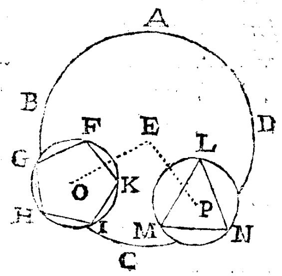
THEOREMA VI. PROPOSITIONE VI.

Il Dodecaedro all'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera, è come il lato del Cubo al lato dell'Icosaedro, iscritti nella medesima sfera.

Nella sfera ABCD, il di cui centro E, sia iscritto il Dodecaedro, & di esso vno de i pentagoni sia FGHIK; e similmente nella medesima sfera sia iscritto l'Icosaedro, del quale vno de i triangoli sia LMN. Dico

che

che il Dodecaedro, la di cui base è il pentagono FGHIK, all'Icosaedro, la di cui base è il triangolo LMN, è come il lato del Cubo al lato dell'Icosaedro, ò iscritti nella sfera ABCD, ò pùre in altra sfera. S'intendano continuati i piani del pentagono FGHIK, e del triangolo LMN, le settioni fatte nella sfera ABCD, per il primo degli antecedenti Lemma, saranno i circoli FGHIK, LMN; e perche il pentagono del



a 2.del 14. Dodecaedro, ed il triangolo dell'Icosaedro [a] si iscriuono in vn medesimo circolo, perciò i circoli, ne'quali sono iscritti il pentagono FGHIK, ed il triangolo LMN, sono frà di loro vguali; e per il secondo degli antecedenti Lemma, gli vguali circoli FGHIK, LMN, distano vgualmente dal centro E della sfera. Se dun-

b 11.del 11. que dal centro E della sfera sono tirate le rette EP, EO, [b] perpendicolari à gli vguali circoli FGHIK, LMN, quelle sono frà di loro vguali, e per il Corollario al primo Lemma, i punti P, O sono i centri de'circoli FGHIK, LMN. Nell'istesso modo si prouerà, che tutte le rette tirate dal centro E della sfera, perpendicolari à gli altri pentagoni del Dodecaedro, ed à gli altri triangoli dell'Icosaedro, sono frà di loro vguali, e cadono ne i centri di quei pentagoni, e triangoli. Se dunque da tutti gli angoli del Dodecaedro, s'intendano tirate linee rette al centro E della sfera, sarà diuiso tutto il Dodecaedro in 12 piramidi di vguali basi, ed vguali altezze, ed in conseguenza vguali frà di loro. E similmente, se da tutti gli angoli dell'Icosaedro al centro E della sfera, s'intendano tirate linee rette, sarà diuiso l'Icosaedro in venti piramidi di vguali basi, & vguali altezze, è perciò frà di loro vguali. E perche l'altezza della piramide del Dodecaedro è dimostrata vguale all'altezza della Piramide dell'Icosaedro, stante che EP è vgua-

c 5. & 6.del 12. le ad EO, sarà la piramide del Dodecaedro alla piramide dell'Icosaedro [c] come la base FGHIK alla base LMN, e Dodecuplicati gli antecedenti, saranno le dodeci piramidi del Dodecaedro, cioè tutto il Dodecaedro, alla piramide EMNL dell'Icosaedro, come i dodici pentagoni del Dodecaedro, cioè tutta la superficie del Dodecaedro, al triangolo LMN: e, ventuplicati i conseguenti, sarà tutto il Dodecaedro alle venti piramidi dell' Icosaedro, cioè à tutto l'Icosaedro, come la superficie del Dodecaedro à i venti triangoli LMN dell' Icosaedro, cioè à tutta la superficie dell' Icosaedro: ma la superficie del Dodecaedro alla superficie dell' Icosaedro, per la 4. propositione di questo, è come il lato del Cubo al lato dell' Icosaedro iscritti l' vno, e l' altro in qualunque altra sfera; il Dodecaedro dunque all' Icosaedro, iscritti nella medesima sfera è come il lato del Cubo al lato dell' Icosaedro, iscritti in qualunque altra sfera, ch' era da dimostrarsi.

COROLLARIO.

Da quel che si è dimostrato, è manifesto, che il Dodecaedro all' Icosaedro, iscritto nella medesima sfera, è come la superficie del Dodecaedro alla superficie del Icosaedro.

Fine del decimoquarto Elemento.

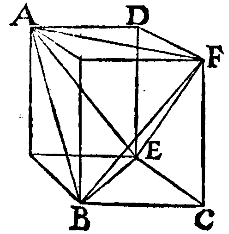
EVCLIDE RESTITVTO DA VITALE GIORDANI.

ELEMENTO DECIMOQVINTO.

PROBLEMA I. PROPOSITIONE I.

Nel dato Cubo iſcriuere il Tetraedro.

SIA il dato Cubo ABCD, nel quale ſi habbia ad iſcriuere il Tetraedo. Da vno degli angoli del dato Cubo, come dall'angolo A, ne i tre piani AB, AE, AF, che lo coſtituiſcono, ſi tirino le diagonali AB, AE, AF, e per gli eſtremi F, E, B, di queſte diagonali ſi tirino à gli altri tre piani le diagonali FE, EB, BF. Perche i piani, che che contengono il Cubo ABCD, ſono quadrati vguali frà loro, tutti i diametri AE, AF, AB, FE, EB, FB ſono frà di loro vguali, ſtante che il quadrato di ogn'vna delle dette diagonali è il doppio del quadrato del lato del Cubo. Hor eſſendo tutte le dette diagonali frà di loro vguali, i quattro triangoli ABF, ABE, AEF, FEB, ſono equilateri, ed vguali frà loro, per la qual coſa il ſolido contenuto da queſti quattro triangoli ſarà Tetraedro; e perche tutti gli angoli del coſtrutto Tetraedro ſono collocati negli angoli del Cubo, perciò il coſtrutto Tetraedro è iſcritto nel Cubo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

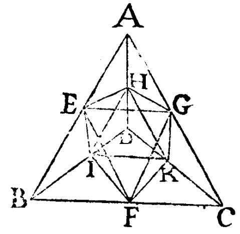


PROBLEMA II. PROPOSITIONE II.

Nella data Piramide iſcriuere l'Ottaedro.

Sia la Piramide, ò Tetraedo ABCD, nel quale s'habbia ad iſcriuere l'Ottaedro. Si diuidano tutti i lati della propoſta piramide [a] in due parti vguali ne i punti E,F,G,H,I,K, e ſi tirino le dodici rette EH, HG, GE, GK,KI,IE,IF,FK,KH,HI,EF,FG, le quali coſtituiſcono otto triangoli,

cioè quattro ſopra al piano EIKG, e gli altri quattro ſono ſotto al medeſimo piano EIKG, quelli poſti ſopra al piano EIKG ſono i notati FIE, FEG,FGK,FIK, i quali concorrendo nel punto F, coſtituiſcono la Piramide, il di cui vertice F, e la baſe il piano EIKG; quelli poi poſti ſotto al piano EIKG ſono i notati HEG, HEI, HIK, HKG, i quali concorrono nel medeſimo punto H, e coſtituiſcono la Piramide, il di cui vertice H, e la baſe è il piano EIKG. Dico che il ſolido contenuto da queſti otto triangoli è l'Ottaedro iſcritto nella data Piramide. Perche tutti i lati della Piramide ſono diuiſi in due parti vguali, ſaranno i lati AG,AH, del triangolo AGH, vguali à i lati AE, AH del triangolo AEH, l'angolo GAH è vguale all'angolo EAH, ſtante che ſono angoli de i triangoli equilateri, perciò la baſe HG [b] ſarà vguale alla baſe HE. Similmente ne i triangoli AEG, AEH, i due lati EA,AG ſono vguali à i due lati AE, AH, l'angolo EAG è vguale all'angolo EAH, perciò la baſe EG [c] ſarà vguale alla baſe EH; ma EH è dimoſtrata vguale ad HG, i tre lati dunque EH,HG,GE ſono frà di loro vguali, ed il triangolo EHG è triangolo equilatero. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che tutti gli otto triangoli ſopra nominati ſono equilateri. E perche queſti triangoli, preſi à due à due, hanno vn lato commune, come la retta EG è lato del triangolo EHG, ed è lato del triangolo EFG, ed il ſimile s'intende degli altri, perciò tutti gli antedetti otto triangoli ſono frà di loro vguali, e per la definitione 27. dell'11, il ſolido contenuto da quegli otto triangoli è Ottaedro; e perche tutti gli angoli del detto Ottaedro toccano i lati del Tetraedro, perciò è iſcritto nel propoſto Tetraedro, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.



b 4. del 1.

c 4. del 1.

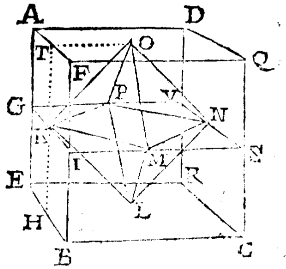
SCOLIO.

Perche i tre piani EIKG,GHIF,FKHE per il primo Coroll. alla 14. propoſ. del 13, ſono quadrati vguali, che ſcambieuolmente ſi ſegano ad angoli retti, ciaſcuno de' quali diuide la piramide ABCD in due parti vguali, ſtante che ogn'vno diuide la piramide ABCD in modo, che da vna parte laſcia vn priſma, ed vna piramide, e dell'altra laſcia l'altro priſma, e l'altra piramide; come per eſempio, il quadrato EFKH laſcia da vna parte la piramide AEGH, ed il priſma EHGCFK, e dall'altra parte laſcia la piramide HIKD, ed il priſma HEBFKI. Similmente il quadrato HIFG laſcia da vna parte la piramide AGHE, ed il priſma EHGFBI, e dall'altra parte laſcia la piramide HIKD, ed il priſma HGCFIK, ed il quadrato EIKG laſcia da vna parte la piramide GFCK, ed il priſma EGFKIB, e dall'altra parte laſcia la piramide AEHG, ed il priſma EHGKID, per il che le piramidi ſono frà di loro vguali, ed i priſmi ſono frà di loro vguali, ed il tutto ſi può ancora dimoſtrare, come ſi fece nella 3. propoſ. del 12; d'onde è manifeſto, *che se farà iscritto l'Ottaedro nel Tetraedro, i tre vguali quadrati, che scambieuolmente si segano ad angoli retti, ed ogn'vno sega l'Ottaedro in due parti vguali, ogn'vno di essi sega ancora la piramide in due parti vguali.*

PROBLEMA III. PROPOSITIONE III.

In vn dato Cubo iscriuere l'Ottaedro.

Sia il Cubo ABCD, nel quale s'habbia ad iscriuere l'Ottaedro. Si
a 16. del 1. diuidano i lati del quadrato AEBF [a] in due parti vguali ne i punti T, G, H, I; si tirino le rette TH, GI, le quali si segaranno scambieuolmente in qualche punto K, sarà K il centro del quadrato AEBF. Nell'istesso modo si trouino i centri degli altri quadrati, che contengono il Cubo ABCD, che siano i punti M, N, P, L, O; si tirino le rette KM, MN, NP, PK; poi dal punto L si tirino le rette LK, LM, LN, LP, e dal punto O si tirino le rette OK, OM, ON, OP; e saranno descritti otto triangoli, cioè quattro sopra il piano KMNP, e quattro altri di sotto; i quattro sopra il piano KMNP, che costituiscono vna piramide, il di cui vertice O, e la base è il piano KMNP, sono i notati OKM, OMN, ONP, OPK, gli altri quattro di sotto, che costituiscono la piramide, il di cui vertice L, e la base il piano KMNP, sono i notati LKM, LMN, LNP, LPK. Dico che il solido contenuto da questi otto triangoli è Ottaedro. Perche FI è vguale, e paralle-

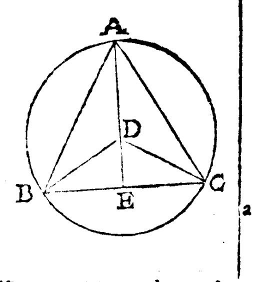


b 3?. del 1. la ad SQ, sarà IS [b] vguale, e parallela ad FQ. Nell'istesso modo si di-
c 1?. del 11. mostrerà, che IG è vguale, e parallela ad AF, e perciò l'angolo SIG [c] sarà vguale all'angolo QFA: ma l'angolo QFA è retto, sarà l'angolo SIG retto. In oltre perche AQ è quadrato, sarà QF vguale ad FA: ma QF è dimostrata vguale ad SI, e la retta AF vguale ad IG, sarà dunque SI vguale ad IG, e la metà MI vguale ad IK. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli angoli IGV, GVS, ISV, OTK sono retti, e perciò il quadrilatero ISVG è quadrato, e la metà de'lati GK, KI, IM, MS, SN, NV, VP, PG sono frà di loro vguali. Nell'istesso modo si dimostrerà, che tutte le rette tirate da i centri de'quadrati nelle metà de i lati di essi quadrati sono frà di loro vguali, ed ogn'vna è vguale alla metà del lato del quadrato, ed in conseguenza i lati OT, TK, IK, IM &c. sono frà di loro vguali. Nel triangolo IMK, perche l'angolo MIK è retto, ed i lati IK, IM, sono
d 32. del 1. frà di loro vguali, perciò ogn'vno degli angoli IMK, IKM, [d] sarà la metà d'vn angolo retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che ogn'vno degli angoli SMN, SNM, VNP, VPN, GPK, GKP, è la metà d'vn angolo ret-
e 13. del 1. to, e perciò gli angoli KMN, MNP, NPK, PKM [e] sono retti; ed essendo i lati KI, IM, vguali à i lati PG, GK, e gli angoli MIK, PGK, retti, sarà
f 4. del 1. la base PK, [f] vguale alla base KM; per la qual cosa il quadrilatero KMNP è quadrato. Nell'istesso modo si prouerà, che i quadrilateri LMOP,

OKLN sono quadrati. Si considerino i triangoli OKM, OKP. Perche i due lati OK, KM, sono vguali à i due lati OK, KP, e la base OM è vguale alla base OP, stante che sono lati del quadrato LMOP, sarà l'angolo OKM [g] vguale all'angolo OKP, e tutto il triangolo OKM [h] vguale g 8. del 1.
al triangolo OKP. Finalmente perche i lati OT, TK, del triangolo h 4. del 1.
OTK, sono vguali à i lati KI, IM del triangolo KIM, e gli angoli OTK, KIM sono retti, sarà la base OK [K] vguale à KM, ed ogni lato del qua- K 4. del 1.
drato OKLN sarà vguale à ciascun lato del quadrato KMNP. E nel medesimo modo si prouerà, che ogni lato del quadrato OKLN è vguale à ciascun lato del quadrato LMOP, per la qual cosa tutti gli otto triangoli OKM, OMN, ONP, OPK, LKM, LMN, LNP, LPK, sono equilateri, ed vguali, e per la definit. 17. dell'11, il solido contenuto da i detti otto triangoli è Ottaedro, il quale toccando, per costruttione, con tutti i suoi angoli i quadrati, che contengono il Cubo ne i centri O, K, L, M, N, P, sarà, per la definitione dell'11, iscritto nel Cubo ABCD, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

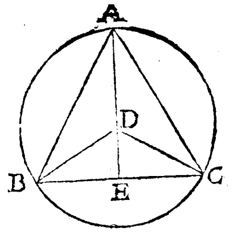
LEMMA.

La retta linea, che tirata da vn'angolo del triangolo equilatero al centro del medesimo triangolo, e continuata concorre col lato opposto, sarà perpendicolare à quel lato; diuide quel lato, e l'angolo del triangolo in due parti vguali, e tutta è tripla della parte interposta frà il centro, ed il lato, al quale cade perpendicolare.



Sia il triangolo equilatero ABC, il di cui centro D, e dall'angolo A al centro D sia tirata la retta AD, la quale continuata concorra col lato BC in qualche punto E. Dico che la retta AE è perpendicolare al lato BC; che diuide BC, e diuide l'angolo BAC in due parti vguali; e che tutta AE è tripla alla retta ED, la quale dal centro D cade perpendicolare al lato BC. Intorno al triangolo ABC [a] sia a 5. del 4.
circoscritto il circolo ABC, il di cui centro sarà il punto D; si tirino le rette DC, DB. Perche il triangolo ABC è equilatero, sarà l'arco AC [b] vguale all'arco AB, e l'angolo b 28. del 3.
ADC [c] sarà vguale all'angolo ADB, per la qual cosa i supplementi, cioè gli c 27 del 3.
angoli CDE, BDE, [d] sono frà di loro vguali. Si considerino i due triangoli d 13. del 1.
DEC, DEB, de'quali i due lati ED, DC sono vguali à i due lati ED; DB, l'angolo EDC è vguale all'angolo EDB, sarà la base EC [e] vguale alla base e 4. del 6.
EB, e gli angoli DEC, DEB saranno frà di loro vguali, cioè retti, e sarà la retta AE, come ancora DE, perpendicolare al lato BC. Ne i triangoli AEC, AEB, essendo l'angolo ACE vguale all'angolo ABE, e gli angoli in E retti, sarà il rimanente angolo EAC [f] vguale al restante angolo EAB. Si considerino poi i triangoli ADB, BDC. Perche i due lati AD, DB sono vguali à i due f 32. del 1.

g 8. del 1. h 4. del 1. *lati BD, DC, e la base AB è vguale alla base BC, sarà l'angolo ADB [g] vguale all'angolo BDC, ed il triangolo ADB [h] sarà vguale al triangolo BDC.*
Nell'istesso modo si dimostrerà, che il triangolo ADB
è vguale al triangolo ADC, per il che i tre triangoli
ADB, BDC, ADC sono frà di loro vguali, e tutto il
triangolo ABC sarà il triplo del triangolo DBC. In
oltre, perche il rettangolo contenuto dalle due AE,
K 41. del 1. *BC [K] è il doppio del triangolo ABC, ed il rettangolo*
l 41. del 1. *contenuto dalle due DE, BC [l] è il doppio del triango-*
lo DBC, sarà il rettangolo contenuto dalle due AE,
EB vguale al triangolo ABC; ed il rettangolo conte-
nuto dalle due DE, EB vguale al triangolo DBC; e
perciò il rettangolo contenuto dalle due AE, EB al
triangolo ABC, sarà come il rettangolo contenuto dalle due DE, EB al trian-
m 16. del 5. *golo DBC: e permutando, il rettangolo contenuto dalle due AE, EB [m] al ret-*
tangolo contenuto dalle due DE, EB, sarà come il triangolo ABC al triangolo
DBC; prese AE, ED come basi di due rettangoli, la di cui altezza commune
sia BE, sarà il rettangolo contenuto dalle due AE, EB al rettangolo contenuto
n 1. del 6. *dalle due DE, EB, [n] come la base AE alla base DE; e perche il rettangolo*
contenuto dalle due AE, EB al rettangolo contenuto dalle due DE, EB, per
quel che si è dimostrato, è come il triangolo ABC al triangolo DBC, sarà il
o 11. del 5. *triangolo ABC al triangolo DBC [o] come la retta AE alla retta DE: ma il*
triangolo ABC fù dimostrato essere il triplo del triangolo DBC, la retta dun-
que AE sarà il triplo della retta DE, ch'era da dimostrarsi.



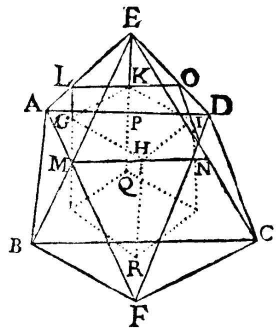
PROBLEMA IV. PROPOSITIONE IV.

Nel dato Ottaedro iscriuere il Cubo.

Sia l'Ottaedro ABCDEF, nel quale s'habbia da iscriuere il Cubo. Perche l'Ottaedro è diuiso dal quadrato in due Piramidi, ogn'vna delle quali è contenuta da quattro triangoli equilateri, ed hà per base il detto quadrato, sia quel quadrato, per esempio, il notato ABCD, sopra il quale sia posta la Piramide, il di cui vertice E, e la base il detto quadrato ABCD, ed i quattro triangoli siano i notati EAB, EBC, ECD, EAD; l'altra Piramide vguale à questa resti sotto al quadrato ABCD, la quale hà per vertice F, e per base il medesimo quadrato ABCD; e ritornando alla
a 5. del 4. prima Piramide si trouino i centri de' triangoli EAB, EBC, ECD, EAD, [a]
che siano i punti, G, H, I, K, e si tirino le rette KG, GH, HI, IK; per li punti
b 31. del 1. K, G, H, I, si facciano passare le rette LM, MN, NO, OL, [b] cioè ML parallela
ad AB, MN parallela à BC, NO parallela à CD; ed LO parallela ad AD;
c Corol. alla 4. del 6. saranno i triangoli LME, EMN, NEO, OEL, [c] simili à i triangoli equilateri EAB, EBC, ECD, EAD, e perciò i triangoli LME, EMN, NEO, OEL sono equilateri; e perche ogni due de i detti triangoli hanno vn lato commune; per esempio EM è lato commune de i due triangoli ELM, EMN; la retta EN è lato commune de i due EMN, ENO, e la retta EO è lato com-

mune

mune de i due ENO, EOL; per la qual cosa i triangoli ELM, EMN, ENO, EOL sono frà di loro vguali. Dal punto E al centro K del triangolo equilatero EAD si tiri la retta EK, e si prolunghi in P, per l'antecedente Lemma, EP sarà tripla alla retta KP, e perciò EK sarà il doppio di KP: ma
EK à KP [d] è come EL ad LA, ed ancora come EO ad OD, sarà EL il dop- d 2. del 6.
pio di AL, e la retta EO il doppio di OD. Nell'istesso modo si dimostrerà che EM è il doppio di MB, e che EN è il doppio di NC; ed essendo le rette EA, EB, EC, ED, diuise nella medesima proportione, le rette ML, MN, NO, OL concorreranno ne i punti delle diuisioni L, M, N, O: e perche i triangoli equilateri ELM, EMN, ENO, EOL furono dimostrati frà loro vguali, perciò i lati LM, MN, NO, OL sono frà di loro vguali. In oltre, perche la retta LO è parallela ad
AD, e la retta LM è parallela ad AB, sarà l' e 10. del 11.
angolo MLO [e] vguale all'angolo BAD: ma l'angolo BAD è retto, stante che il quadrilatero ABCD, per il 1. Coroll. alla 14. propos. del 13, è quadrato, in conseguenza l'angolo OLM sarà retto. Nell'istesso modo si dimostrerà, che gli altri angoli LON, ONM, NML sono retti, e perciò il quadrilatero LMNO è quadrato. Si considerino i due triangoli EKL, EKO. Perche i due lati EK, EL, sono vguali à i due lati EK, EO, e l'angolo KEL, per l'antecedente Lemma, è vguale all'angolo KEO, sarà
la base LK [f] vguale alla base KO; dal che la retta LO è diuisa in due parti f 4. del 1.
vguali nel pũto K. Col medesimo modo d'argumẽtare si dimostrerà, che le rette ML, MN, NO sono diuise in due parti vguali ne i punti, G, H, I; per la qual cosa le rette LG, GM, MH, HN, NI, IO, OK, KL, essendo metà de i lati del quadrato LMNO, sono frà di loro vguali; e perche gli angoli KLG,
GMH, HNI, IOK sono retti, perciò le rette KG, GH, HI, IK [g] sono frà di g 4. del 6.
loro vguali. Di più perche i lati LK, LG sono frà di loro vguali, e l'ango-
lo KLG è retto, ogn'vno de gli angoli LKG, LGK, [h] sarà la metà d'vn an- h 32. del 1.
golo retto. Nell'istesso modo si dimostrerà che ogn'vno degli angoli OKI, OIK, NIH, NHI, MHG, MGH, è la meta d'vn angolo retto, e perciò gli an-
goli GKI, KIH, IHG, HGK [K] sono retti; per la qual cosa il quadrilatero K 13. del 1.
KGHI è quadrato. Finalmente perche l'Ottaedro, per il 3. Coroll. alla 14. prop. del 13, si diuide in sei vguali piramidi quadrangolari, che due prese in qualunque modo compongono l'Ottaedro, e nella figura antecedente vna di quelle piramidi è la notata EABCD, la di cui base è il quadrato ABCD, ed il vertice E, nella quale si è iscritto il quadrato LMNO, se in ciascuna delle altre cinque piramidi si farà la medesima costruttione, saranno iscritti gli altri cinque quadrati, ogn'vno vguale al quadrato LMNO, i quali tutti haueranno gli angoli ne i centri de i triangoli, che contengono l'Ottaedro, e per la defin. 31. del 11, sarà iscritto il Cubo KGRI nell'Ottaedro, come si è proposto fare, e dimostrare.

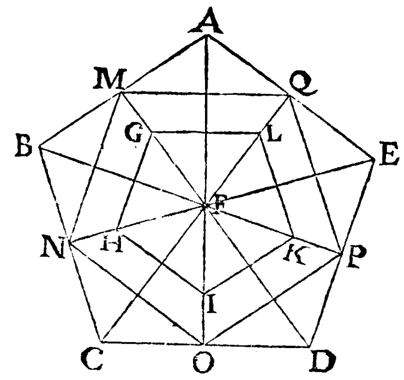


PRO-

PROBLEMA V. PROPOSITIONE V.

Iſcriuere il Dodecaedro nel dato Icoſaedro.

Sia ABCDE vno de i dodeci pentagoni, che nell'Icoſaedro ſono baſi delle dodici piramidi, come fù ſpiegato nel terzo Corollario della 16. prop. di queſto, e ſopra la baſe ABCDE s'intenda eretta vna di quelle 12. piramidi dell'Icoſaedro, il di cui vertice ſia F, e l'angolo ſolido F ſia contenuto da i cinque angoli piani AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, ed i centri de' triangoli equilateri AFB, BFC, CFD, DFE, EFA, ſiano i punti, G, H, I, K, L, i quali ſi congiungano con le rette, GH, HI, IK, KL, LG. Dal vertice F à i centri G, H, I, K, L, ſi tirino le rette FG, FH, FI, FK, FL, e ſi prolunghino fin che ſeghino i lati del pentagono ne i punti, per eſempio M, N, O, P, Q, le rette FM, FN, FO, FP, FQ, per il Lem. dopo la 1. prop. di queſto, ſegaranno i lati del pentagono in due parti vguali, & ad angoli retti in M, N, O, P, Q; ſi tirino le rette MN, NO, OP, PQ, QM. Perche le rette AQ, AM, ſono vguali alle due BM, BN, e gli angoli

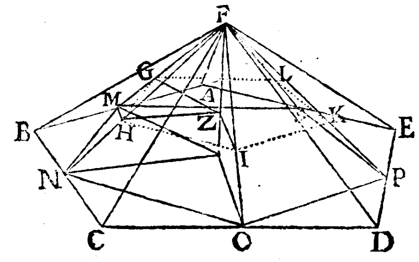


a 4. del 1. QAM, MBN, ſono frà di loro vguali, perciò la baſe QM [a] ſarà vguale alla baſe MN. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che le rette QP, PO, ON ſono frà loro vguali, e che ogn'vna è vguale ad MQ ouero MN; per la qual coſa il pentagono MNOPQ ſarà equilatero. Similmente perche le perpendicolari FQ, FM, FN, FO, FP, ſono frà di loro vguali (ſtante che ſono le perpendicolari de gli vguali triãgoli equilateri, che ſono baſi dell'Icoſaedro) e le rette QM, MN, NO, OP, PQ, ſono ſtate dimoſtrate vguali, gli angoli

b 8. del 1. QFM, MFN, NFO, OFP, PFQ, [b] ſaranno frà di loro vguali. E perche i punti G, H, I, K, L, ſono centri de gli vguali triangoli equilateri, le rette FG, FH, FI, FK, FL ſaranno frà di loro vguali: ma, per quel che ſi è dimoſtrato, contengono angoli vguali, perciò le rette GH, HI, IK, KL, LG ſono frà di loro vguali, ed il pentagono GHIKL, è equilatero. Di nuouo eſſendo i lati AQ, AM, BM, BN, CN, CO, &c. frà di loro vguali, e gli angoli in A, B, C, frà di loro vguali, ſaranno gli angoli AQM, AMQ, BMN, BNM, CNO &c. frà di loro vguali, e perciò i due angoli AMQ, BMN ſono vguali à i due angoli BNM, CNO, e per la 13. del 1, il rimanente angolo QMN ſarà vguale al reſtante angolo MNO. Nell'iſteſso modo ſi dimoſtrerà, che ogn'vno degli angoli MNO, NOP, OPQ, PQM, è vguale all'angolo QMN, ed in conſeguenza ſono frà di loro vguali: dal che il pentagono MNOPQ, ch'è poſto nel piano ABCDE, ſarà equiangolo, e

perche

perche ſopra ſi è dimoſtrato il pentagono MNOPQ eſſere equilatero; ſarà perciò il pentagono MNOPQ equilatero, ed equiangolo. Di più perche le perpendicolari FM, FN, FO, FP, FQ, paſſano per li centri de' triangoli equilateri, per il Lem. dopo la 2. propoſitione di queſto ſono i tripli delle rette GM, HN, IO, KP, LQ; ſarà FG il doppio di GM, e la retta



FH ſarà il doppio di HN: Per la qual coſa FG à GM [c] ſarà come FH, ad ad HN; e per la 2. del 6, la retta HG è parallela ad NM. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che le altre rette HI, IK, KL, LG, ſono parallele à i lati NO, OP, PQ, QM. Hor eſſendo le due LG, GH parallele alle due QM, MN, ſarà l'angolo LGH [d] vguale all'angolo QMN, e per l'iſteſſa ragione gli angoli, GHI, HIK, IKL, ſono vguali à gli angoli MNO, NOP, OPQ, ed in conſeguenza gli angoli LGH, GHI, HIK, IKL, KLG, ſono frà loro vguali. Finalmente perche le rette GH, HI ſono parallele alle rette MN, NO, il piano, che paſſa per le rette GH, HI, [e] ſarà equidiſtãte al piano MNO. Nell'iſteſſo modo ſi prouerà, che il piano, che paſſa per le rette HI, IK, e parallelo al piano NOP, e perche la retta HI è nel piano GHI, ed ancora nel piano HIK, li piani GHI, KIH, ſecondo la detta poſitura, formano vn medeſimo piano. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il pentagono GHIKL è in vn medeſimo piano; e per quel che ſi è dimoſtrato, il pentagono GHIKL è equilatero, ed equiangolo. Se poi nelle altre vndici piramidi dell'Icoſaedro ſi farà la medeſima coſtruttione, congiungendo con rette linee i centri de' triangoli equilateri, ſaranno coſtrutti dodici pentagoni equilateri, ed equiangoli, i quali coſtituiranno il Dodecaedro iſcritto nel propoſto Icoſaedro, come fù propoſto fare, e dimoſtrare.

c 15. del 5.
d 10. del 11.
e 15. del 11.

I N V E N T I O N E

Dell'angolo della ſcambieuole inclinatione di due baſi di qualunque corpo regolare,

DI ISIDORO MAESTRO D'HYPSICLE.

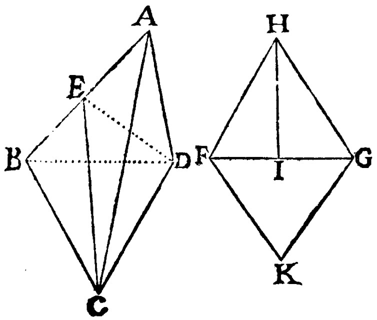
I.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi del Tetraedro.

Sia il Tetraedro ABCD contenuto da i quattro triangoli equilateri ABC, ACD, ADB, BCD, e ſia A il vertice, e la baſe ſia BCD, e ſi

voglia

voglia ritrouare l'angolo di quanto il piano ABC è inclinato al piano ABD. Si faccia il triangolo equilatero HFG vguale al triangolo equilatero ABC, ouero ABD, dall'angolo H [a] si faccia cadere la retta HI perpendicolare al lato FG, poi sopra la retta FG si costruisca il triangolo isoscele KGF in modo, che ciascun lato KG, KF, sia vguale ad IH. Dico che l'angolo FKG sarà l'inclinatione di quanto il piano ABC è inclinato al piano ABD. Si diuida il lato AB [b] in due parti vguali in E, e si tirino le rette CE, DE. Perche i due lati BE, EC sono vguali à i due lati CE, EA, e la base AC è vguale alla base BC, stante che sono lati del triangolo equilatero ABC, sarà l'angolo CEB [c] vguale all'angolo CEA, e perciò gli angoli CEB, CEA [d] sono retti, e la retta CE è perpendicolare ad AB. Per l'istessa ragione la retta DE è perpendicolare ad AB. Di nuouo perche BC è vguale ad AB, sarà BC il doppio di BE, ed il quadrato di BC [e] sarà il quadruplo del quadrato di BE: ma il quadrato di BC [f] è vguale à i quadrati de i lati CE, EB, i quadrati de i lati di CE, EB, saranno il quadruplo del quadrato di EB: dal che il quadrato di CE sarà il triplo del quadrato di EB, cioè il quadrato di EB sarà la terza parte del quadrato di EC. Di nuouo perche il quadrato di CE è minore del quadrato di CB per quanto è il quadrato di EB, sarà dunque il quadrato di CE minore del quadrato di CB per quanto è vn terzo del medesimo quadrato di CE. Nell'istesso modo si dimostrerà che il quadrato di DE è minore del quadrato di CB per quanto è la terza parte del medesimo quadrato di DE; dal che i quadrati delle due CE, ED, insieme giunti, sono maggiori del quadrato di BC; ma BC è vguale al lato CD, i quadrati delle due CE, ED, saranno maggiori del quadrato di CD; per la qual cosa l'angolo CED [g] sarà acuto, e perche le rette CE, ED sono perpendicolari alla retta AB, ch'è commune settione de' piani ABC, ABD, sarà l'angolo CED l'inclinatione, che fà il piano ABC al piano ABD. Finalmente perche i triangoli equilateri ABC, ABD, HFG sono frà loro vguali, le perpendicolari CE, DE, HI sono frà di loro vguali; fù fatto ciascun lato KG, KF vguale ad HI, saranno i due lati KG, KF, vguali à i due lati CE, ED; la base CD è vguale alla base



a 32. del 1.
b 10. del 1.
c 8. del 1.
d 10. defin. del 1.
e Scol. alla 4. del 2.
f 47. del 1.
g 13. de l 2.

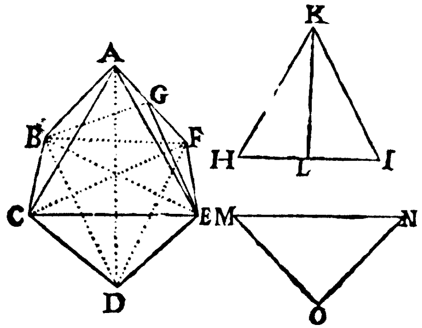
base FG; stante che i triangoli BCD, HFG sono equilateri, ed vguali, l'angolo dunque FKG [h] sarà vguale all'angolo CED, e perciò l'angolo GKF sarà acuto, e sarà l'inclinatione di quanto il piano ABC è inclinato al piano ABD, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

h 8. del 1.

II.

Ritrouare l'angolo della scambieuole inclinatione di due contigue basi dell'Ottaedro.

Sia l'Ottaedro ABCDEF, la di cui diagonale sia BE, e sia esposto il triangolo equilatero KHI vguale ad vno de' triangoli equilateri, che contiene il proposto Ottaedro, per esempio, sia vguale al triangolo equilatero AEF, ouero AFB, dall'angolo K si faccia cadere la retta KL [k] perpendicolare al lato HI: si esponga poi la retta MN vguale alla diagonale BE, e sopra la retta MN si descriua il triangolo isoscele ONM [l] in modo, che ciascuno de' lati ON, OM sia vguale alla perpendicolare KL. Dico che l'angolo MON è vguale alla inclinatione del piano AEF al piano AFB. Si diuida AF in due parti vguali in G, si tirino le rette EG, BG, e si dimostri, come si fece nell'antecedente, che le rette EG, BG sono perpendicolari alla retta AF, per la qual cosa l'angolo BGE sarà la quantità dell'inclinatione, che fà il piano AEF al piano AFB. Perche i triangoli equilateri KHI, ABF, AEF sono frà di loro vguali, le loro perpendicolari KL, EG, BG, sono frà di loro vguali, ma ciascun lato ON, OM è vguale, per costruttione, alla perpendicolare KL, saranno i due lati ON, OM vguali à i due lati GB, GE; la base MN è vguale alla base BE; sarà l'angolo MON [m] vguale all'angolo BGE, e perciò l'angolo MON sarà la quantità dell'inclinatione, che hà il piano AEF al piano ABF. Dico finalmente che l'angolo MON è ottuso. Nel triangolo EGF, angolo retto in G, il quadrato di EF [n] è vguale à i quadrati de' lati EG, GF, e perciò il quadrato di EF è maggiore del quadrato di EG. Nell'istesso modo si dimostrerà, che il quadrato di BF è maggiore del quadrato di BG: ma nel quadrato BCEF il quadrato di EB è vguale à i due quadrati di EF, FB, sarà il quadrato di EB maggiore de i quadrat i delle rette EG, GB; dal che l'angolo EGB, cioè MON, è ottuso, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

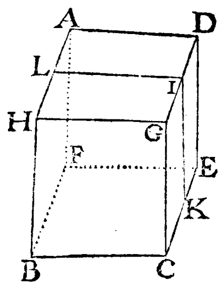


K 12. del 1.
l 22. del 1.
m 8. del 1.
n 47. del 1.

III.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi del Cubo.

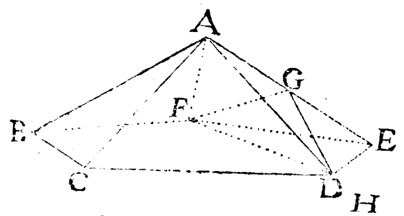
Sia il Cubo ABCD, e ſi voglia ritrouare l'inclinatione, che fà il piano CD al piano HD. Si prenda nella retta GD qualunque punto I, e
a 12.del 11. dal punto I nel piano CD ſi tiri la retta IK [a] ad angoli retti con GD. Similmente dal punto I nel piano GA ſi tiri la retta IL ad angoli retti colla retta GD; ſarà l'angolo LIK l'inclinatione del piano CD al piano HD. Dico che l'angolo LIK è retto. Perche gli angoli LIG, HGI
b 28.del 1. ſono retti, ſarà HG [b] parallela ad IL. Nell' iſteſſo modo ſi prouerà, che IK è parallela à CG. Hor eſſendo le rette LI, IK parallele à i lati HG,
c 10. del 11. GC, ſarà l'angolo LIK [c] vguale all'angolo HGC: ma l'angolo HGC è retto, ſarà l'angolo LIK retto; ſi che, douendoſi eſporre in qualche piano l'angolo dell'inclinatione di due contigue baſi del Cubo, ſi faccia in quel piano vn angolo retto, quello rappreſentarà l'inclinatione, che ſi cerca, il che era da farſi, e dimoſtrarſi.

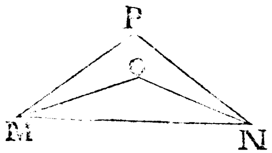


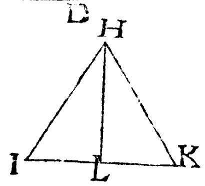
IV.

Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi dell'Icoſaedro.

Sia eſpoſta vna delle dodici piramidi dell'Icoſaedro, che ſia ABCDEF, la di cui baſe pentagonale ſia BCDEF, ed il vertice A, e ſi voglia ritrouare l'inclinatione del piano AED al piano AEF. Si
a 10. del 1. diuida il lato AE [a] in due parti vguali in G, e da gli angoli D, ed F, al punto G ſi tirino le rette DG, FG, e ſi moſtri, come ſi fece nel Tetraedo, che ne i triangoli equilateri ADE, AFE, le rette DG, FG ſono perpendicolari alla commune ſettione AE, dal che l'angolo DGF ſarà l'inclinatione del piano ADE al piano AEF. Si eſponga il triangolo equilatero HIK vguale al triangolo equilatero ADE, ouero AEF, e dall'angolo H cada la retta HL perpendicolare al lato IK. Perche i triangoli equilateri ADE, AEF, HIK, ſono frà di loro vguali, le per-





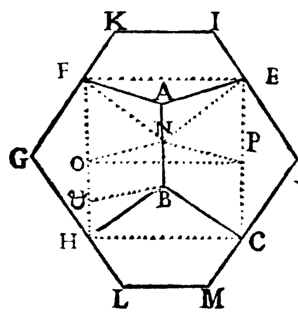


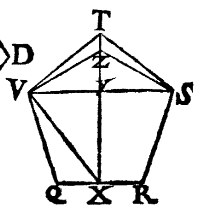
pendicolari HL, DG, FG ſono frà di loro vguali. Si tiri la retta FD, che ſottende l'angolo FED del pentagono, e ſi faccia la retta MN vguale ad FD; ſopra la retta MN ſi coſtruiſca il triangolo OMN iſoſcele [b] in mo- b 22.del 1.
do, che ciaſcun lato OM, ON ſia vguale alla perpendicolare HL; ſaranno i due lati MO, ON vguali à i due lati DG, GF; la baſe MN è fatta vguale alla baſe FD, ſarà l'angolo MON [c] vguale all'angolo FGD: ma l' c 8.del 1.
angolo FGD è la quantità dell'inclinatione, che hà il piano ADE al piano AEF, l'angolo dunque MON ſarà l'inclinatione del piano AED al piano AEF. Dico finalmente che l'angolo MON, ouero FGD, è ottuſo. Perche il pentagono FBCDE, per ipoteſi, è equilatero, il lato ED ſarà vguale al lato EF. Si coſtituiſca ſopra la baſe MN il triangolo iſoſcele PMN [d] in modo, che ciaſcun lato PM, PN ſia vguale ad ED, ouero EF, d 22. del 1.
e ſi conſideri il triangolo DGE, angolo retto in G. Perche il quadrato di DE, [e] è vguale à i quadrati de i due lati DG, GE, ſarà il quadrato di e 47. del 1.
ED maggiore del quadrato di GD, ed il lato ED ſarà maggiore del lato DG. Nell'iſteſſo modo ſi dimoſtrerà, che il lato FE è maggiore del lato FG, dal che i due lati DE, EF ſono maggiori de i due lati DG, GF: ma i due lati DG, GF ſono vguali à i due NO, OM, perciò i due lati DE, EF, cioè i due NP, PM, ſono maggiori de i due lati NO, OM, e per la 21. del 1, l'angolo MON è maggiore dell'angolo NPM. In oltre perche i lati NP, PM, ſono vguali à i due lati DE, EF, e la baſe NM è vguale alla baſe DF, l'angolo NPM [f] ſarà vguale all'angolo DEF; e perche l'ango- f 8.del 1.
lo DEF (come angolo del pentagono è ottuſo) perciò l'angolo MPN, ſarà ottuſo; fù dimoſtrato l'angolo NOM maggiore dell'angolo NPM, ſarà l'angolo NOM più ottuſo dell'angolo NPM. Per la qual coſa l'angolo NOM, ouero DGF, che rappreſenta l'inclinatione del piano ADE al piano AEF, è ottuſo, ch'era da farſi, e dimoſtrarſi.

V.

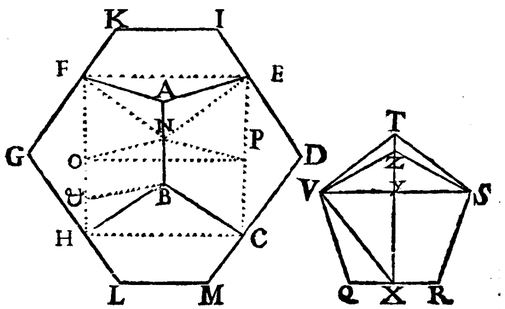
Ritrouare l'angolo della ſcambieuole inclinatione di due contigue baſi del Dodecaedro.

Siano eſpoſte quattro baſi del Dodecaedro, come ſono i notati quattro pentagoni ABCDE, FGHBA, AEIKF, CBHLM, in modo, che i due ABCDE, FGHBA concorrano, ſecondo il commune lato AB, e gli altri due AEIKF, BHLMC habbiano l'angolo, negli eſtremi A, & B del lato commune AB; ſi tirino le rette FE, FH, HC, CE, le quali, perche ſottendono gli angoli EAF, FGH, HBC, CDE, degli





vguali pentagoni, che sono basi del Dodecaedro, perciò sono frà di loro vguali. In oltre perche i lati DE, DC, GF, GH, sono frà di loro vguali, e gli angoli in D, & G sono frà di loro vguali, sarà l'angolo
a 4. del 1. DEC a vguale all'angolo GFH, che detratti dagli vguali angoli DEA, GFA, resta l'angolo HFA vguale all'angolo CEA: ma gli angoli AEF,
b 5. del 1. AFE b sono frà di loro vguali (stante che le rette AE, AF sono lati de i pentagoni vguali) tutto l'angolo dūque CEF sarà vguale à tutto l'angolo HFE. Nell'istesso modo si dimostrerà, che l'angolo FEC è vguale all'angolo HCE, e che l'angolo EFH è vguale all'angolo CHF: per la qual cosa i quattro angoli del quadrilatero FHCE sono frà di loro vguali. E perche quattro angoli d'vn quadrilatero, per lo Scolio alla 32. del 1, sono vguali à quattro angoli retti; essendo i quattro angoli del quadrilatero FHCE, frà di loro vguali, ogn'vno di quelli sarà vn angolo retto, ed il quadrilatero FHCE sarà qua-
c 10. del 1. drato. Si diuida AB c in due parti vguali in N, e dal punto N ne i piani de'
d 11. del 1. pentagoni ABCDE, AFGHB, si tirino le rette NP, NO, d ad angoli retti col lato AB, Perche le rette EC, FH, che sottendono gli angoli de' pentagoni, per lo Scolio alla propositione 8. del 13, sono parallele al lato AB, essendo gli angoli PNA, ONA, per costruttione, retti; saranno gli angoli NPE, NOF retti. E perche le rette PN, ON sono ne' piani de' pentagoni ABCDE, AFGHB, e fanno angoli retti colla commune settione AB, perciò l'angolo ONP sarà la quantità dell'inclinatione, che il piano ABCDE fà al piano AFGHB. Si tiri la retta OP, e si esponga il pentagono QRSTV equilatero, equiangolo, ed vguale al pentagono ABCDE; dal che QR sarà vguale al lato del Dodecaedro esposto; si tiri
f 10. del 1. la retta VS, che sarà vguale ad FE, ouero EC; si diuida QR f in due par-
g 11. del 1. ti vguali in X, e si erigga la retta XY g perpendicolare alla retta QR; so-
h 22. del 1. pra la retta VS si descriua il triangolo isoscele ZVS h in modo, che ciascun lato VZ, ZS, sia vguale ad XY. Dico che l'angolo VZS è vguale all'angolo ONP dell'inclinatione. Si tirino le rette NE, NF, VX. Perche le rette AE, AF, VQ, sono lati degli vguali pentagoni del Dodecaedro, perciò sono frà di loro vguali. Similmente perche le rette AN, QX sono metà degli vguali lati QR, AB, perciò sono frà di loro vguali, si che ne i triangoli FAN, EAN, VQX, i due lati FA, AN, ouero EA, AN, sono vguali à i due lati VQ, QX, gli angoli FAN, EAN, VQX, sono frà
K 4. del 1. di loro vguali, saranno le basi FN, EN, VX K frà di loro vguali, e gli angoli FNA, ENA, VXQ sono frà di loro vguali, che detratti dagli an-



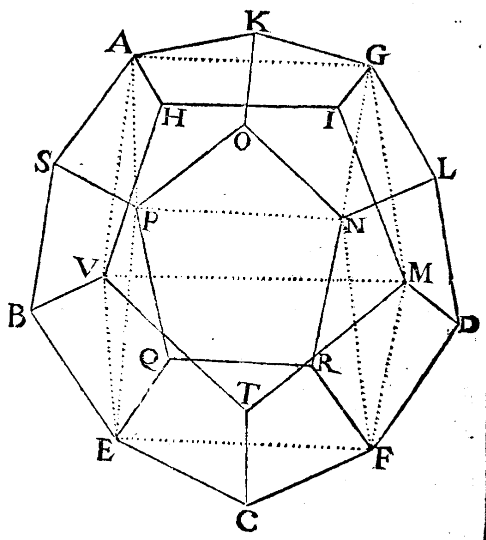
goli retti ANO, ANP, QXY, restano gli angoli FNO, ENP, VXY frà di loro vguali. Si considerino i triãgoli FON, EPN, XYV. Perche gli angoli NOF, NPE, VYX, sono retti, e gli angoli FNO, ENP, VXY, per quel che si è dimostrato, sono frà loro vguali, i due angoli FNO, FON, ouero ENP, EPN, sono vguali à i due angoli VYX, VXY; i lati NF, NE, VX sono stati dimostrati vguali, saranno i due lati NO, OF, l ouero NP, PE, l 26. del 1.
vguali à i due lati XY, YV; cioè il lato OF, ouero PE, vguale ad VY, ed il lato ON, ouero NP, vguale ad XY: ma per costruttione ciascun lato VZ, ZS è vguale ad XY, saranno i due lati VZ, ZS, vguali alle due rette ON, NP. Hor essendo EP vguale, e parallela ad FO, sarà FE m vguale, m 33. del 1.
e parallela ad OP, fù dimostrata la retta FE vguale ad VS, sarà OP vguale alla retta VS: per la qual cosa l'angolo VZS n è vguale all'angolo n 8. del 1.
dell'inclinatione ONP. Dico finalmente, che l'angolo VZS, ouero ONP, è ottuso. Dal punto B o si tiri la retta B&, parallela ad NO. o 31. del 1.
Perche NB è parallela ad O&, il quadrilatero O&BN sarà parallelogrammo, dal che il lato B& p sarà vguale ad ON. Oltre à ciò perche le p 34. del 1.
rette B&, ON sono parallele, sarà l'angolo B&H q esterno vguale all'an- q 29. del 1.
golo NO& interno, ed opposto: ma l'angolo NO& è retto, in conseguenza l'angolo B&H sarà retto. E perche i due angoli BH&, B&H r r 17. del 1.
sono minori di due retti, perciò l'angolo B&H sarà maggiore dell'angolo BH&, e la retta BH t sarà maggiore di B&: ma B& è vguale ad ON, oue- t 19. del 1.
ro NP, sarà la retta BH, ouero BC, maggiore di ON, ouero NP: ma le rette HB, BC, TV, TS, come lati de pentagoni vguali, ed equilateri, sono frà di loro vguali; e le rette ON, NP furono dimostrate vguali alle rette VZ, ZS; le rette dunque VT, TS saranno maggiori delle rette VZ, ZS, e per la 21. propositione del 1, l'angolo VZS è maggiore dell'angolo VTS: ma l'angolo VTS del pentagono, per lo Scolio alla 32. del 1, è maggiore del retto, perciò l'angolo VZS, ouero ONP, sarà molto maggiore d'vn' angolo retto. Per la qual cosa l'angolo dell'inclinatione di due contigue basi del Dodecaedro è ottuso, ch'era da farsi, e dimostrarsi.

COROLLARIO I.

Dalle cose antedette, e da quel che si è dimostrato nella 17. propos. del 13, è manifesto il modo da iscriuere il Cubo nel Dodecaedro.

Sia per esempio esposto il Dodecaedro ABCD, nel quale si habbia ad iscriuere il Cubo. Perche nella costruttione del Dodecaedro, seruendoci de' quadrati, che contengono il Cubo, in ciascun lato di quel Cubo si descriue il pentagono del Dodecaedro in modo, che ogni lato del Cubo sottende l'angolo del pentagono del Dodecaedro; se dunque nel Dodecaedro proposto per ogni pentagono si tirerà vna retta, che sottenda vn angolo di quel pentagono, sarà iscritto il cubo nel Dodecaedro; come per esempio. Nel pentagono AHIGK è tirata la retta AG, che sottende l'angolo AKG del detto pentagono; nel pentagono

GIMDL è tirata la retta GM, che ſottẽde l'ãgolo GIM; nel pentagono KGLNO è tirata la retta GN, che ſottende l'angolo GLN; nel pentagono OPQRN è tirata la retta PN, che ſottende l'angolo PON; nel pentagono SPOKA è tirata la retta AP, che ſottende l'angolo ASP; nel pentagono LNRFD è tirata la retta NF, che ſottende l'angolo NRF; e nel pentagono DMTCF è tirata la retta MF, che ſottende l'angolo MDF; ſimilmente nel pentagono FRQEC è tirata la retta EF, che ſottende l'angolo FCE; di più nel pentagono HVTMI è tirata la retta VM, che ſottende l'angolo VTM; nel pentagono



EQPSB è tirata la retta EP, che ſottende l'angolo EQP; nel pentagono CTVBE è tirata la retta EV, che ſottende l'angolo EBV; e finalmente nel pentagono BVHAS è tirata la retta VA, che ſottende l'angolo VHA; e queſti dodici lati, che contengono i ſei quadrati APNG, GNFM, AGMV, APEV, PEFN, VEFM, formano il Cubo AEFG iſcritto nel propoſto Dodecaedro.

r 4.

b 8

COROLLARIO II.

Quindi è manifeſto come nel dato Dodecaedro ſi iſcriue il Tetraedro, e l'Ottaedro.

Poiche ſe nel Dodecaedro ſi iſcriua prima il Cubo, e nel Cubo ſi iſcriua il Tetraedro, ouero l'Ottaedro, ſarà iſcritto il Tetraedro, e l'Ottaedro nel Dodecaedro.

COROLLARIO III.

Appare ancora il modo da iſcriuere il Cubo nell'Icoſaedro.

Il che ſi fà con iſcriuere prima il Dodecaedro nell' Icoſaedro, come fù inſegnato nella 5. prop. di queſto, e poi nel Dodecaedro ſi iſcriua il Cubo, come ſi è detto nel 1. Coroll, e ſarà iſcritto il Cubo nell'Icoſaedro.

COROLLARIO III.

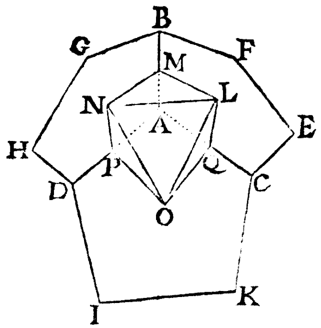
Si può ancora colla medeſim' arte iſcriuere il Tetraedro nell'Icoſaedro.

Il che ſi farà coll'iſcriuere prima il Cubo nell'Icoſaedro, e nel Cubo iſcriuere il Tetraedro, e ſarà iſcritto il Tetraedro nell'Icoſaedro.

COROLLARIO V.

Dalle coſe dette ſi caua ancora il modo da iſcriuere l'Icoſaedro nel Dodecaedro.

Sia eſpoſto l'angolo ſolido A contenuto dalli tre angoli BAC, BAD, DAC, de i tre pentagoni BACEF, BADHG, DACKI, che ſono baſi del Dodecaedro, e da i centri O, L, N, di quei tre pentagoni à i lati intorno all'angolo A ſi facciano cadere rette perpendicolari, cioè LQ[a] perpendicolare ad AC, la retta LM perpendicolare ad AB, le rette NM, NP perpendicolari à i lati AD, AB, e le rette OQ, OP perpendicolari à i lati AC, AD; ſi tirino le rette LN, NO, OL. Perche le rette OQ, QL, ſono perpendicolari alla commune ſettione AC, l'angolo LQO ſarà l'inclinatione del piano ACEFB al piano DACKI; e per ſimile ragione l'angolo LMN è l'inclinatione del piano BACEF al piano DABGH; e l'angolo NPO è l'inclinatione del piano DABGH a 12. del 1.



al piano DACKI; e perche il Dodecaedro è contenuto da dodeci pentagoni equilateri, equiangoli, ed vguali, gli angoli delle inclinationi ſono frà di loro vguali, e perciò gli angoli OQL, LMN, NPO, ſono frà di loro vguali. Similmente eſſendo i tre eſpoſti pentagoni equilateri, equiangoli, ed vguali, le perpendicolari OQ, LQ, LM, MN, NP, PO, ſono frà di loro vguali. Hor ne i triangoli LQO, LMN, NPO, eſſendo i lati LQ, QO, LM, MN, NP, PO, frà di loro vguali, e gl'angoli OQL, LMN, NPO, frà di loro vguali ſaranno le baſi LN, NO, OL,[b] frà di loro vguali; dal che il triangolo LNO ſarà equilatero. Se quanto ſi è fatto intorno all'angolo ſolido A, ſi ſarà ancora intorno à gli altri vndici angoli ſolidi del Dodecaedro, ſarà iſcritto l'Icoſaedro nel dodecaedro, come fu propoſto fare, e dimoſtrare. b 4. del 1.

ANNOTATIONE.

A queſti quindici Eſementi Franceſco Fluſſa Candalla aggiunſe il decimoſeſto, nel quale compara ſcambieuolmente i corpi regolari iſcritti, à quelli ne' quali ſono iſcritti, e fà ancora varie comparationi de i lati de' medeſimi corpi frà loro; e perche il mio iſtituto è ſtato di ſpiegare qui ſolamente li quindici Elementi eſpoſti da Euclide come più neceſſarij; perciò ſi è tralaſciato tutto il di più aggiunto da altri Autori, e ſolo ſi è cercato reſtituire con chiara ſpiegatione quel che ne hà ſcritto il medeſimo Euclide, come ſtimiamo già adempito.

Fine del Decimoquinto, ed vltimo Elemento.